HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXII. Première Partie.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXV.

AVERTISSEMENT.

L'ABONDANCE & l'étendue des Mémoires qui devoient compoſer ce Volume, n'ayant pas permis de les y comprendre tous, ſans le rendre d'une groſſeur démeſurée; l'Académie a cru devoir publier ſes Mémoires & ſon Hiſtoire de 1772 en deux parties, dont ce Volume eſt la première: la ſeconde eſt actuellement ſous preſſe.

TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

TABLE
POUR LES MÉMOIRES.

ERRATA POUR LA TABLE DE L'HISTOIRE DE 1771.

Obſervations des Comètes de 1764 & 1769, *liſez* & la ſeconde Comète de 1770, obſervée en Janvier 1771.

ERRATA POUR L'HISTOIRE DE 1771.

Page 81, ligne 1, & 1769. *liſez* & la ſeconde Comète de 1770, obſervée en Janvier 1771.

Ibid. ligne 10, de 1769, *liſez* de 1764.

ERRATA POUR L'HISTOIRE DE 1772.

Page 12, ligne antépénultième, réſulte, *liſez* réſulter.

ligne ſuivante, ce, *liſez* ces.

ligne dernière, expérience, *liſez* expériences.

Page 43, ligne 30; donc, *liſez* dont.

Page 48, effacez la dernière ligne de cette page.

Page 52, ligne 17, après pas, *ôtez la virgule & mettez deux points.*

ERRATA POUR LES MÉMOIRES DE 1772.

Page 285, cinquième ligne à compter par en bas, de l'angle de l'orbite relative de la Lune, *liſez* de l'angle de l'orbite relative de la Planète.

Page 475, ligne 15, Libarius, *liſez* Libavius.

HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXII.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

SUR LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

Voyez les Mémoires, page 297.

IL est aujourd'hui reconnu par presque tous les Physiciens, que l'attraction du Soleil & de la Lune est la cause du flux & du reflux de la mer, & que l'action de ces astres sur les eaux, n'est jamais si puissante, que lorsqu'ils sont en conjonction, & agissent par conséquent ensemble.

Dans cette position, ces astres attirent les eaux de la mer

qui ſe trouvent perpendiculairement au-deſſous d'eux, & les attirent avec plus de force que le centre de la Terre qui en eſt plus éloigné d'environ quatorze cents lieues. Les eaux qui leur ſont oppoſées de l'autre côté du globe, ſont par la même raiſon moins attirées que ce même centre qui les ſuit; d'où il ſuit que la maſſe des eaux devient un ſphéroïde, dont le grand diamètre eſt dans la ligne qui joint les centres de la Terre, de la Lune & du Soleil. La Terre par ſon mouvement diurne préſentant ſucceſſivement différens points à l'action réunie des deux Planètes, de nouvelles parties de la mer s'élèvent, & celles qui avoient été d'abord élevées retombent, & s'écoulant vers les côtes, y font élever les eaux; c'eſt ce que l'on nomme *le flux*.

Lorſque les deux planètes ne ſont plus dans la même ligne droite avec le centre de la Terre, alors leur action ſur les eaux de la mer n'eſt plus ſi forte; & auſſi les marées de quartier qui ne ſont produites que par la ſeule action de la Lune, ſont toujours moindres que celles des conjonctions ou des oppoſitions, qu'on nomme *vives eaux*, & qui ſont produites par l'action réunie des deux aſtres.

Quand les deux aſtres ſe trouvent dans l'Équateur, les pays ſitués ſous la Ligne, éprouvent certainement les plus grandes marées; mais ceux qui ſont ſitués ſous les tropiques, & plus encore ceux des zones tempérées, ne doivent pas les avoir ſi grandes, parce qu'ils ſont plus éloignés du ſommet du ſphéroïde; ces pays au contraire doivent avoir leurs plus grandes marées quand la Lune pleine ou nouvelle s'approche davantage de leur zénith; c'eſt une ſuite néceſſaire de la théorie. Il eſt vrai que cette théorie paroît être ici dans une eſpèce de contradiction avec le préjugé où l'on eſt communément ſur nos côtes, que les plus grandes marées ſont toujours celles des équinoxes.

Mais ce préjugé eſt-il légitime? & les marées des équinoxes ſont-elles réellement les plus grandes: c'eſt ce que M. de la Lande a entrepris d'examiner dans ce Mémoire.

On doit néceſſairement faire entrer dans le calcul la figure

des côtes qui resserrent la mer; car les eaux resserrées entre l'Afrique & l'Amérique, doivent suivre des directions très-différentes de celles qu'elles auroient, si tout le globe étoit couvert d'eau. Il n'y a donc que l'observation qui puisse nous conduire dans ce labyrinthe; & c'est aussi le moyen auquel M. de la Lande a eu recours.

Possidonius, cité par Strabon, donne à cet égard la plus ancienne preuve qu'on puisse apporter, contre le système des grandes marées des équinoxes.* « On tient, dit-il, pour constant, que sur les côtes d'Espagne, les abaissemens & les « élévations de la mer sont les plus forts au solstice d'été, « & qu'ils diminuent jusqu'à l'équinoxe. Seleucus, ajoute-t-il, « s'étant trouvé à Cadiz dans le temple d'Hercule, au solstice « d'été, y observa une très-grande marée; les eaux du fleuve « Bætis qui ordinairement couvrent à peine les rivages, s'éten- « dirent jusqu'à trente lieues dans les terres, les endroits voisins « de la mer furent absolument inondés, & le sol du Temple « d'Hercule fut couvert de dix coudées d'eau, que Seleucus « mesura lui-même. »

* Strabon, *lib. III, pag. 174, edit. 1626*.

On savoit donc, il y a dix-huit cents ans, qu'il y avoit une grande marée au solstice d'été, mais il faut avouer qu'il se trouve ensuite une étrange lacune dans l'histoire de ce phénomène; on ne voit reparoître des observations réglées des marées qu'en 1666, que Wallis publia son Traité *de æstu Maris*, dans lequel il dit bien positivement, qu'aux côtes d'Angleterre où il observoit, les plus grandes marées, ne sont pas celles des équinoxes, mais celles de Février & de Novembre.

L'Académie, presqu'aussitôt après son renouvellement, en 1699, obtint des ordres du Roi pour faire faire un grand nombre d'observations de la hauteur des marées; malheureusement les registres dans lesquels ces observations ont été écrites ne se trouvent plus, & M. de la Lande n'en a pu trouver d'autres que celles qui ont été rapportées dans les Mémoires de l'Académie en différentes occasions, & toujours dans des vues différentes de celles qui sont l'objet de ce Mémoire. Malgré cela il s'en trouve assez pour faire voir que rien n'est

moins prouvé que la propoſition qui aſſure, que les marées des équinoxes ſont les plus grandes de toutes.

La diſcuſſion de ces obſervations a fait remarquer à M. de la Lande pluſieurs autres points qui doivent entrer dans ce calcul, & qui avoient preſque toujours été négligés. Le plus ou moins de diſtance de la Lune à la Terre, doit, par exemple, influer beaucoup ſur la plus grande hauteur des marées, & l'obſervation eſt en ce point parfaitement d'accord avec la théorie; mais un autre article encore plus eſſentiel, & qui avoit toujours été négligé dans les obſervations, eſt celui des vents; leur action eſt ſi conſidérable, qu'à Péterſbourg, où il n'y a aucun flux ni reflux, le vent d'Oueſt ou de Sud-oueſt fait, quand il ſouffle, monter la mer de pluſieurs pieds, tandis que le vent d'Eſt ou de Nord-eſt la fait deſcendre.

Cette action des vents mérite même d'autant plus d'être examinée, que les vents ont eux-mêmes une ſorte de régularité, qui peut ſe combiner avec les phénomènes coſmiques. Quoique nous n'ayons pas ici des vents aliſés comme dans la Zone torride, il y a cependant des vents qui reviennent aſſez régulièrement tous les ans, à quelques jours près. Il n'eſt perſonne qui ne connoiſſe les vents de Nord-oueſt qui ſuivent l'équinoxe du printemps, & ceux de Sud-oueſt qui ſuivent l'équinoxe d'automne, & qui ſont toujours accompagnés de pluies; il a donc été bien naturel qu'on ait pris l'effet de ces vents, pour celui de l'action de la Lune aux environs de l'équinoxe; cela même eſt d'autant plus vraiſemblable, que ces mêmes vents produiſent les mêmes effets ſur les côtes orientales de l'Aſie & de l'Amérique, tandis qu'ils en opèrent de contraires ſur les côtes occidentales.

Il y a plus, ſi la proximité de la Lune à l'équateur, étoit capable de produire les plus grandes marées; il devroit en réſulter que, lorſque la nouvelle ou pleine Lune ſe trouve aux environs du ſolſtice, les marées de quartier ſeroient les plus grandes poſſibles, puiſque la Lune éloignée de 90 degrés du point de la ſyzygie, ſe trouveroit alors à l'équateur; & c'eſt cependant ce qu'on n'obſerve point.

Une autre caufe peut encore avoir fait illufion : lorfque la Lune eft aux environs du tropique d'été, elle approche affez près de notre zénith, le fommet du fphéroïde aqueux eft donc très-voifin de nous le jour de la pleine Lune à minuit, & la marée doit être fort grande, mais à la marée qui arrive à midi, le fommet oppofé du fphéroïde eft de l'autre côté de l'équateur, & très-éloigné de nous ; la marée doit donc être beaucoup plus petite, & il y a telle latitude où elle feroit nulle : or, ces deux marées fe compenfent néceffairement, la mer n'ayant pas le temps de l'une à l'autre, de fe prêter à toute leur inégalité ; & il en réfulte que l'état moyen n'exprime pas toute l'action de la Lune & du Soleil fur les eaux, & qu'on trouve ces marées plus petites qu'elles ne font en effet ; ce qui n'arrive pas aux marées équinoxiales.

Il réfulte de ce que nous venons de dire, que rien n'eft moins prouvé que l'hypothèfe qui place les plus grandes marées aux nouvelles & pleines Lunes équinoxiales ; qu'elles paroiffent dépendre beaucoup plus de la plus grande ou moindre diftance de cette Planète à la Terre, de la proximité du point où fe fait la fyzygie, au zénith du lieu où on obferve ; de la force & de la direction des vents qui foufflent alors, & qu'il feroit bien à fouhaiter que toutes ces caufes euffent été rapportées dans les obfervations que nous avons.

Ce qu'il y a tant de raifons de defirer que ceux qui nous ont précédé euffent fait, a été heureufement entrepris par M. Fourcroi de Ramecourt, Brigadier des armées du Roi, Ingénieur en chef à Calais. Cet habile & laborieux Correfpondant de l'Académie, a entrepris une fuite d'obfervations de cette efpèce, faites avec toute l'attention & les précautions poffibles ; dans laquelle il marque les années, les mois, les jours & les heures des obfervations ; les hauteurs de la mer, les jours de la Lune, fa parallaxe, & par conféquent fa diftance à la Terre, & le vent qui régnoit alors. Il a formé de ces obfervations, commencées en 1745, mais continuées fans interruption depuis 1754 jufqu'à préfent, une Table que M. de la Lande a fait imprimer à la fin de fon Mémoire &

qui ſert de preuve à tout ce qu'il a avancé. Il eſt aiſé de voir que tout ceci n'eſt qu'un commencement de travail, & combien il eſt utile & deſirable que ce travail ſoit ſuivi, & s'il ſe peut multiplié. Ce n'eſt que par des obſervations faites en beaucoup de lieux, & continuées pendant un grand nombre d'années, qu'on peut parvenir à arracher en cette partie le ſecret de la Nature.

SUR DES BÊTES À LAINE

Parquées pendant toute l'année.

V. les Mém. p. 436.
* V. Hiſt. 1768, p. 42.

NOUS avons rendu compte en 1768, * d'un Mémoire de M. Daubenton, ſur le tempérament des Bêtes à laine, & ſur leur rumination, dans lequel il fait voir, que des quatre eſtomacs qu'on trouve dans ces animaux, comme dans tous les autres ruminans, il y en a un preſque uniquement deſtiné à humecter les herbes que l'animal a mangées, avant qu'elles paſſent dans le troiſième eſtomac; que la liqueur contenue dans ce ſecond eſtomac, que les Bouchers nomment le bonnet, eſt fournie par la ſéroſité du ſang & par la boiſſon de l'animal que ce ſingulier organe abſorbe comme une éponge; d'où M. Daubenton conclud avec raiſon. 1.° Qu'il faut faire boire les moutons pour empêcher que le bonnet ne ſéche trop leur ſang; mais qu'il les faut faire boire modérément, pour éviter que cet organe ne ceſſe de tirer cette ſéroſité, qui deviendroit nuiſible à l'animal, ſi elle étoit trop abondante. 2.° Qu'il faut éviter ſoigneuſement tout ce qui peut procurer au mouton aſſez de chaleur pour le faire ſuer, parce que cette évacuation forcée abſorberoit une partie conſidérable de cette ſéroſité néceſſaire à la digeſtion; ce qui pourroit avoir les ſuites les plus fâcheuſes.

Il réſultoit de toute cette théorie anatomique, que la manière uſitée en Eſpagne & en Angleterre, de tenir toute l'année, même dans l'hiver, les moutons à l'air, & dans des

parcs ſans les enfermer, comme on fait ici dans des étables, paroiſſoit bien mieux fondée que la nôtre; que ces animaux étant aſſez bien vêtus pour ne pas craindre le froid, ils ne redoutent que le chaud, & que la chaleur des étables qu'on leur procure, vraiſemblablement très-mal-à-propos, ne fait qu'altérer leur ſanté, & détériorer leur laine; & ces raiſons déterminèrent abſolument M. Daubenton à eſſayer la méthode uſitée en Eſpagne & en Angleterre.

Nous avons maintenant à rendre compte au Public de l'exécution de ce projet, c'eſt l'objet du Mémoire duquel nous avons à parler.

Cette manière de gouverner les bêtes à laine, exige néceſſairement deux ſortes de parcs; le parc ordinaire dans lequel on renferme les moutons toutes les nuits, depuis la fin de Juin juſqu'à la mi-Novembre, & qu'on change de place au moins tous les jours, mais preſque toujours deux fois par nuit, pour faire profiter ſucceſſivement toutes les terres du fumier que les moutons y répandent: nous ne dirons rien de cette eſpèce de parc qui doit ſervir de la même manière dans la méthode de M. Daubenton & dans la méthode ordinaire; mais voici la différence eſſentielle de ces deux méthodes.

Dans la méthode ordinaire, dès la mi-Novembre, on ceſſe de parquer les moutons, & on les ramène la nuit dans des étables bien fermées, où il s'excite néceſſairement une aſſez grande chaleur, & où on reſpire un air infecté de matières alkalines, qui leur cauſe beaucoup de maladies, gâte la laine, & détériore la chair de ces animaux.

M. Daubenton ſubſtitue à ces étables un parc domeſtique, établi dans le coin d'une cour fermée de murs, qui en forment deux côtés, les deux autres ne ſont fermés à l'ordinaire que de claies; ce parc par cette ſituation met les moutons à l'abri des loups, ſans que le berger ſoit obligé de les veiller toute la nuit, comme dans le parc des champs. On diſpoſe le terrein en pente, pour faciliter l'écoulement des eaux; on attache les rateliers aux murs & aux claies; on ſable le

ſol pour éviter la boue, & on en enlève ſoigneuſement le fumier tous les jours.

C'eſt-là le parc où l'on tient les moutons tout l'hiver ſans aucun abri, & que M. Daubenton a trouvé bien plus convenable pour eux, que les étables: nous allons eſſayer de préſenter le réſultat de ſes expériences.

Quatre-vingts bêtes à laine, de races d'Auxois, de Rouſſillon & de races mêlées, ont été miſes au parc domeſtique avec trente-cinq autres de Maroc, de Flandre & de race Angloiſe; ces dernières étoient foibles, malades, languiſſantes & fatiguées des voyages qu'elles avoient faits, par mer & par terre: on a donné auſſi à ces dernières une nourriture un peu meilleure qu'aux autres, qui n'avoient que de la paille & une ſeule livre de foin par jour, lorſqu'on ne les menoit pas paître: un ſeul de ces animaux a péri, tandis que de ceux qu'on tenoit dans des étables bien chaudes, il en mouroit un ſi grand nombre, qu'un troupeau qui étoit dans le voiſinage en a perdu près de la moitié.

Les agneaux nés au nombre de quarante, en plein air, expoſés à la gelée, au vent, à la pluie & à la neige, de brebis alliées avec des béliers plus forts qu'elles, ce qui doit d'autant fatiguer la mère, ſe ſont très-bien élevés, & il n'en eſt mort que ſept, tandis que près de la moitié de ceux qui étoient nés dans les étables voiſines a péri.

M. Daubenton s'eſt même aſſuré que la plupart de ceux qui étoient morts, n'avoient pas péri par la rigueur du froid; la diſſection lui a fait voir que ces animaux étoient morts de cauſes toutes différentes. Si cependant on pouvoit craindre que le froid ne fût fatal aux agneaux, il ſeroit aiſé de leur en faire éviter la plus grande rigueur; on eſt maître de retarder leur naiſſance, il n'y a qu'à donner plus tard le bélier aux brebis; & M. Daubenton s'eſt aſſuré que ce retardement n'entraîne aucune conſéquence fâcheuſe.

Au cas même que le froid pût incommoder quelques agneaux, il faudroit ſuivre le procédé des Anglois, ils les enveloppent, ils les réchauffent à un feu doux, leur font avaler

un

un peu d'eau de genièvre, & les nourrissent avec du lait chaud jusqu'à ce qu'on puisse leur faire téter leur mère dans une grange, ou sous un hangard.

C'est donc à tort qu'on s'est imaginé que le sol de la France n'étoit pas aussi favorable pour les bonnes qualités de laine, que celui des royaumes voisins, dont les laines sont si recherchées; le climat de la France est moins chaud que celui de l'Espagne, & moins humide que celui d'Angleterre; il est donc beaucoup plus favorable aux bêtes à laine auxquelles les grandes chaleurs & les grandes humidités sont très-nuisibles. Nous pouvons, par conséquent, espérer d'avoir en France des laines aussi belles, & peut-être plus parfaites qu'en Espagne ou en Angleterre. Les expériences de M. Daubenton nous ont déjà mis sur la voie, mais ce n'est qu'avec du temps, des recherches & du travail que nous pouvons nous mettre en possession de ce trésor, plus réel que la Toison d'or qu'allèrent conquérir les Argonautes.

SUR UNE MACHINE À ÉLECTRISER D'UNE NOUVELLE ESPÈCE.

V. les Mém. p. 499.

ON aura toujours lieu d'être surpris, lorsqu'on voudra faire attention à l'énorme lenteur avec laquelle des découvertes de Physique, qui semblent essentiellement liées les unes aux autres se succèdent. Otho de Guericke avoit fait dès la fin du siècle dernier, des expériences électriques avec un globe de soufre; Hauksbée, avoit au commencement de celui-ci employé au même usage un globe de verre. Cependant lorsque M.rs Gray & Dufay reprirent en 1730 * ce travail, ils ne se servirent que de tubes de cristal; & ce ne fut que dix ans après, que quelques Physiciens Alemands, lassés de la fatigue que leur causoient les tubes & de leur peu d'effet, reprirent l'usage des globes, & ce ne fut que de ce moment qu'on connut l'électricité en grand, & pour ce qu'elle étoit réellement.

* *Voyez Hist. 1733, p. 23.*

Les globes n'étoient cependant pas ſans inconvénient, il n'étoit pas toujours aiſé d'en trouver de bien réguliers; de plus il arrivoit aſſez ſouvent qu'ils ſe caſſoient & bleſſoient ceux qui les frottoient, ou même les aſſiſtans: rien n'étoit plus facile à parer que cet inconvénient; ce n'étoit pas la figure ſphérique des globes qui produiſoit l'électricité, & cette ſeule réflexion conduiſoit naturellement à penſer, qu'en ſuppoſant ces globes infiniment aplatis dans le ſens de leur équateur, on en feroit un plateau de glace qui conſerveroit la même vertu ſans avoir les mêmes inconvéniens.

Cette idée ſi ſimple & ſi naturelle ne s'eſt cependant préſentée à l'eſprit des Phyſiciens, qu'après qu'ils ont eu éprouvé pendant vingt-ſix ans le danger & l'incommodité des globes; ce n'a été qu'en 1766 qu'on a fait en Angleterre des machines électriques, compoſées d'un plateau de verre, monté ſur un arbre avec une manivelle, & tournant au milieu de deux montans de bois, contretenus par en haut au moyen d'une traverſe, entre leſquels il y a des couſſins pour frotter ce plateau. Ces machines ſont très-ſimples, ne font courir aucun riſque aux Acteurs ni aux Spectateurs, & donnent cependant une électricité auſſi forte que les machines à globe, qui ſont d'un volume bien plus conſidérable.

Voici une nouvelle perfection, ajoutée à cette machine par M. le Roy; mais avant que de la décrire il eſt néceſſaire de rappeler au lecteur quelques principes pour mieux faire entendre ſon uſage.

Selon M. Franklin, dont M. le Roy adopte, avec la plupart des Phyſiciens, la théorie, le fluide électrique eſt un fluide ſubtil, élaſtique, & tenant beaucoup de la nature du feu, qui eſt répandu dans tous les corps, excepté peut-être dans le verre. Si donc on peut parvenir à augmenter la quantité de fluide électrique contenu dans un certain corps, il eſt clair que ce fluide élaſtique tendra à s'en échapper, & à pénétrer dans ceux des corps voiſins qui lui offriront un libre paſſage; & c'eſt ce qu'on nomme électriſer *en plus*, ou *par condenſation*; & qu'au contraire ſi on diminue cette

quantité dans un corps, le fluide électrique tendra à s'y porter, c'est ce qu'on nomme *électriser en moins*, ou par raréfaction: ce sont les deux seules manières dont on peut produire les phénomènes électriques.

Cette condensation s'opère par le moyen du verre ou du soufre & des résines, animés l'un & l'autre par le frottement; le verre qui contient peu de cette matière, attire puissamment celle que contiennent les corps qui le frottent, & le soufre qui en contient beaucoup, fait passer une grande partie de la sienne dans le corps frottant.

De ce que nous venons de dire, il résulte, que tout globe frotté, soit de verre, soit de soufre, communique à la fois l'électricité *en plus* & *en moins;* mais avec cette différence, que le globe de verre raréfie le fluide électrique dans le coussin, ou tout autre corps qui le frotte, & par conséquent l'électrise *en moins*; & qu'au contraire il le condense dans le conducteur & l'électrise *en plus*.

Il n'est pas difficile de s'assurer de l'état du corps électrisé *en plus* ou *en moins:* si le corps est électrisé en plus ou par condensation, le fluide électrique qui en sort avec rapidité paroît dans l'air sous la forme d'une aigrette lumineuse; & si on lui présente un corps métallique pointu, ce même fluide sorti du premier corps, & se précipitant dans le second y produit un petit point rond, lumineux. Le contraire arrive si ce premier corps a été électrisé *en moins;* car alors il n'offre à sa pointe qu'un point lumineux, & les pointes métalliques qu'on lui présente donnent de belles aigrettes.

L'inspection de la machine à plateau, fit penser à M. le Roy qu'il étoit facile de la mettre, avec un léger changement, en état de produire à volonté l'électricité *eu plus* & l'électricité *en moins*.

Ce changement consiste à ôter les coussins placés entre les deux jumelles, & à les faire porter par un support de verre, afin de pouvoir les isoler à volonté; ce support est surmonté par un ressort à deux branches qui porte les coussins, dont on règle avec deux vis la pression sur le plateau:

à l'aide de ce léger changement, on peut à volonté faire communiquer par la machine, l'électricité *en plus* & *en moins* ſéparément; lui faire produire les deux électricités à la fois, ou enfin la faire travailler très-vivement ſans qu'elle en opère aucune.

Pour obtenir l'électricité *en plus*, une perſonne poſera la main ſur le conducteur de la machine, cenſé appartenir aux couſſins, ou on le fera communiquer avec le plancher à l'aide d'un fil de fer ou de laiton; alors, comme ce conducteur des couſſins communique avec eux par une chaîne métallique, le plateau mis en mouvement en tirera l'électricité avec abondance, & la condenſera dans l'autre conducteur qui eſt iſolé, & ce dernier donnera toutes les marques de l'électricité *en plus*.

Veut-on avoir l'électricité *en moins*, on laiſſera les couſſins & le conducteur auquel ils communiquent, iſolés, &, ſoit à l'aide de la main d'une perſonne, ſoit par le moyen d'un fil de métal, on fera communiquer l'autre conducteur au plancher; alors le plateau étant en mouvement, pompera le fluide électrique du conducteur avec lequel les couſſins communiquent, qui étant par conſéquent iſolé, ſera électriſé *en moins*; & en préſentera les phénomènes; & ce plateau fera paſſer ce même fluide dans l'autre conducteur, qui ne ſera pas pour cela électriſé *en plus*, parce que ce fluide ne peut s'y condenſer, ſe diſſipant continuellement au moyen de la communication avec le plancher.

Nous avons dans tout ce que nous venons de dire, donné le choix d'employer une perſonne ou un fil de métal pour faire communiquer les conducteurs avec le plancher; & ce n'eſt pas ſans raiſon que M. le Roy inſiſte ſur cette alternative. Pluſieurs perſonnes ont prétendu que le corps animal étoit bien plus propre qu'aucun autre à ſervir de conducteur à l'électricité, ſuppoſant que le fluide électrique étoit le même que le fluide nerveux; d'où il ſembloit réſulte que cette propriété diſparoiſſoit dans l'animal mort: toutes ce aſſertions ſans preuves ont été démenties par les expérience

de M. le Roy, car il s'est bien assuré que le corps animal ne doit la propriété de transmettre facilement le fluide électrique, qu'à la quantité de tuyaux remplis de fluide aqueux dont il est composé, & que les animaux récemment morts, jouissent du même avantage.

On avoit été plus loin, on avoit assuré que les Eunuques ne pouvoient ni transmettre, ni recevoir la commotion de Leyde; mais cette assertion est également détruite par l'expérience que M. le Duc de Chartres, dont le zèle & l'amour pour les Sciences est connu de tout le monde, a voulu qui fût faite en sa présence. Il assembla pour cet effet plusieurs personnes, entre lesquelles il y avoit des gens de cette espèce, tirés de la Musique du Roi; & on fit une chaîne pour leur faire recevoir la commotion, ils la reçurent aussi vive que les autres, & la communiquèrent parfaitement; revenons à la machine & à ses effets.

Nous venons de voir qu'elle pouvoit donner séparément les deux électricité *en plus* & *en moins*; elle peut les donner toutes deux à la fois; il ne s'agit pour cela que de laisser les deux conducteurs isolés, alors celui qui communique avec les coussins s'épuisera, & le fluide que le verre lui aura dérobé se trouvera condensé dans l'autre; & ils donneront chacun les marques de leurs différentes électricités.

Par la même raison, si au moyen d'un fil de métal, on fait communiquer les deux conducteurs, on aura beau tourner le plateau, on n'apercevra pas la plus petite marque d'électricité; le fluide électrique passant alors sans effort, d'un conducteur dans l'autre, son équilibre ne sera point troublé, & il ne produira aucun effet.

Il n'est point de phénomène des deux électricités, qu'on ne puisse produire à l'aide de cette machine, & rien n'est plus propre à éclaircir tous les doutes qu'on peut avoir sur cette matière. C'est un véritable présent que fait M. le Roy à tous les Physiciens électrisans; mais ce que nous ne pouvons passer sous silence, c'est la candeur avec laquelle il rend justice à M. Musnier, mort depuis la lecture de ce Mémoire,

& qui avoit fait exécuter une machine du même genre d'après les idées que cet Académicien lui avoit communiquées.

OBSERVATIONS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE.

I.

LE 8 Mars 1772, M. le Marquis Turgot étant sur le midi, aux Bretignoles près Chinon, & causant au second étage avec une autre personne, tout étant alors fort tranquille dans la maison, ils se sentirent soulever sur leurs chaises par deux secousses qui se succédèrent très-promptement, & dont le mouvement étoit vertical; le vent étoit au Nord-est & assez fort: ils entendirent alors très-distinctement un bruit sourd comme d'une explosion éloignée, & cependant assez forte, une autre personne qui étoit debout au premier étage, vit & entendit remuer un grand secrétaire à dessus de marbre, & entendit aussi le même bruit sourd que M. Turgot avoit entendu; deux heures après, le Procureur du Roi des Eaux & Forêts de Chinon arriva aux Bretignoles, & leur dit, qu'étant chez lui à Chinon, aux environs de midi il avoit entendu un bruit semblable à celui d'une voiture qui auroit roulé fort vîte, qu'il avoit aussitôt ouvert sa porte & n'avoit rien aperçu qui ressemblât à un équipage; étant à un rez-de-chaussée il avoit dû mieux entendre le bruit souterrain, & moins ressentir les secousses.

II.

Le 27 Juin 1772, il y eut à Saint-Omer, un orage considérable, le tonnerre tomba sur un sentinelle, & le tua; il étoit debout dans sa guérite, qui n'a été ni brûlée ni endommagée, à l'exception d'un petit éclat qu'on y a aperçu; il sembloit avoir été labouré de la tête aux pieds par quelque chose qui lui avoit fait des égratignures & déchiré ses

habits ſans aucune marque de brûlure; à l'ouverture du corps on n'a rien trouvé d'endommagé: ce détail eſt tiré d'une lettre de M. Fougeroux de Blavau, Ingénieur du Roi à Saint-Omer, Correſpondant de l'Académie, à M. Fougeroux ſon frère.

III.

Le pavé de l'égliſe de Notre-Dame a ſervi de repaire à pluſieurs nivellemens & à pluſieurs opérations importantes*. M. Fourcroi de Ramecourt, Ingénieur du Roi & Correſpondant de l'Académie, étant à Paris pendant l'été de 1772, remarqua en paſſant dans cette égliſe, que l'on finiſſoit de repaver les nefs à neuf; heureuſement l'ancien pavé n'étoit pas encore démoli au bas de l'eſcalier des tours, mais il alloit l'être, M. Fourcroi crut qu'il ſeroit utile au Public, & par conſéquent agréable à l'Académie, de comparer le niveau de l'ancien pavé à celui du nouveau & d'en conſtater la différence, & il s'adreſſa à M. l'Abbé de Montjoye, Chanoine & Chefecier de Notre-Dame, qui entra parfaitement dans ſes vues, & lui procura ſur le champ les ouvriers de l'égliſe pour cette opération, dont voici le réſultat.

* V. anc. Acad. T. IV, p. 693. Mém. 1742, p. 371. Mém. 1762, p. 364.

M. Fourcroi trouva que le nouveau pavé de marbre noir & blanc qu'on a mis dans cette Cathédrale, étoit établi exactement de ſix pouces plus bas que l'ancien pavé, qui avoit ſervi de repaire dans les nivellemens que nous avons cités au commencement de cet article. Quoique les caves ſépulcrales qui ont été conſtruites ſous l'égliſe, paroiſſent à M. Fourcroi, capables de donner une grande ſolidité au nouveau pavé, cependant comme on a toujours à craindre quelque mouvement de la part des nouvelles conſtructions, il crut devoir attacher ce repaire à quelque partie du bâtiment de l'égliſe, vraiſemblablement plus invariable.

Dans cette vue il obſerva que la porte par laquelle on entre de la nef dans la tour ſeptentrionale, au lieu d'être ceintrée, eſt couronnée d'une plate-bande formée d'une ſeule grande pierre qui porte ſur les deux pieds-droits de la baie; & il trouva que le deſſous de cette pierre étoit élevé au-deſſus

du nouveau pavé, de six pieds, trois pouces, dix lignes; & au-dessus de l'ancien pavé, de cinq pieds, neuf pouces, dix lignes : ce nouveau repaire semble être, autant qu'il est possible, à l'abri de tous les accidens qui pourroient en altérer la justesse, le bâtiment des tours de Notre-Dame doit avoir fait son effet il y a long-temps; l'Académie a cru devoir publier cette opération de M. Fourcroi avec quelque détail, en faveur de ceux qui voudroient fonder quelques opérations sur les anciens nivellemens, qui faute d'être instruits de ce changement, auroient nécessairement trouvé une différence de six pouces, dont ils n'auroient pu soupçonner la cause.

IV.

Tous ceux qui se servent du crayon de mine de plomb pour dessiner l'architecture, la fortification, &c. emploient la mie de pain pour effacer les traits de ce crayon, qui servent, pour ainsi dire, de bâtis au dessin; M. Magalhaens, ou comme nous le prononçons en françois, Magellan, Correspondant de l'Académie, digne & dernier héritier du nom du célèbre Navigateur qui a découvert le passage de l'Océan dans la mer du Sud, a proposé un moyen plus efficace, qu'on peut porter toujours avec soi, c'est un morceau de caoutchouc, ou résine élastique de Cayenne; le frottement de cette résine enlève bien mieux que la mie de pain les traits de crayon & toutes les autres saletés qui se trouvent sur le papier.

V.

Le 20 Avril 1772, le P. Cotte, de l'Oratoire, Correspondant de l'Académie, étant à Montmorency, aperçut, vers les cinq heures du soir, le ciel se couvrir subitement, & peu de tems après il tomba de la neige avec autant d'abondance qu'au mois de Janvier; un coup de tonnerre éloigné qu'il avoit entendu ce même jour à trois heures & demi, pendant qu'il tomboit de la neige, lui fit soupçonner que cette nuée de cinq heures pouvoit bien être une nuée d'orage, que le froid de l'atmosphère avoit convertie en neige avant qu'elle se fût convertie en eau; il lui étoit trop aisé

aisé de s'en éclaircir pour qu'il pût négliger de le faire: il avoit une pointe électrique établie dans sa maison, il alla consulter le conducteur, & vit qu'il ne s'étoit pas trompé dans sa conjecture; pendant deux ou trois minutes que dura cette opération, il ne cessa de tirer, non des étincelles, mais des aigrettes que le grand jour empêchoit de voir, mais qui se faisoient reconnoître par le souffle qu'éprouvoit son doigt, par l'espèce de sifflement qu'elles faisoient entendre, & par l'attraction & la répulsion des corps légers qu'il leur présentoit; elles étoient semblables à celles qu'on tire en présentant à un globe de verre électrique, un morceau de métal emmanché dans un bâton de soufre; phénomène qui prouve bien que le nuage étoit électrique, mais que son électricité étoit différente de ce qu'elle est ordinairement lorsque le nuage se résout en pluie, car dans ce dernier cas les étincelles sont très-vives, très-piquantes, & souvent accompagnées d'assez fortes commotions.

Cette observation n'a fait que confirmer le P. Cotte dans l'idée où il étoit, que la pluie tombant d'une nuée orageuse, étoit un véritable conducteur d'électricité, & qu'en mouillant les pointes destinées à recevoir, & à nous transmettre l'électricité des nuées, elle leur transmet ce fluide. Si dans le cas présent l'électricité a paru moindre, c'est selon lui, que la neige tombant en flocons séparés, & beaucoup plus rares que les filets d'eau d'une pluie, ne peut transmettre qu'une bien moindre quantité de ce fluide; mais que c'est toujours en qualité d'eau, sous quelque forme qu'on la considère, qu'elle transmet l'électricité des nuées orageuses & celle de l'air, aux pointes disposées pour la recevoir.

VI.

On connoît depuis long-temps les Aimans artificiels, composés de barreaux ou de lames de fer aimantées: l'Académie a rendu compte au Public des procédés par lesquels M.rs Knigt, Antheaume, du Hamel, Mitchell, Canton, &c. sont parvenus à donner à l'acier trempé une force magnétique très-considérable; voici encore une nouvelle perfection

ajoutée à cet art. M. l'Abbé le Noble, Chanoine de Vernon, a fait voir à l'Académie des aimans artificiels de sa façon, dont la force étoit extrêmement supérieure à celle de tous les aimans artificiels qu'on avoit vus jusqu'ici: un de ces aimans qui pesoit à peine deux livres, soutenoit un poids de quarante livres, attaché à son porte-poids; un autre qui ne pesoit que neuf livres, deux onces, a porté, en présence de l'Académie, cent cinq livres; un troisième, fait d'une seule lame tournée en fer-à-cheval, & qui pesoit environ deux onces, a porté jusqu'à quatre livres, six onces: cette force énorme n'est dûe à aucun procédé nouveau, M. l'Abbé le Noble avoue qu'il ne s'est servi que de ceux qui étoient déjà connus, mais elle vient de l'attention qu'il a donnée au choix de l'acier dont il compose ses barreaux & ses lames, à leur trempe, à la forme de leur assemblage, & enfin aux proportions des armures avec le tout; article extrêmement essentiel & pour lequel on n'a pas encore de règle précise. Ces objets occupent depuis long-temps M. l'Abbé le Noble, les résultats de ses recherches ont fait voir qu'il avoit fait, sur ce point, des observations utiles & des découvertes propres à conduire ce genre de travail à sa perfection.

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires:

V. les Mém. p. 619.

Les observations Botanico-Météorologiques, faites à Denainvilliers, près de Pluviers en Gâtinois, en 1771, par M. du Hamel.

P. 157.

Et les Recherches sur la Variation horizontale de l'Aimant, par M. le Monnier.

CETTE année, M. l'Abbé Rosier publia dans son Journal d'observations sur la Physique, sur l'Histoire naturelle & sur les Arts & Métiers, la traduction d'un ouvrage Anglois de M. Priestley, intitulé: *Manière d'imprégner l'eau d'air fixe &*

de lui communiquer les propriétés de l'Eau de Pyrmont & de toutes les Eaux minérales qui sont connues sous le nom d'acidules *ou* aëriennes.

Le but que s'est proposé M. Priestley en publiant cet Ouvrage, a été de faciliter les moyens d'employer l'air fixe contre les maladies qui viennent de corruption, & sur-tout contre le scorbut de mer, en donnant un moyen sûr & prompt de se procurer en peu de temps une assez grande quantité d'eau très-chargée de cette matière.

Pour y parvenir, il met dans une bouteille, de la craie avec assez d'eau pour la couvrir, sans la surnager; cette bouteille est fermée d'un bouchon de liége percé, qui contient un tuyau de verre, ou recourbé ou flexible, parce qu'il est de deux parties, unies avec un morceau de vessie; ce tuyau recourbé se plonge dans une cuvette pleine d'eau, & va porter son orifice dans une bouteille pleine d'eau, renversée dans cette cuvette; on débouche alors la première bouteille, & après y avoir introduit un peu d'huile de vitriol sur la craie & sur l'eau, on y remet le bouchon; il s'excite alors une forte fermentation, & il se dégage de la craie beaucoup d'air fixe, qui enfilant la route du tuyau, va se rendre dans la bouteille renversée, dans laquelle il fait descendre l'eau pour se loger en haut; lorsque la bouteille renversée sera à moitié pleine de cet air, on la secouera, & l'eau l'absorbera en entier, & remontera jusqu'au fond de la bouteille renversée: cette opération répétée une seconde fois, & s'il en est besoin, une troisième, imprégnera l'eau qu'elle contient, de tout l'air qu'elle peut prendre: alors on la mettra le plus tôt possible, dans des bouteilles bien bouchées & gaudronnées pour pouvoir s'en servir au besoin.

Comme on auroit pu soupçonner que dans la matière absorbée par l'eau, il se seroit introduit une portion d'huile de vitriol volatilisée par l'opération, M. Priestley a mis en usage tous les moyens que prescrit la Chimie pour reconnoître la présence de cet acide, mais il n'a pu en apercevoir la plus foible marque. Le reste de l'Ouvrage est employé

à expliquer l'uſage de l'air fixe employé, ſoit en vapeur par la reſpiration, ſoit en boiſſon, ſoit enfin en lavement, & à rapporter quelques cas où il a été donné avec ſuccès de ces trois manières: l'Auteur ajoute enſuite, avec raiſon, que la qualité piquante des eaux acidules eſt exactement dûe à l'air fixe qu'elles contiennent, mais nous ne pouvons nous diſpenſer de dire, qu'il s'eſt trompé en donnant M. Brownrigg pour le premier qui ait eu cette idée; l'éditeur s'eſt juſtement élevé contre lui dans une note qu'il a miſe à ce ſujet. Il y a plus de vingt ans que M. Venel a communiqué cette même explication à l'Académie, dans un Mémoire imprimé dans le ſecond volume des Savans étrangers *, dans lequel même il donne le moyen de communiquer à une eau quelconque, la propriété de pétiller & de faire ſauter le bouchon; théorie dont l'Éditeur donne une idée ſuffiſante dans un extrait de l'Ouvrage de M. Venel, qu'il joint à ſa traduction.

* Sav. étr. T. II, p. 53 & 80.

Une autre de ſes notes, que nous ne pouvons omettre, eſt celle dans laquelle il déclare au Public, que c'eſt au zèle de M. Trudaine & à ſon amour pour les Sciences, que le Public françois doit la traduction de cet utile Ouvrage de M. Prieſley.

ANATOMIE.

OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

M. Henckel, Chirurgien-major des Gardes de Sa *Majesté* Prussienne, a communiqué à M. Morand l'observation suivante. Une femme étant accouchée à terme, il se présenta avec le placenta & les membranes ordinaires, une enveloppe particulière, contenant un fœtus de la longueur de deux pouces, attaché au placenta, & dans lequel on observa les particularités suivantes. Ce fœtus étoit absolument sans tête, on y trouvoit les os tendres de la poitrine; on voyoit au côté gauche une espèce de main, dans laquelle on ne distinguoit que le pouce & un autre doigt; à la partie extérieure & inférieure du bassin, on apercevoit un petit corps comme le membre sexuel d'un garçon, les extrémités inférieures étoient dans l'état naturel, à cela près, que les pieds étoient retournés en haut, on n'y distinguoit que le pouce & deux doigts: il seroit superflu d'ajouter que ce fœtus si mal conformé étoit mort; mais cependant il avoit vécu assez pour que ce bizarre développement se fût fait; & comment avoit-il pu vivre un seul instant avec une conformation aussi défectueuse que celle que nous venons de décrire?

II.

Il naquit le 5 Octobre 1772 à Montmirail, un enfant monstrueux, qui n'avoit ni crâne, ni cervelle, ni cervelet, qui cependant vint au monde vivant, & vécut environ huit heures;

l'ouverture en fut faite en présence de M. le Marquis de Courtanvaux & de M. Jeaurat, tous deux de cette Académie, par M. Pinson, Chirurgien attaché à ce Seigneur; & voici ce qu'on y remarqua: la tête ressembloit à une tête de veau, dont le crâne auroit été enlevé, elle étoit absolument dépourvue de la calotte osseuse & de la peau qui auroit dû la recouvrir; la dure-mère n'existoit que dans la partie qui tapisse la base du crâne, & ne paroissoit nullement dans la partie supérieure qui étoit découverte, la pie-mère seule recouvroit, non le cerveau ni le cervelet, mais ce qui en tenoit la place, & qui étoit composé de diverses cellules qui contenoient, les unes une certaine quantité d'eau roussâtre, mêlée de quelques petites portions médullaires, & les autres du sang noirâtre; la moelle épinière étoit en assez bon état, toutes les parties de la face du côté gauche étoient plus saillantes & plus élevées que celles du côté droit, le nez étoit très-aplati, les nerfs olfactifs, & presque tous ceux des yeux étoient en grande partie détruits, & ceux qui existoient étoient beaucoup plus petits que dans l'état naturel, les deux pariétaux manquoient, le coronal étoit changé en deux espèces de bandes osseuses, les os de la face avoient de même éprouvé un grand dérangement, la langue étoit attachée aux gencives de la mâchoire inférieure, & elle n'eût jamais pu faire aucun mouvement; les muscles crotaphites manquoient en partie, & ce qui en restoit étoit extrêmement gorgé de sang, de même que la glande parotide du côté droit, le reste étoit dans l'état naturel. Il paroît que la plus grande partie des organes qui manquoient à cette singulière tête avoit existé, mais avoit été étrangement altérée, sans qu'on puisse assigner les causes de ces altérations; au reste cet exemple n'est pas unique, & l'Académie en a déjà publié deux à peu-près pareils, tous deux communiqués par M. Méri, l'un en 1704 [a], & l'autre en 1712 [b].

[a] V. Hist. 1704, p. 24.
[b] V. Hist. 1712, p. 40.

III.

M. Perret, maître Coutelier à Paris, & bien connu du

Public & de l'Académie par la description de son art, lui a présenté l'observation suivante: En 1767, une chatte qu'il avoit fit des petits, desquels il ne réserva qu'un chat mâle: on sait que ces animaux naissent les yeux fermés, & ne les ouvrent ordinairement qu'au bout d'environ neuf jours, mais on aperçoit la séparation des paupières; M. Perret fut étonné de n'en point apercevoir à son petit chat, il pressa légèrement avec le doigt, & crut sentir le globe de l'œil bien formé, & il abandonna l'animal aux soins de la Nature, persuadé qu'elle trouveroit quelque moyen de suppléer à ce défaut; il se trompoit cependant, & voyant que le temps s'écouloit sans aucun changement, & que même la mère refroidissoit ses soins, il entreprit de réparer ce vice de construction, par une opération chirurgicale; ayant donc bien assujetti le petit animal, il traça avec du crayon sur la paupière, la route de l'instrument tranchant, il saisit ensuite avec des petites pinces, la peau qui couvroit le globe de l'œil, & la souleva pour mettre ce globe à l'abri de tout accident, & soulevant toujours la peau, il fit l'opération en deux temps; il fit ensuite la même opération à l'autre œil, il ne sortit exactement que deux gouttes de sang, & il abandonna le pansement aux soins de la mère, qui reprit pour son petit toute la tendresse maternelle, dont l'état de cet animal avoit amorti la vivacité, & en le lèchant elle parvint à cicatriser les deux plaies; le petit chat fut trois jours sans voir, mais au quatrième on s'aperçut en lui passant une plume devant les yeux, qu'il commençoit à voir les objets. Jamais les bords des paupières n'ont eu ce rebord velouté & noirâtre qu'ont ordinairement les chats, ils étoient au contraire d'un blanc sale. Il auroit été sûrement curieux de voir ce qui seroit arrivé par la suite à cet animal, mais M. Perret avoit négligé de lui faire une autre opération, faute de laquelle il alla courir les gouttières & ne revint plus. L'Académie a cru devoir publier ce fait, parce que la même conformation peut se trouver dans l'homme, & qu'il est bon de savoir qu'en pareil cas, l'Art peut en prenant les précautions nécessaires, offrir une ressource assurée.

IV.

M. Houſſet, Docteur en Médecine de la Faculté de Médecine de Montpellier, de la Société Royale des Sciences de la même Ville, a mandé à M. Macquer, qu'à Auxerre, lieu de ſa réſidence, il avoit aſſiſté à l'ouverture du cadavre d'une petite fille, née à terme, au mois de Décembre 1768, & morte trois ou quatre minutes après ſa naiſſance, dans laquelle il avoit remarqué les ſingularités ſuivantes.

Cet enfant n'avoit d'autre apparence de feſſes que trois rayes, dont deux latérales & ſemi-circulaires; & une longitudinale placée au milieu, qui marquoit l'intervalle qui doit être entre ces parties, & s'étendoit juſque vers l'endroit où auroit dû être l'anus; elles étoient gravées légèrement ſur une tumeur conſidérable, liſſe, polie, blanche & pâteuſe au toucher, qui commençoit à la quatrième vertèbre des lombes incluſivement, & alloit toujours en croiſſant, juſqu'à la ſymphyſe des os pubis; de manière qu'elle rempliſſoit la ſinuoſité profonde, qui, dans l'état naturel, ſépare les deux feſſes; l'anus étoit en devant au-deſſus de la ſymphyſe du pubis, quatre à cinq lignes plus haut étoit la vulve, & beaucoup plus haut le nombril placé près du cartilage xiphoïde.

Tel étoit l'état des parties externes; M. Houſſet ayant fait ouvrir la tumeur, il en ſortit une grande quantité d'eau mêlée de particules graiſſeuſes, qui entouroit une maſſe de ſang caillé nullement altéré; cette maſſe occupoit la place qu'auroient dû tenir les muſcles feſſiers; deſſous ce ſang on apercevoit à droite & à gauche deux tumeurs rondes, raboteuſes, dures, cartilagineuſes, tenant aux os iſchion, & ne formant avec eux qu'un corps, & qui renfermoient dans leur cavité, unie & luiſante, une petite cuillerée d'eau très-limpide; M. Houſſet fit ouvrir l'anus, penſant que le déplacement de cette ouverture avoit été cauſé par la préſence de la tumeur; il ſe trompoit cependant, l'inteſtin alloit droit, de la capacité du ventre, à l'ouverture placée au-deſſus du pubis. Il ſeroit peut-être bien difficile d'aſſigner une cauſe probable à un dérangement de cette eſpèce.

V.

V.

M. le Marquis de Courtanvaux étant à Montmirail, y fit l'obſervation ſuivante: Marie Prudhomme, âgée de ſoixante-quatorze ans, & habitante à Montmirail depuis ſon enfance, s'aperçut en 1771, d'un petit bouton qui lui venoit à la partie moyenne & latérale du nez, ſur la partie moyenne du muſcle releveur de l'aile du nez & de la lèvre ſupérieure, dont les attaches ſont à l'extrémité de l'apophyſe naſale de l'os maxillaire, à l'aile du nez & à la partie voiſine de la lèvre ſupérieure, où il ſe confond avec l'orbiculaire des lèvres; au bout de quelques jours le bouton changea de forme & devint une excroiſſance qui augmenta en longueur juſqu'au commencement de Février: pendant tout ce temps le bouton étoit douloureux, mais il s'eſt enſuite endurci & a pris peu-à-peu la forme d'un ergot de coq d'environ un pouce de long, dont la concavité étoit tournée vers le nez; il n'y avoit plus alors de ſenſibilité dans cette partie qui continuoit toujours de s'endurcir. Un Charlatan qui paſſa par-là, & auquel elle ſe confia, entreprit de la délivrer de cette incommodité, en liant cet ergot avec de la ſoie; mais dans la crainte de cauſer de la douleur à la malade, au lieu de porter la ligature à la baſe, il la fit ſur la partie dure, où elle ne produiſit aucun effet, & lui défendit bien de le faire couper; malgré cette défenſe, M. Pinſon, dont nous avons déjà parlé dans les articles précédens, & qui étoit avec M. le Marquis de Courtanvaux, lui perſuada de le faire extirper, & l'emporta en effet dans un inſtant, preſque ſans douleur, & ſans aucune perte de ſang.

VI.

M. Cadet a communiqué à l'Académie, une obſervation très-ſingulière: une jeune demoiſelle, de Troyes en Champagne, âgée de onze ans, délicate, mais juſqu'alors peu ſujette aux maladies, d'une taille avantageuſe pour ſon âge, ayant les dents & les gencives fort ſaines, & l'action libre & aiſée, éprouva en 1769, des nauſées & des douleurs d'entrailles, accompagnées de quelques défaillances. Les plus habiles

Médecins qui furent appelés, s'en prirent à son estomac, la traitèrent en conséquence, & les accidens cessèrent : quelque temps après elle éprouva une demangeaison à la narine gauche ; ce qui fit juger qu'elle avoit des vers, & on lui administra les remèdes usités en pareil cas, qui ne produisirent aucuns des effets qu'on en attendoit : la malade fut ensuite affectée d'une douleur gravative sur l'extrémité de la poitrine, elle s'étendoit d'un sein à l'autre, & elle étoit accompagnée d'une douleur vive au haut du bras ou de l'omoplate. C'est ici, à proprement parler, que commence l'histoire de la maladie. On aperçut alors un léger écoulement par la mamelle gauche, d'une liqueur claire & limpide ; le lendemain cet écoulement fut si fort, qu'il perça en moins de trois heures les compresses à huit doubles qu'on avoit mis sur le sein, & tous les habits de la malade, & il dura depuis le 20 Décembre 1770, jusqu'au 6 Janvier 1771 : pour lors la respiration, qui jusque-là avoit été un peu gênée, devint libre, on purgea la malade, & l'appétit qu'elle avoit perdu lui revint : l'écoulement fut sept jours sans reparoître, mais il reparut le 14 Janvier, plus abondant qu'il n'avoit été, quoique la douleur du bras fût moindre ; la malade fut purgée, & l'écoulement cessa pendant quatre jours, mais il fut suivi d'un accès de fièvre qui dura cinq à six jours, pendant lequel la langue parut chargée, la tête pesante, le ventre tendu, & il survint même un petit engourdissement dans tout le corps ; le 4 Février 1771, la malade ressentit à la mamelle un mouvement qui annonça le flux de liqueur, il fut si prompt qu'on n'eut pas les temps de la déshabiller, il perça toutes les compresses & les habits, & jaillit même jusque sur le tablier.

Jamais cet écoulement n'a paru la nuit, ni lorsque la malade a été couchée ; à l'exception cependant du 8 Février, où il arriva le matin dans le lit, mais il fut alors très-médiocre. Dans le voyage qu'elle fit de Troyes à Paris, & qui dura deux jours, l'écoulement n'a eu lieu qu'une seule fois, & en petite quantité ; mais le 11 du même mois il reparut d'abord à une heure & demie, & ensuite à quatre heures

& demie après midi, & en telle abondance, qu'en très-peu de temps on obtint huit onces ou un demi-ſetier de ce fluide; & le 12 elle en rendit aſſez en un quart-d'heure pour qu'il s'en trouvât la hauteur d'un demi-pouce dans un vaſe de onze pouces de circonférence; il y eut cette fois du mal-aiſe, de l'oppreſſion & de la douleur dans la mamelle gauche, par où ſe faiſoit l'écoulement; quelques jours après elle rendit un peu de matière gluante & écumeuſe, & quelques gouttes de ſang.

Cette eau envoyée par M. le Marquis de Voyer, à M. Cadet, a été ſoumiſe à l'analyſe; mais de quelque manière qu'il s'y ſoit pris, elle n'a décelé aucun mélange, & on peut la regarder comme une eau pure, & très-peu chargée de matières étrangères.

M. Lorry, célèbre Médecin de la Faculté de Paris, & l'un de ceux qui ont ſuivi cette maladie, a remarqué que la malade tranſpiroit très-peu, & que ſa peau étoit très-sèche, qu'il ne paroiſſoit aux mamelles ni rougeur, ni tumeur, mais qu'avec une forte loupe, le mamelon gauche paroiſſoit fendu en croiſſant, & il ſuppoſe que cette ouverture eſt l'extrémité du canal qui pompe & ſuce avec violence, l'eau qui ſe trouve infiltrée au voiſinage de ces parties, car il ne penſe pas qu'il y ait un réſervoir qui la contienne; auſſi a-t-il obſervé qu'il s'excite pendant l'écoulement, un érétiſme dans l'épaule & dans le bras.

La ſingularité de ce fait devoit naturellement engager les Phyſiciens à rechercher s'il ne s'en trouveroit pas un pareil dans les faſtes de l'Anatomie; la magnifique bibliothèque de M. le Marquis de Paulmy lui en a fourni un exemple. Il ſe trouve dans un Ouvrage intitulé, *les Trois Merveilles*, imprimé en caractères gothiques, en 1532, où il eſt fait mention d'une jeune fille de la Romagne, âgée de ſept à huit ans, qui rendoit une liqueur limpide par les mamelles, ſans aucun conduit ou pertuis apparent; cette eau étoit claire & ſans odeur, elle en rendoit quelquefois juſqu'à trois pintes par jour, & elle n'en paroiſſoit nullement incommodée.

M. Coquereau, Médecin de la Faculté de Paris, a appris deux faits semblables de M. Thiesset, Doyen du Collége des Médecins de Troyes: deux jeunes filles avoient eu avant l'âge de puberté, un pareil écoulement par le sein, sans aucune autre incommodité, & cet écoulement avoit cessé à l'apparition des règles.

M. Missa, aussi Médecin de la Faculté de Paris, a fourni à M. Cadet un exemple plus singulier.

Le nommé Martinet, Vigneron de la paroisse de Saint Thierri près de Reims, de taille ramassée, assez gras, d'un tempérament mélancolique, & grand mangeur, rendoit naturellement par le sein gauche, une liqueur laiteuse: ce sein commença à se développer à l'âge de puberté, par les seuls efforts de la Nature, & parvint avec le temps, à égaler celui d'une nourrice; les chaleurs rendoient cet écoulement plus fréquent, & l'augmentoient tellement, que la liqueur qui jaillissoit alors par le mamelon, mouilloit sa chemise & sa veste. Dans les temps froids, où cet écoulement du sein cessoit, ou devenoit beaucoup moindre, il étoit suppléé par des sueurs fétides & abondantes aux aisselles, aux pieds & aux parties naturelles, même par un flux séreux, par la voie des urines ou des selles; au rapport de ce même Vigneron ces incommodes phénomènes l'ont tourmenté depuis leur apparition à l'âge de puberté, jusqu'à l'âge de cinquante-cinq ans, où ils ont absolument cessé.

CETTE année, M. le Vacher de la Feutrie, Médecin de la Faculté de Paris, présenta à l'Académie un ouvrage intitulé: *Traité du Rachitis, ou l'Art de redresser les enfans contrefaits.*

On seroit trop heureux si l'on connoissoit aussi-bien la cause & la curation de cette maladie, qu'on en connoît les terribles effets. Le dérangement de toute l'économie animale, l'affoiblissement du tempérament, des maladies graves, & quelquefois mortelles, sont les malheureux fruits de la maladie dont il est ici question, & dont M. de la Feutrie s'occupe

dans cet ouvrage. Nous allons eſſayer de donner une idée de la route qu'il a ſuivie dans ſes recherches.

Le premier pas qu'il fait, eſt de rechercher l'hiſtoire de cette maladie, & d'en déterminer les différentes eſpèces: quoiqu'elle ſoit probablement auſſi ancienne que le monde, il a feuilleté preſqu'inutilement les Auteurs anciens qui ont traité de la Médecine, & n'y a trouvé aucuns des éclairciſſemens néceſſaires pour parvenir à la curation de cette fâcheuſe maladie; & dans le nombre des modernes qui en ont parlé, le ſeul Gliſſon lui a été utile, encore a-t-il fallu rejeter la fauſſe théorie qu'il en donne, & la plupart des remèdes qu'il preſcrit.

Le travail de M. de la Feutrie peut donc paſſer pour abſolument neuf, & c'eſt ſur ce pied qu'on doit le regarder: on doit cependant lui ſavoir gré des recherches qu'il a faites, on en jugera par la liſte des Auteurs qu'il a cités dans ſon ouvrage, & qui ſe trouve imprimée à la fin.

Il falloit d'abord s'aſſurer ſi le rachitis étoit une maladie de tout le corps, ou s'il n'en occupoit qu'une partie; & il réſulte des recherches de M. de la Feutrie, que ce n'eſt qu'un dérangement de la colonne de l'épine; mais qui entraîne, comme il le fait voir, un déſordre plus ou moins grand & quelquefois général dans toute la machine du corps humain. Ce dérangement de l'épine a des cauſes, & M. de la Feutrie les recherche avec ſoin; il écarte d'abord celles qu'on avoit voulu aſſigner, & en propoſe de plus vraiſemblables: il enſeigne à reconnoître ces cauſes avant même qu'elles aient produit leur effet, & à apercevoir la maladie dès les plus légers ſymptômes qu'elle laiſſe paroître; de-là il paſſe aux indications à remplir pour parvenir à la guériſon de cette maladie, & cette connoiſſance eſt ſuivie de l'examen des remèdes, tant internes qu'externes, qui ont été juſqu'ici employés pour parvenir à la guérir.

Comme toute la théorie de M. de la Feutrie le conduit à penſer que la cure du rachitis conſiſte à remédier au dérangement de l'épine qu'il a fait voir être la cauſe de preſque

tout le désordre dans l'économie animale, qu'on observe dans cette maladie, il examine scrupuleusement tous les moyens mécaniques qu'on a inventés pour forcer en quelque sorte, par des compressions bien ménagées, cette partie à reprendre sa véritable situation, & il fait voir leurs inconvéniens & leur insuffisance; mais il leur substitue une autre machine en forme d'une espèce de fauteuil qui est exempte des inconvéniens qu'il reproche aux autres. Cette machine avoit été inventée par M. le Vacher, frère de M. de la Feutrie, Chirurgien de Paris, qui l'avoit même décrite dans un Mémoire lû à une des Séances publiques de l'Académie royale de Chirurgie: il accompagne la description de cette machine, de celle des brassarts, cuissarts, bottines, &c. destinés à redresser les os des bras, des jambes & des cuisses, lorsqu'ils sont détournés de leur position naturelle. Ces descriptions sont suivies de la manière d'employer ces machines pour la cure préservative, curative, ou palliative du rachitis, du régime & des remèdes qui doivent concourir à en assurer la guérison, & des exemples des guérisons opérées par cette méthode employée avec prudence: car on ne doit rien attendre de la Nature qu'en l'écoutant, la suivant, & sur-tout en évitant de nuire à ses opérations par une précipitation nuisible. Cet ouvrage a paru pouvoir être regardé comme le Traité le plus complet qui ait paru jusqu'ici sur cette matière.

CHIMIE.

SUR

L'ANALOGIE DU ZINC ET DU PHOSPHORE.

V. les Mém, p. 380.

LES proprietés ſingulières du zinc, ſon inflammabilité, ſa réduction en cette matière volatile, cotonneuſe, qu'on nomme ſes fleurs, l'avoient depuis long-temps rendu l'objet des recherches des Alchimiſtes, qui croyoient y trouver la véritable clef de la Philoſophie hermétique; & on auroit beaucoup à regretter leur peine, ſi, dans le nombre des expériences qu'ils nous ont tranſmiſes, il ne ſe trouvoit pluſieurs faits curieux & intéreſſans: mais malgré tous leurs efforts, la connoiſſance de ce demi-métal n'en étoit pas plus avancée, & il étoit réſervé aux Chimiſtes françois d'y travailler avec plus de ſuccès. Les travaux de M.rs Hellot, Geoffroy, Malouin, rapprochés de ceux de M.rs Pott & Margraff, ont été le véritable flambeau qui a porté la lumière ſur la compoſition & la nature du zinc.

Quoique ces célèbres Chimiſtes aient tourné & retourné le zinc en mille manières, la qualité phoſphorique de ce minéral, qualité bien reconnue par Henckel, avoit cependant échappé à leurs recherches. M. de Laſſone en a été frappé; ſes réflexions l'ont conduit à un grand nombre d'expériences, d'où il réſulte la preuve d'une reſſemblance entière entre le phoſphore & ce demi-métal, & qui jettent un grand jour ſur la connoiſſance de ces principes, & ſur leur mixtion intrinſéque ; ce ſont ces recherches qui ſont l'objet du

Mémoire de M. de Laſſone, & dont nous allons eſſayer de préſenter une légère idée.

Le zinc expoſé à un dégré de feu capable de déſunir ſes parties, s'enflamme, fuſe, bouillonne & jette une lumière vive & éblouiſſante. La même choſe arrive au phoſphore, à une chaleur à la vérité beaucoup moindre, parce que, comme nous le verrons bientôt, les mêmes principes qui ſont communs à l'un & à l'autre, ſont bien plus étroitement liés dans le zinc que dans le phoſphore; l'une & l'autre ſubſtance exhale en brûlant une odeur d'ail, toute ſemblable à celle que l'arſenic donne en pareil cas, & cette reſſemblance avoit effrayé pluſieurs Chimiſtes, qui n'oſoient travailler ſans quelque crainte à ces recherches; mais les expériences de M. de Laſſone lui ont appris que ces vapeurs étoient incapables de nuire, qu'elles n'étoient que phoſphoriques, & qu'il falloit que celles qui produiſoient l'odeur d'ail de l'arſenic, entraînaſſent avec elles d'autres parties nuiſibles, dont on ne ſait que trop que ce minéral ne manque pas.

Un autre caractère de reſſemblance entre le zinc & le phoſphore, c'eſt que tous deux ont beſoin du contact immédiat de l'air pour s'enflammer; le zinc eſt ſi conſtamment ſoumis à cette loi, que ſi on n'enlève à chaque inſtant une pellicule calcaire qui le couvre dès qu'il eſt en fuſion, on n'a ni fulguration ni fleurs, & il ſe réduit tout en chaux: la même choſe arrive au phoſphore qu'on tient dans l'eau pour le conſerver, il ſe couvre d'une eſpèce de pouſſière, & ſe diminue; & une preuve que cette pouſſière vient de la décompoſition du phoſphore, c'eſt que l'eau s'empare de l'acide phoſphorique que le phlogiſtique a abandonné, & qu'elle acquiert une qualité acidule qui fait impreſſion ſur la langue.

Voilà bien des points de reſſemblance entre ces deux mixtes, il faut voir préſentement ſi ce parallèle ſe ſoutient, en examinant comment l'action de l'air les décompoſe l'un & l'autre.

Le phlogiſtique dans le phoſphore n'eſt que peu adhérent

à l'acide

à l'acide qui le retient, qui n'a acquis la propriété de le retenir que par la violence du feu qui l'a privé de son humidité; mais comme il a avec l'eau, sur-tout quand elle est réduite en vapeurs, beaucoup plus d'affinité qu'avec le phlogistique, dès que le phosphore est exposé à l'action de l'air, il absorbe avidement l'humidité de l'air, & il résulte de cette absorbtion un mouvement, un bouillonnement qu'on peut observer aisément avec une loupe, le phlogistique alors se dégage & s'enflamme quelquefois, sur-tout si on donne plus de vivacité à ce mouvement intestin, soit par la chaleur, soit par le frottement. Examinons maintenant ce qui arrive au zinc exposé de même à l'air libre; mais avant tout, observons que la Nature a rendu les principes plus adhérens dans le zinc, que l'Art ne l'a fait dans le phosphore, & que dans la composition de ce demi-métal, il entre vraisemblablement quelque substance métallique qui ne se trouve pas dans le phosphore; d'où il suit que ses altérations doivent être moindres & plus lentes à paroître.

Le zinc prend un poli comme les métaux, mais il se ternit à l'air plus promptement qu'eux, il perd son éclat métallique, sa surface devient terne, blanchâtre & terreuse, & elle se couvre d'une vraie chaux; jusque-là il lui arrive, quoiqu'un peu plus lentement, la même chose qu'au phosphore, à cela près, que d'une part le phlogistique s'en échappant avec lenteur & par très-petites parties, ne peut produire aucune fulguration, & que de l'autre l'acide dégagé du phlogistique, ne se montre pas avec son caractère salin; ce que M. de Lassone conjecture être dû à une terre métallique, à laquelle il est uni, & qui le prive du principe aqueux, sans lequel il ne peut avoir la forme saline; idée très-vraisemblable, mais que M. de Lassone ne donne cependant encore que comme une conjecture: nous verrons bientôt d'autres faits qui paroissent tendre à la confirmer.

Nous avons dit qu'on favorisoit la décomposition du phosphore par la chaleur & par le frottement, la même chose arrive au zinc lorsqu'on le tient en fusion, l'acide se

dégage tellement du phlogiſtique qui l'abandonne, qu'il ronge & détruit en très-peu de temps les cuillères ou autres inſtrumens de fer, avec leſquels on le remue; la même choſe arrive lorſqu'on le lime, le ſeul frottement de la lime en fait dégager le phlogiſtique qui donne de la lumière ſi cette opération ſe fait dans un lieu obſcur, & l'acide reſté libre, ronge & détruit la lime en très-peu de temps; on obſerve même que la cadmie des fourneaux, qui n'eſt qu'une concrétion de fleurs de zinc très-chargée de phlogiſtique, donne des étincelles lorſqu'on la bat avec le briquet, ou qu'on l'expoſe à un frottement rapide.

M. de Laſſone ne s'eſt pas contenté de comparer le zinc & le phoſphore par la voie sèche, il a encore voulu employer la voie humide. On ſait que le phoſphore ſe conſerve ordinairement en le tenant plongé dans l'eau d'une bouteille bien bouchée; malgré cette précaution, il ſe décompoſe, très-lentement à la vérité, par le défaut de communication avec l'air extérieur; & une preuve certaine qu'il ſe décompoſe, c'eſt que ſon acide, rendu libre par l'abſence du phlogiſtique qui s'eſt échappé, donne à l'eau une qualité ſenſiblement acidule.

Le zinc mis en limaille dans de l'eau contenue dans une bouteille, ſe décompoſe de la même manière, mais avec cette différence, qu'il s'en dégage beaucoup d'air, & que par conſéquent il faut, pour que la décompoſition continue, que cet air puiſſe s'échapper, ſans quoi l'eau, malgré la loi très-poſitive des affinités, ne peut avoir priſe ſur le zinc, & la décompoſition ceſſe.

Il arrive dans cette opération une choſe ſingulière, & qui prouve bien la réalité de la théorie que M. de Laſſone n'avoit avancée que comme une conjecture; l'acide phoſphorique du zinc dégagé de ſon phlogiſtique, ne paroît pas, ſelon lui, ſous la forme ſaline, parce qu'il eſt joint à une terre qui le prive du principe aqueux, néceſſaire pour paroître ſous la forme de ſel: dans cette opération, l'eau qui a ſervi à la diſſolution du zinc lui rend apparemment quelque partie de ce principe, car elle prend une ſaveur métallique & acerbe

qui eſt préciſément celle que l'acide phoſphorique affoibli, donne à l'eau où il ſe diſſout.

Mais ſi on veut abréger beaucoup l'opération, il faut la faire dans une capſule; le zinc en limaille mis de cette manière avec de l'eau, & ſouvent remué, ſe décompoſe abſolument & ſe réduit aſſez promptement en terre ou en chaux.

M. de Laſſone avoit imaginé qu'en mêlant la limaille de zinc, comme on a fait celle de fer avec le ſoufre, & les humectant aſſez pour en former une pâte, le tout s'échaufferoit & ſubiroit une altération conſidérable; l'expérience n'a pas répondu à cette idée, & ſi la décompoſition du zinc s'eſt faite dans ce cas un peu plus promptement, le ſoufre ne paroît y avoir contribué que comme intermède, en écartant les molécules du zinc, & les préſentant à l'eau ſous une plus grande ſurface.

Plus nous avançons, plus nous trouvons d'analogie entre le zinc & le phoſphore; voici encore un nouveau point de reſſemblance.

Lorſqu'en faiſant fulgurer le zinc, on l'a entièrement réduit en fleurs, on croiroit aiſément que tout le phlogiſtique qu'elles contenoient eſt diſſipé, on ſe tromperoit cependant, les fleurs en cet état en retiennent conſidérablement; M. de Laſſone en a vu qui demeurèrent lumineuſes plus d'une heure dans l'obſcurité; la même choſe arrive au phoſphore décompoſé par une déflagration rapide, il ſe réduit dans une eſpèce de fleurs qui reſtent embraſées, & ne ceſſent de l'être que lorſque les vapeurs aqueuſes de l'air ont abſolument ſaturé ſon acide; ceci même peut ſervir à expliquer comment le zinc réduit en fleurs, & après avoir perdu beaucoup par la déflagration, augmente cependant ſon poids d'un dixième; cet excédant eſt dû ſelon M. de Laſſone à la quantité de vapeurs de l'atmoſphère, dont les fleurs ſe ſont chargées, & qui ſe ſont combinées intimément avec elles.

Il eſt donc bien démontré que le principe phoſphorique contenu dans les fleurs de zinc, y eſt dans deux états différens, une partie s'échappe par la fulguration, & l'autre

reſte encore inhérente aux fleurs, avec une partie du principe ſalin, néceſſaire pour conſtituer le phoſphore. Une preuve que cette matière phoſphorique exiſte encore dans les fleurs de zinc en aſſez grande quantité, c'eſt que M. de Laſſone ayant mis dans un creuſet couvert & luté, de la limaille d'acier & des fleurs de zinc, & les ayant expoſées pendant quatre heures au feu de réverbère, trouva toute ſa limaille convertie en crocus, ou ſafran de mars, auſſi beau que celui qu'on prépare avec le ſoufre, ce qui ne ſeroit certainement pas arrivé en auſſi peu de temps, ſi les fleurs de zinc n'euſſent contenu un principe actif & corrodant qui eût opéré ce changement, & M. de Laſſone ne croit pas qu'on puiſſe douter que ces fleurs ne contiennent un acide phoſphorique très-concentré: Henckel avoit eu à peu-près la même idée. Non-ſeulement l'exiſtence du phlogiſtique dans les fleurs de zinc, eſt prouvée par les expériences que nous venons de rapporter, la couleur olivâtre qu'elles prennent lorſqu'on les vitrifie, en fournit une nouvelle preuve: moins que cela, ſi les ayant miſes dans un entonnoir à filtrer, on les lave avec de l'eau diſtillée, le dedans de la maſſe de fleurs prend une belle couleur bleue, toute ſemblable à celle que prend la chaux azurée de Reſpour, (qui, comme on ſait, eſt compoſée de chaux vive & de ſoufre) ſoumiſe aux mêmes lotions; il y a donc dans les fleurs de zinc une chaux métallique qui tient lieu de la chaux vive, & un acide phoſphorique qui ſupplée l'acide vitriolique du ſoufre, joints au phlogiſtique commun aux deux ſubſtances.

M. de Laſſone n'ajoute plus qu'une ſeule preuve de la reſſemblance qui ſe trouve entre le phoſphore & le zinc, elle eſt tirée d'une expérience de M. Margraff: ce célèbre Chimiſte avoit mêlé avec l'étain d'une part, & de l'autre avec le plomb, le ſel fuſible d'urine, qui eſt comme la matrice du phoſphore; ces mélanges mis au feu dans un vaiſſeau fermé, donnèrent deux ſubſtances métalliques, ſemblables au zinc par les propriétés qui le caractériſent. Donc les principes phoſphoriques peuvent prendre, en ſe combinant, s'altérant & ſe

concentrant, le caractère de la métalléité, pourquoi ce procédé ne seroit-il pas celui de la Nature dans la formation du zinc? on n'est pas communément loin de connoître sa manière d'agir, quand on peut parvenir à l'imiter.

SUR UN MOYEN DE CACHER LE CUIVRE,

Sans que l'alkali volatil puisse le faire reconnoître.

RIEN n'est peut-être plus généralement reconnu en Chimie pour un principe de cette Science, que la propriété qu'a l'alkali volatil de colorer en bleu la dissolution du cuivre, par quelqu'acide qu'elle ait été faite : cette règle cependant n'est pas tout-à-fait sans exception, en voici une que propose M. Cadet, & c'est une vraie découverte en Chimie : nous allons rapporter en peu de mots la circonstance qui lui a donné lieu de la faire.

V. les Mém. p. 472.

Il avoit beaucoup travaillé sur le borax, & le fruit de ses travaux avoit été un régule cuivreux tiré de ce sel, qu'il présenta à l'Académie; on sait cependant que l'alkali volatil ne donne aucune teinture bleue à la dissolution de borax, & M. Cadet voulut voir comment le cuivre qui entre dans la composition de ce sel, pouvoit échapper à l'action de l'alkali volatil.

Le régule cuivreux qu'il en avoit tiré, lui ayant paru avoir une espèce de caractère arsénical, il pensa que l'arsenic pouvoit être ce qui défendoit le cuivre contenu dans le borax, de l'action de l'alkali volatil. Pour parvenir à s'en assurer, il employa les cristaux de verdet, mêlés avec quatre fois autant d'arsenic, & mit le tout distiller dans une cornue, il passa un vinaigre très-piquant, & qui avoit une forte odeur d'ail: l'arsenic se sublima presqu'entièrement au col de la cornue, & il resta dans son fond un culot de régule arsénical très-aigre. La dissolution de ce régule donna des cristaux soyeux, peu différens de ceux que fournit la dissolution

d'étain par l'eſprit de ſel ; mais cette même diſſolution ne donna, par le mélange de l'alkali volatil, aucune nuance de bleu ; preuve évidente que la conjecture de M. Cadet étoit juſte, & que l'alkali volatil n'a point d'action ſur le cuivre lorſqu'il eſt mêlé avec l'arſenic; il eſt vrai que cette opération n'a réuſſi qu'une ſeule fois à M. Cadet; dans toutes les autres il n'a pu obtenir ce régule, où le cuivre & l'arſenic étoient ſi bien combinés enſemble; elles ne lui ont donné qu'un cuivre blanc, dont la diſſolution prenoit une belle couleur bleue, par ce mélange de l'alkali volatil.

Il en eſt de l'arſenic & des autres matières ſemblables, comme des bêtes féroces apprivoiſées, il eſt bien difficile de s'en approcher ſouvent, quelques précautions qu'on prenne, ſans qu'elles faſſent repentir de s'y être fié: une maladie grave que M. Cadet dut à ce travail, l'obligea de chercher des moyens moins dangereux, & il tourna ſes vues vers l'étain qui contient beaucoup d'arſenic, comme l'a fait voir le célèbre M. Margraff.

Dans cette vue il a mêlé de l'étain de Malac avec un vingt-quatrième de ſon poids de cuivre de roſette; cet alliage qui avoit donné beaucoup de dureté à l'étain, a été mis en limaille, & s'eſt diſſous très-facilement dans l'eſprit de ſel, qui a perdu dans cette opération ſa couleur jaune : il s'eſt précipité au fond du vaiſſeau une poudre noire, que M. Cadet reconnut pour du cuivre qui ſe dégageoit de l'alliage pendant la diſſolution; il a diſſous cette poudre dans l'eſprit de nitre, & l'alkali volatil a coloré cette diſſolution d'un beau bleu ; revenons à la diſſolution de l'alliage: M. Cadet l'a ſaturé de l'alkali volatil, il s'y eſt fait un précipité jaune, & la liqueur n'a pris aucune couleur bleue, elle a donné par l'évaporation des criſtaux ſoyeux.

Cette poudre noire ſe rencontre dans pluſieurs diſſolutions d'étain, Henckel la regarde comme l'arſenic contenu dans l'étain, d'autres comme le ſoufre de ce métal. M. Cadet a ſuivi cet objet, ce ſera ſi l'on veut un épiſode à ſon travail: on verra cependant que cet épiſode n'y étoit pas inutile.

L'étain de Malac diſſous à froid par l'eſprit de ſel, n'a donné qu'un léger précipité, ce précipité a été diſſous par l'eſprit de nitre, & précipité par l'alkali volatil; le précipité étoit jaune, & la diſſolution n'a pas pris la moindre teinte de bleu; ce n'étoit donc pas du cuivre, & M. Cadet conjecture que la poudre noire n'étoit qu'un peu de fer détaché de la lime, qui avoit ſervi à réduire l'étain en limaille, ce qui lui a été confirmé par la pierre d'aimant qui a enlevé beaucoup de parcelles de pareille limaille.

Il n'en a pas été de même des étains des autres fabriques, & nommément de ceux de Cornwal; ce dernier réduit en limaille, & ſoigneuſement dépouillé par la pierre d'aimant, du fer que la lime avoit pu y laiſſer, a été diſſous par l'eſprit de ſel, & a donné un précipité noir très-abondant; ce précipité a été diſſous par l'eſprit de nitre, l'alkali volatil a donné à la diſſolution le bleu le plus vif; une lame d'acier poli, trempée dans cette liqueur, eſt devenue cuivreuſe, & le papier par lequel elle avoit été filtrée, étant brûlé, a donné une belle flamme verte; à ces ſignes on ne peut méconnoître la préſence du cuivre, & on ne doit pas même en être ſurpris. M. Geoffroi aſſure dans ſa matière médicale, que dans la fonte des étains de Cornwal, on mêle, pour leur donner du corps, depuis deux juſqu'à trois livres de cuivre par quintal; l'étain des Potiers d'étain en eſt encore plus chargé, celui qu'ils nomment Étain fin, en contient juſqu'à ſept livres par quintal.

La poudre noire cuivreuſe, précipitée de la diſſolution d'étain, ſeroit donc, ſelon M. Cadet, un moyen plus ſûr de juger de la pureté de ce métal, que tous ceux qui ont été propoſés juſqu'ici; c'eſt un fruit ſurnuméraire de ſon travail: revenons préſentement au borax, qui a été l'occaſion de tout ce travail.

En combinant enſemble le cuivre & l'étain, avec l'alkali de la ſoude & l'urine, M. Cadet a obtenu une liqueur d'un goût amer, & d'un beau vert de pré; cette liqueur étendue dans de l'eau, n'a donné, par l'addition du ſel volatil, aucune

couleur bleue, & n'a point rendu cuivreuſe la lame de fer qu'on y a plongée, mais en y verſant un acide quelconque, il s'y forme auſſitôt un ſel par lames, ſemblable au ſel ſédatif, & la lame de fer poli qu'on y plonge devient cuivreuſe; la portion d'arſenic contenue dans l'étain peut donc maſquer une quantité aſſez conſidérable de cuivre joint à ce métal, de manière que l'alkali volatil ne puiſſe le faire reconnoître; peut-être y pourroit-on réuſſir encore d'une autre manière, c'eſt l'objet d'un autre travail que M. Cadet s'eſt propoſé de ſuivre.

La grande fuſibilité du verre tiré du borax, & la propriété qu'il a comme le verre de plomb, de ronger les creuſets, firent naître à M. Cadet, l'idée de tenter de maſquer le cuivre par le ſecours du verre de plomb; dans cette vue il a précipité par l'alkali de la ſoude, le cuivre contenu dans une diſſolution de vitriol bleu.

Ce précipité bien lavé, il a fait fondre dans un creuſet conique, quatre onces de ſable, quatre onces de ſel de ſoude & huit onces de litarge, la matière étant bien en fuſion, il y a ajouté demi-once du précipité, & il s'eſt trouvé dans le creuſet une maſſe de verre, dont les éclats étoient tranſparens, & d'une belle couleur d'émeraude.

Quatre onces de ce verre ont été diſſoutes par l'eſprit de ſel très-promptement & avec chaleur, & il a retenu deux onces & un gros de cet acide: ce dernier mélange mis au feu pendant un quart d'heure, dans un creuſet conique, a donné un verre laiteux; ce verre attire l'humidité de l'air, il donne d'abord une liqueur verte, qui a le piquant d'un alkali cauſtique; mis en lieu plus ſec, il ſe réduit en une eſpèce de gluten verdâtre ou jaunâtre, qui en ſe ſéchant, devient une matière blanche aſſez ſemblable au borax, & qui comme lui, ſe bourſouffle & ſe vitrifie au feu; cette reſſemblance engagea M. Cadet à eſſayer ſi cette matière auroit, comme le borax, la propriété de faciliter la ſoudure des métaux, & l'expérience lui fit voir que ſa conjecture étoit bien fondée.

M. Cadet

M. Cadet ſoupçonna que cette propriété de ſe bourſoufler & de faciliter la ſoudure, pouvoit être dûe à l'acide marin qu'il avoit fait entrer dans la compoſition de cette matière; pour s'en éclaircir, il eſſaya d'employer le verre métallique cuivreux, avant qu'il eût ſubi l'action de l'acide marin, & il vit qu'effectivement ce verre ſe fondit ſans ſe bourſoufler & qu'on ne put obtenir aucune ſoudure, quelque feu qu'on donnât à l'argent qu'on vouloit ſouder.

Puiſque la propriété qu'a le verre préparé par M. Cadet, de contribuer comme le borax à la ſoudure des métaux, eſt dûe à l'acide marin qu'il y a fait entrer, n'eſt-il pas probable que le borax lui-même, ne doit cette propriété qu'à la préſence de cet acide? la baſe du ſel marin ſe trouve bien démontrée dans le borax, ſeroit-il probable qu'elle s'y trouvât par haſard, ſeule & dépouillée de ſon acide? il y a plus, M. Bourdelin y a reconnu cet acide, il eſt vrai qu'il eſt le ſeul qui l'y ait aperçu, mais il n'y a pas lieu d'en être étonné, il falloit être auſſi habile Chimiſte que cet Académicien, pour pouvoir démêler la préſence de cet acide, dans le ſel ſédatif, où il eſt déguiſé & maſqué par un ſi grand nombre de principes, qu'il devoit échapper aux regards du plus grand nombre d'obſervateurs.

On ne peut faire à ce raiſonnement qu'une ſeule objection, elle eſt tirée d'une expérience même de M. Cadet: il eut envie de voir ſi, en diſſolvant le verre de plomb & de cuivre par l'acide vitriolique, au lieu de ſe ſervir de l'acide marin, comme dans l'expérience précédente, le ſecond verre ne perdroit pas la propriété de ſe bourſoufler au feu & de ſouder les métaux, & il étoit bien perſuadé qu'il la perdroit; il ſe trompoit cependant, & il vit avec le plus grand étonnement que le verre obtenu par ce moyen, avoit toutes les qualités de celui qu'il avoit obtenu en employant pour diſſolvant l'eſprit de ſel; il chercha la raiſon de cet étrange phénomène, & voici celle qu'il trouva.

Il employoit dans ſon opération le ſel de ſoude, ou ce qui eſt la même choſe, la baſe du ſel marin, en aſſez grande

quantité, il ſe rappela que pluſieurs expériences lui avoient prouvé que ce ſel n'abandonne jamais entièrement ſon acide, quelque calcination qu'on lui faſſe ſubir; alors tout le merveilleux diſparoît, l'acide vitriolique en ſe ſaiſiſſant de l'alkali, en a délogé l'acide marin, qui, ſe jetant ſur la terre vitrifiable du plomb, avec laquelle il a une très-grande affinité, a produit ce verre laiteux ſi ſemblable à celui qu'il avoit obtenu en employant l'eſprit de ſel pour diſſolvant.

Il réſulte donc de tout ce que nous venons de dire, qu'on peut cacher le cuivre dans différentes ſubſtances, à l'aide de l'arſenic, ſans que l'alkali volatil puiſſe le faire reconnoître:

Que l'acide marin joint à différentes ſubſtances ſalines, vitrifiables ou métalliques, donne une eſpèce de verre qui ſe bourſouffle au feu & ſoude comme le borax:

Que cette qualité n'eſt dûe qu'à l'acide marin qui eſt entré dans la compoſition de ce verre, & qui ſe trouve auſſi dans le borax:

Que le précipité noir qu'on obtient de la diſſolution de quelques étains, n'eſt ni le ſoufre ni l'arſenic de l'étain, mais le cuivre qu'on y a mêlé dans le temps de ſa première fuſion, & que la plus grande ou moindre quantité de ce précipité, pourroit ſervir de moyen pour juger de la pureté de ces étains:

Qu'enfin la criſtalliſation de l'alkali du ſel marin eſt dûe à une portion de ſon acide, dont il eſt comme impoſſible de le priver.

CETTE année parut un Ouvrage de M. Sage, intitulé: *Élémens de Minéralogie Docimaſtique.*

Docimaſie, ſuivant la force du mot Grec *, veut dire épreuve, & c'eſt auſſi la partie de la Chimie qui enſeigne à eſſayer par des opérations en petit, la nature & la quantité des matières métalliques ou autres qu'on peut retirer des minéraux ou autres corps compoſés: le but de l'Ouvrage de M. Sage eſt donc d'enſeigner les principes ſur leſquels cet

* Δοκιμασία, *probatio, exploratio.*

Art ſi utile eſt fondé, & pour ainſi dire, les premiers élémens deſquels ſont composés la plupart des corps métalliques.

De ce nombre ſont certainement les ſels; on ſait que la première diviſion de ces ſels eſt en acides & en alkalis; M. Sage admet l'acide vitriolique comme l'acide primitif, qui, par ſes différentes combinaiſons avec le phlogiſtique, ſe modifie & produit tous les autres acides; M. Sage en admet cinq, ſavoir; l'acide phoſphorique, le vitriolique, le nitreux, le marin & enfin le ſulfureux. L'ordre dans lequel nous venons de les préſenter, eſt celui de leur peſanteur ſpécifique, & c'eſt auſſi de cette peſanteur que dépend, ſelon M. Sage, leur affinité avec différentes ſubſtances.

Les alkalis ſont, ſelon M. Sage, composés d'un acide analogue à l'acide phoſphorique & d'une très-grande quantité de terre abſorbante; ils ſe diviſent en général, en volatils & fixes, le feu enlève & diſſipe les premiers, & les ſeconds ſouffrent toute ſa violence ſans s'élever.

De l'union des acides avec les métaux, les terres, les alkalis fixes ou volatils, naiſſent tous les ſels neutres que nous connoiſſons; M. Sage obſerve avec ſoin la compoſition de chacun, & range ſous cette claſſe pluſieurs ſubſtances qu'on en avoit cru fort éloignées, il paſſe enſuite aux bitumes, dont il donne la compoſition & les principes; c'eſt-là ce qui forme l'objet de la première partie de l'Ouvrage de M. Sage.

Dans la ſeconde, il ſe propoſe l'examen des terres & des différentes pierres; on ſent aſſez combien cette connoiſſance étoit néceſſaire à ſon projet, puiſque dans toutes les mines la matière métallique eſt preſque toujours engagée dans quelqu'une de ces matières; donc l'énumération eſt extrêmement étendue; M. Sage y donne les principes dont elles ſont composées, leur liaiſon, leurs propriétés, ſouvent leurs uſages dans les différens Arts où elles ſont employées.

Muni de toutes ces connoiſſances, M. Sage paſſe enfin à la troiſième partie de ſon Ouvrage, à ce qui en fait proprement l'objet, aux métaux & aux mines qui les contiennent;

il y préſente les mines des différens métaux, les pays où elles ſe trouvent, les différentes formes que leur donnent les diverſes matières avec leſquelles elles ſont jointes, & celles qui les minéraliſent, c'eſt-à-dire qui les joignent à ces matières en les défigurant de telle ſorte, que ſouvent elles ne ſont pas reconnoiſſables. La plupart des Chimiſtes n'admettoient que deux ſubſtances minéraliſantes, le ſoufre & l'arſenic; M. Sage y joint l'acide marin, l'alkali volatil & la matière graſſe qui réſulte de cet alkali décompoſé, qu'il regarde comme les minéraliſateurs de pluſieurs ſubſtances métalliques, auxquelles ils font prendre des formes ſingulières, & il indique les procédés néceſſaires pour les en dégager; nous ne diſſimulerons pas que les principes, auxquels M. Sage a entrepris de tout ramener, ne l'aient quelquefois conduit à des concluſions qui diffèrent d'opinions aſſez généralement adoptées; mais c'eſt un inconvénient auquel ſe trouvent aſſez ordinairement expoſés ceux qui tentent la recherche de la vérité par une route nouvelle: cet Ouvrage eſt véritablement élémentaire par la clarté & la préciſion qu'il y a mis, on peut le regarder comme le germe d'une infinité de connoiſſances. Des expériences nombreuſes, dont l'Auteur ne donne cependant pas toujours les détails, & l'examen ſuivi d'un nombre infini de matières minérales en ſont la baſe. Si des perſonnes peu verſées dans la Minéralogie y trouvent des inſtructions rédigées avec ordre, ceux à qui elles ſeront moins néceſſaires y trouveront des vues nouvelles, & un précis de différentes analyſes qui ſont la preuve d'un travail long-temps ſoutenu.

BOTANIQUE.

SUR LA VÉGÉTATION DU BLÉ DANS DIFFÉRENTES MATIÈRES.

V. les Mém. p. 99.

RIEN n'est plus connu parmi les Agriculteurs & les Physiciens, que la distinction des terres, en bonnes, médiocres & mauvaises, & que la necessité plus ou moins grande d'entretenir leur fertilité, ou de remédier à leur stérilité par différens engrais: Mais ce qui n'est certainement pas si bien connu, c'est la cause qui rend les terres fertiles ou stériles, qui fait que les unes rapportent davantage dans les années pluvieuses, & que d'autres aiment les années sèches, que quelques-unes admettent des espèces d'engrais que d'autres refusent; tous ces points sont pourtant essentiels, & doivent servir de base à l'établissement d'une théorie, au moyen de laquelle on puisse travailler sûrement à donner aux terres la plus grande fertilité possible.

C'est à la recherche de cette théorie si nécessaire, qu'est consacré le travail de M. Tillet, dont il donne le commencement dans ce Mémoire; on juge combien d'expériences & d'observations ont été nécessaires pour établir des principes dans une matière aussi neuve, & où la Nature semble s'être cachée avec tant de soin.

Les réflexions que M. Tillet avoit eu occasion de faire sur l'effet de l'eau de la pluie dans les terres graisses & dans les terres sablonneuses, lui avoient indiqué que les terres qui

contenoient une certaine portion d'argile étoient très-fertiles, tandis que celles qui en contenoient plus ou moins, s'éloignoient aussi plus ou moins de ce degré de fertilité; mais ce plus ou moins d'argile qui doit tant contribuer à la bonté de la terre n'étoit pas déterminé, & c'étoit précisément vers cet objet que devoient se diriger les tentatives de M. Tillet.

L'expérience & l'observation étoient les seules voies par lesquelles il pût parvenir à cette connoissance, il entreprit donc de composer lui-même des terres avec les mêmes matières qui entrent dans la composition des terres à blé, d'en varier les doses dans ses différens essais, & de voir l'effet que produiroient ces mélanges sur le blé qui leur seroit confié, sans leur donner d'autres secours que ceux qu'une terre labourable peut recevoir de la variété des saisons.

Il falloit isoler chacun de ces essais, pour que le blé qui y viendroit n'eût aucune communication avec aucune autre terre, & leur conserver cependant la participation à toutes les influences des saisons, que le sol où ils étoient placés recevoit. Pour obtenir l'un & l'autre point, M. Tillet fit faire des pots qui avoient un pied de diamètre à leur ouverture, dix pouces à leur fond, & environ huit pouces de profondeur: ces pots étoient destinés à recevoir ces différentes terres factices & quelques terres naturelles qui devoient servir de terme de comparaison, & ils étoient enterrés jusqu'à un doigt ou environ de leur bord supérieur dans la terre du lieu où il faisoit ces expériences; par ce moyen, ses plantes étoient isolées & recevoient cependant à travers le pot l'humidité du terrein. Ces pots étoient rangés dans un ordre constant, & ils avoient de plus chacun un numéro, pour prévenir toute confusion dans les observations, qui ont d'ailleurs été faites dans une partie du jardin des P.P. Chartreux, dont ces Religieux avoient bien voulu permettre à M. Tillet de disposer pour ses expériences.

Les matières que M. Tillet a employées pour composer ses terres artificielles étoient la glaise ou l'argile de Gentilly, le sable de rivière, le sablon d'Étampes, les recoupes de pierre

dure & de Saint-Leu, les cendres lavées ou non lavées, la marne, les fumiers, la paille hachée très-menue, les plâtras, enfin jusqu'à du verre pilé.

M. Tillet avoit pris le nombre 8 pour l'unité dans ses recherches, & les différens mélanges qu'il a faits sont toujours exprimés en huitièmes.

Les expériences rapportées dans ce Mémoire, ont duré pendant l'espace de trois années consécutives, elles sont au nombre de plus de quarante; nous ne pourrions sans excéder les bornes qui nous sont prescrites, suivre M. Tillet dans ce détail, qui doit être lû dans son Mémoire; nous nous contenterons de donner une idée des résultats & des réflexions qu'ils lui ont suggérées.

Le premier pas a été d'imiter les terres fertiles, & M. Tillet y est parvenu en mêlant ensemble trois huitièmes d'argile, deux huitièmes de sable de rivière & trois huitièmes de retailles de pierre dure; & ce qui est à remarquer, c'est qu'en analysant une très-bonne terre, on y a trouvé précisément les mêmes principes dans la même proportion; on peut donc composer avec des matières étrangères une terre végétale excellente: voyons maintenant les conséquences que M. Tillet a tirées des différens mélanges qui représentent les différentes natures de terres.

La proportion dans laquelle l'argile entre dans la composition des très-bonnes terres, n'est pas si précise, qu'une légère différence puisse influer sur la végétation, M. Tillet l'a fait varier à la vérité légèrement sans le moindre inconvénient.

On pourroit assez légitimement supposer que du sablon se substitueroit au sable de rivière, sans rien ôter à la bonté de la terre; on se tromperoit cependant, cette substitution a considérablement diminué la bonne qualité de la terre, la raison même s'en présente assez naturellement; le sablon & l'argile se mêlent & font un composé dur que l'eau & les racines des plantes pénètrent trop difficilement.

La marne jointe à une terre ordinaire n'a pas paru y produire un avantage bien considérable, le fumier joint à ce

mélange y a été utile, mais cet avantage n'a pas été durable; & il paroît résulter de plusieurs expériences, que la marne ne peut véritablement améliorer que les terreins qui manquent d'argile & de matières calcaires, & qui par cette raison ne retiennent pas suffisamment l'humidité.

L'ordre des expériences de M. Tillet exigeoit qu'il essayât de faire croître du blé dans chacune des matières qui servoient d'élémens à ses mélanges, prise séparément, & il n'y a pas manqué.

L'argile seule n'a fourni qu'une végétation très-foible, dans une seule expérience elle a donné une plante de blé vigoureuse : les plâtras pulvérisés ont donné de très-beau blé & la végétation s'est très-bien soutenue pendant les trois années qu'a duré l'expérience.

Le sablon produisit à peu-près les mêmes effets la première & la seconde année, mais à la troisième la végétation fut beaucoup plus foible.

Le sable de rivière produisit de très-beau blé pendant les trois années de l'expérience.

Les recoupes de pierre ne firent pas toujours le même effet; elles se mastiquèrent quelquefois à la surface par le premier arrosement & par la pluie, & les jeunes plantes ne purent s'y faire jour; dans une seule de ces expériences M. Tillet recueillit dans des recoupes de pierre de Saint-Leu, du blé très-beau.

Quoique les cendres de bois n'entrassent pour rien dans le système des combinaisons de M. Tillet, cependant comme on emploie la *charrée* ou les cendres lessivées pour l'amélioration des terres & sur-tout des prés, il a voulu essayer si le grain y pourroit venir, & il en a semé pour cela dans des pots pleins de cendres de bois neuf, lessivées & non lessivées, mais ce fut à peu-près sans succès; dans une seule expérience M. Tillet obtint quelques épis assez beaux, dans toutes les autres il y eut peu de tiges, encore furent-elles foibles & les épis très-médiocres. La marne employée seule a donné pendant les deux premières années de très-beau blé, mais à la troisième & dernière année de l'expérience, il cessa d'avoir

la même

la troisième & dernière année de l'expérience il cessa d'avoir la même vigueur & la même beauté.

Nous venons de présenter au lecteur, quoique dans un très-grand raccourci, un tableau des principales tentatives de M. Tillet, il est temps de passer aux considérations qu'elles font naître, & d'en tirer les principes généraux qu'elles indiquent.

Les premières expériences présentent l'idée d'une très-bonne terre, & semblent indiquer que celles qui s'éloignent de cette composition, pourroient y être ramenées, en leur restituant ce qu'une analyse exacte aura fait voir qui leur manque, lorsqu'on l'aura à sa portée.

Il résulte encore des mêmes expériences, que dans le cas où il seroit question de fournir du sable à une terre trop argileuse, il n'est pas indifférent d'employer du sable ou du sablon; celui-ci s'unit trop avec l'argile & forme avec elle un corps dur & continu, que ni l'eau, ni les racines, ni les tiges des plantes ne peuvent pénétrer.

Que la marne ne produit pas toujours une amélioration, qu'elle ne convient que dans les terreins sablonneux & dans les terres qui, faute d'argile & de matière calcaire, perdent trop promptement l'humidité qu'elles reçoivent.

Que l'usage du fumier joint à la marne ou employé séparément, produit une utilité réelle, mais qui n'est pas durable, & que son effet est probablement de diviser & de soutenir les molécules de terre, & de donner par ce moyen lieu à l'eau d'y pénétrer & aux racines de s'y étendre, sans cependant exclure la propriété que les sucs émanés du fumier paroissent évidemment avoir, de favoriser la végétation des plantes.

L'inégalité des productions végétales venues dans le sablon, méritoit quelques réflexions; tous les pots étoient égaux, ils contenoient la même quantité de la même espèce de sablon, cependant les différences étoient bien marquées: M. Tillet soupçonne que cette différence avoit pour cause la plus grande ou la moindre porosité des pots, qui transmettoit

plus ou moins au ſablon contenu dans les pots, l'humidité de ſa terre dans laquelle ils étoient enfoncés.

Une autre cauſe concouroit cependant à donner au pied de blé qui avoit réuſſi, la vigueur que M. Tillet y avoit obſervée; les racines du blé venu dans une bonne terre ne ſont pas nombreuſes & n'ont en général que peu de chevelu, celles du blé venu dans le ſablon étoient bien différentes, elles avoient beſoin de ſuppléer par le nombre de ſuçoirs au peu d'humidité que le ſablon tiroit de la terre qui l'environnoit, auſſi étoient-elles en grand nombre & ſi chargées de chevelu, que non-ſeulement elles rempliſſoient la capacité du pot, mais qu'elles avoient encore formé une eſpèce de réſeau très-ſerré qui s'appliquoit contre ſes parois.

On ne peut s'empêcher de voir dans ce que nous venons de dire, que le blé n'avoit rien pu tirer du ſablon, & qu'il n'avoit dû ſon accroiſſement qu'à l'eau; ſi on en doutoit le moins du monde, une nouvelle expérience faite par M. Tillet depuis la lecture de ce Mémoire, leveroit toute difficulté: il a fait venir du blé dans du verre pilé & réduit ſeulement à la ténuité d'une terre ordinaire; on ne s'aviſera pas de ſoupçonner que cette matière ait pu fournir au blé aucun aliment, il eſt cependant venu, aſſez foible à la vérité, mais il eſt parvenu à une parfaite maturité.

Il ſeroit aſſez naturel de penſer que les cendres recevant l'eau très-facilement, & ne ſe réduiſant pas aiſément en une maſſe dure, elles devroient être auſſi favorables à la végétation du blé que le ſablon; les expériences avoient cependant fait voir le contraire; M. Tillet n'avoit pu obtenir qu'une ſeule fois une belle végétation dans cette matière.

Dans la vue de s'éclaircir ſur ce ſujet, il emplit deux meſures abſolument pareilles, l'une de cendres de bois neuf, & l'autre de ſablon d'Étampes bien tamiſé; les cendres peſoient cinq onces, cinq gros, ſoixante-deux grains; & le ſablon huit onces, deux gros, cinquante-deux grains; il y verſa de l'eau pour les imbiber juſqu'au point de les pouvoir pelotonner; ſix gros & demi d'eau ſuffirent pour mettre le

ſablon en cet état, tandis que les cendres en exigèrent deux onces, quatre gros & demi ; elles abſorbèrent par conſéquent de l'eau trois fois plus que le ſablon, ſans en paroître plus humectées : les cendres retiennent donc une quantité d'eau conſidérable, dont les plantes ne peuvent profiter, & par conſéquent elles ne peuvent être propres à la végétation.

Il réſulte de tout ce que nous venons de dire, que toute ſubſtance terreuſe qui n'a pas cette qualité abſorbante, & qui peut tranſmettre aux racines des plantes l'humidité qu'elle a reçue, eſt propre à la végétation; que l'eau joue le plus grand rôle dans le développement & l'accroiſſement des plantes, & que ſi quelqu'un avançoit que ce qui conſtitue la fertilité des terres, ne conſiſte en grande partie que dans le peu d'adhérence de leurs molécules, & dans la propriété de retenir l'eau en ſuffiſante quantité, il ne s'éloigneroit peut-être pas trop de la vérité.

M. Tillet a cru cependant devoir prévenir un abus qu'on pourroit faire de ſes expériences; on a vu qu'il avoit fait venir du blé dans des matières naturellement peu propres à la végétation, comme dans du ſablon, des recoupes de pierre, &c. Mais on ſe tromperoit beaucoup ſi on prétendoit en faire porter à un terrein compoſé totalement, ou pour la plus grande partie, de pareilles matières; les choſes ne ſeroient nullement égales de part & d'autre; les pots dans les expériences de M. Tillet laiſſoient paſſer une partie de l'humidité de la terre qui les environnoit, que les matières qui y étoient contenues tranſmettoient aux plantes; elles auroient péri dans peu ſans ce ſecours, comme il eſt arrivé à un très beau pied de blé venu dans des recoupes de pierre, dont il avoit tiré le pot de la terre pour le faire voir à l'Académie. Or il eſt aiſé de voir que des champs entiers compoſés de ſablon, de craie, &c. n'auroient pas la même reſſource, & que la perte aſſez prompte qu'elles feroient de leur humidité ne pouvant être réparée par aucun moyen, les plantes y périroient infailliblement.

Un ſeul fait qu'il ne diſſimule pas, ſemble ſe refuſer à ce

raiſonnement, M. Tillet, a comme on a vu, obtenu quelques pieds de blé aſſez vigoureux dans de la glaiſe pure, on ſait combien cette matière ſe retire en ſe deſſéchant, auſſi pouvoit-on preſque paſſer le doigt entre le pot & la maſſe de glaiſe qu'il contenoit; il eſt évident qu'alors cette maſſe ne tiroit rien de l'humidité que le pot laiſſoit paſſer, mais quelque ſpécieuſe que ſoit cette objection, il eſt facile d'y répondre: la glaiſe ne ſe sèche pas aiſément juſqu'au cœur, & d'ailleurs quoique ſéparée de la circonférence du pot, elle ne l'étoit pas du fond par où elle pouvoit aiſément recevoir l'humidité néceſſaire. Il eſt aiſé de voir quel jour répand ſur l'amélioration des terres le travail de M. Tillet, duquel nous venons de rendre compte, mais on doit auſſi s'apercevoir que malgré la multiplicité de ſes recherches, ce n'eſt encore que l'entrée d'une longue carrière qu'il a ouverte aux Botaniſtes & aux Agriculteurs, & qui exige encore un grand nombre d'expériences, qu'on peut être aſſuré qu'il ne négligera pas, en voici quelques-unes d'un autre genre, que la facilité d'opérer dans un endroit fermé & à l'abri de tout dérangement, lui a donné occaſion de faire ſur la carie des blés, & par leſquels il termine ſon Mémoire.

M. Tillet conſervoit depuis treize ou quatorze ans dans un ſac de papier bien ſicelé des grains de blé carié, & il avoit eu toute l'attention néceſſaire pour empêcher que leur pellicule ne ſe déchirât, & pour conſerver par conſéquent la poudre contagieuſe dans tout ſon entier.

Le terrein dont il pouvoit diſpoſer fut partagé en pluſieurs planches, & ces planches en pluſieurs rayons à un pied de diſtance ou environ les uns des autres; ces rayons étoient deſtinés à y ſemer alternativement, dans les uns du blé pur & beau, & dans les autres du même blé noirci avec la poudre contagieuſe de celui dont nous venons de parler.

Le blé leva également dans toute l'étendue de terrein où il avoit été ſemé, & M. Tillet s'attendoit bien à remarquer au printemps ſuivant les caractères qui indiquent la maladie dans les rayons où il avoit ſemé du blé infecté de la poudre

contagieuſe, mais quelle fut ſa ſurpriſe de n'en remarquer que peu de veſtiges, il avoit cependant pris autant de précautions pour infecter ce blé, qu'on auroit pu en prendre pour le préſerver.

Il ne pouvoit s'en prendre qu'à l'affoibliſſement de la qualité contagieuſe de la poudre de ce blé qu'il avoit gardé trop long-temps; mais pour écarter ſur ce point juſqu'au moindre ſoupçon, il répéta l'expérience & ſema l'automne ſuivant, dans les rayons de ces mêmes planches, du blé pur, du même blé noirci avec de la pouſſière récente de blé carié, & d'autre noirci avec celle du blé carié qu'il avoit ſi long-temps gardé, & enfin du blé infecté, mais préparé ſelon la méthode de M. Tillet pour le préſerver de la maladie; l'expérience confirma parfaitement ſa conjecture, toute la partie des blés noircis avec de la carie nouvelle ſe trouva prodigieuſement infectée, tandis que celle qui l'avoit été avec de la carie ancienne ne l'étoit preſque pas, & que le blé pur, ou celui qui avoit reçu la préparation préſervative, étoit de toute beauté.

Il réſulte donc de ces expériences, que la poudre récente des blés cariés produit ſur le grain le plus pur les ſuites les plus funeſtes, que cette qualité contagieuſe s'affoiblit à meſure que la poudre vieillit, qu'il eſt vraiſemblablement un terme après lequel elle s'en dépouilleroit totalement, & que la préparation des ſemences indiquée par M. Tillet dans l'eſpèce de procès-verbal qu'il a publié de ſes expériences faites à Trianon, produit conſtamment l'effet avantageux qu'il en attendoit.

On s'imagineroit peut-être que puiſque la qualité nuiſible de la pouſſière des grains cariés s'affoiblit avec le temps, on s'en délivreroit entièrement en n'employant que du blé vieux pour enſemencer les terres; mais on ſe tromperoit groſſièrement, le blé gardé aſſez d'années pour que la carie eût perdu ſa qualité, auroit perdu auſſi preſqu'entièrement la faculté de germer, & la portion même qui réuſſiroit ſeroit encore expoſée à la contagion du noir ſi elle en avoit été infectée. Ces dernières expériences n'offrent donc juſqu'à

présent qu'un objet de pure curiosité. Mais qui sait si des recherches plus exactes & plus long-temps suivies ne pourroient pas leur procurer une utilité directe, & ne conduiroient pas à des précautions utiles pour garantir totalement les blés de ce fléau destructeur ? on peut sur ce point s'en remettre au zèle & à la sagacité de M. Tillet.

OBSERVATIONS BOTANIQUES.

I.

IL est singulier que les Arts & le Commerce emploient souvent des drogues dont l'origine est parfaitement inconnue, de ce nombre est l'espèce de baye, connue sous le nom de *graine d'Avignon*, & qu'on emploie dans la teinture & dans la peinture en détrempe pour donner une assez belle couleur jaune: M. le Président de Malesherbes a été curieux d'en savoir l'origine; il s'est adressé pour cela à M. Seguier, Correspondant de l'Académie, à Nîmes; voici les éclaircissemens qui lui ont été envoyés.

L'arbrisseau qui produit cette baye est un espèce de buisson, nommé par les Botanistes, *Rhamnus catharcticus minor*, cet arbrisseau vient absolument sans culture, on le trouve dans les bois taillis, situés sur les collines formées de rochers & de pierres calcaires, & jamais dans les plaines; il y en a en abondance en plusieurs endroits du Languedoc, du Comtat Venaissin & même dans la partie basse des Pyrénées. Il seroit peut-être difficile de deviner la raison qui a fait donner à son fruit le nom de *graine d'Avignon*, le Comtat Venaissin qui entoure cette ville est peut-être de tous les pays que nous venons de nommer, celui qui en donne le moins, & si on peut hasarder quelque conjecture sur ce point, ce nom ne lui est probablement venu que de ce qu'on tiroit autrefois cette marchandise des grenetiers d'Avignon.

L'arbrisseau s'élève à la hauteur de quatre à cinq pieds; dès que la graine commence à verdir, ce qui arrive à la mi-

Juin, les payſans auxquels les propriétaires des bois afferment le produit de cette récolte, coupent les arbriſſeaux au pied & les laiſſent ſécher pendant cinq à ſix jours, alors ils les battent avec un bâton ou un fléau pour en ſéparer la graine, ils en ôtent enſuite les feuilles & les épines en la vannant, & ſe ſervent du crible pour la bien nettoyer. Auſſi-tôt que cette coupe eſt faite, les racines de l'arbuſte jettent quantité de pouſſes qui fourniſſent de nouvelles récoltes; on pourroit ſoupçonner, malgré la vigueur & la force que paroiſſent avoir les jets, que cette coupe annuelle nuiroit à la fin à l'arbriſſeau, cependant pluſieurs de ceux qui s'occupent de cet objet, prétendent qu'ils en fourniſſent au contraire beaucoup plus, & ce qui eſt pour eux une raiſon ſans replique, tel eſt l'uſage immémorial de faire cette récolte.

La graine doit être exactement ſéchée avant qu'on la livre au grenetier; la moindre humidité la feroit noircir & elle ne ſeroit plus de défaite.

La meilleure eſt celle qu'on tire du Languedoc & du Comtat Venaiſſin, celle des Pyrénées lui eſt inférieure, & celle qu'on tire d'Eſpagne eſt la moindre de toutes, auſſi ne ſe vend-elle que vingt-cinq livres le cent, tandis que la meilleure ſe paye ſoixante-dix; on doit la choiſir d'un beau vert un peu foncé.

II.

M. Muſtel, Chevalier de l'Ordre Militaire de S.t Louis, de la Société d'Agriculture de Rouen, bien connu de l'Académie, par pluſieurs Ouvrages qu'il lui a préſentés, a mandé à M. Duhamel, qu'ayant coupé deux années de ſuite les pétales à des fleurs de poirier, il avoit remarqué que les fruits réuſſiſſoient mieux que lorſqu'on les conſervoit, mais qu'il falloit prendre garde de couper les étamines, & qu'en 1772, année où les poiriers en général rapportèrent très-peu, un poirier auquel il avoit coupé les pétales ſe trouva chargé de très-beaux fruits, expérience curieuſe & qui mérite bien d'être ſuivie.

III.

L'évènement duquel nous avons à rendre compte dans cet article, eſt en même temps une conquête pour la Botanique & pour le commerce du Royaume.

Perſonne n'ignore les ſoins qu'a pris la République de Hollande depuis ſon établiſſement dans les Indes, & les guerres terribles qu'elle a eu à y ſoutenir, tant contre les naturels du pays, que contre les nations Européennes qui fréquentent ces mers, pour ſe procurer le commerce excluſif des épiceries, c'eſt-à-dire du gérofle & de la muſcade, car ils n'avoient pu réuſſir à priver entièrement les autres nations du poivre & de la canelle. M. Poivre étant alors chargé des intérêts de la Compagnie des Indes, avoit conçu le deſſein de tranſporter dans les Iſles de France & de Bourbon des plants de ces arbres précieux; il avoit fait pour cet effet un long ſéjour aux Iſles Philippines, & pluſieurs voyages dans les Moluques; mais la tentative qu'il avoit faite en 1754 n'avoit pas eu tout le ſuccès qu'il en attendoit. M. le Duc de Choiſeul ayant été chargé du miniſtère de la Marine, ſentit toute l'importance de cette expédition, & pour y parvenir plus ſûrement il engagea M. Poivre à reprendre l'intendance des deux Iſles de France & de Bourbon; M. le Duc de Praſlin qui lui ſuccéda dans ce miniſtère, adopta les vues de ſon prédéceſſeur, & fit partir en 1767 M. Poivre chargé des ordres du Roi ſur ce ſujet; celui-ci ne fut pas plutôt arrivé à l'Iſle de France, qu'il penſa à s'acquitter de ſa miſſion, & jeta les yeux ſur M. Provoſt, comme le plus capable, de l'aveu de toute la Colonie, de bien conduire une telle entrepriſe. Il eſt aiſé de voir combien elle étoit difficile & haſardeuſe, & à quels riſques s'expoſeroient ceux qui en ſeroient chargés, ſoit de la part des mers peu fréquentées qu'il falloit parcourir, ſoit de celle des habitans du pays dont il falloit s'attirer l'affection, ſoit enfin de celle des Hollandois, très-jaloux de ce commerce excluſif qu'ils avoient eu tant de peine à ſe procurer.

Malgré tous ces obſtacles M. Provoſt s'embarqua en 1769 ſur

ſur la corvette du Roi, le *Vigilant*, commandée par M. de Trémigon, & après avoir relâché à Pondichéri & à Achem, où ils furent joints par le bateau l'*Étoile du matin*, commandé par M. d'Etcheverry; ils continuèrent leur route & ſe rendirent à Manille, & de-là à l'Iſle d'Iolo. Le deſſein de M. de Trémigon étoit de ſe rendre à Timor, mais M. Provoſt propoſa de paſſer ſur le bateau & de travailler de ſon côté à la recherche qui faiſoit l'objet de leur miſſion. Je ſuis forcé malgré moi de ſupprimer le détail de tous les obſtacles qu'il eut à vaincre, mais enfin ils arrivèrent heureuſement à l'Iſle de France le 25 Juin 1770, & y débarquèrent une bonne quantité de pieds & de fruits de muſcadiers & de géroſliers, qui furent diſtribués, tant dans le jardin de l'Intendance, qu'à divers habitans de cette Iſle, pour être cultivés.

Quelqu'avantageuſe qu'eût été cette première importation, elle n'avoit pu être ſuivie d'un ſuccès ſuffiſant pour s'aſſurer d'une jouiſſance perpétuelle, elle n'avoit pas été fort conſidérable; il ſe trouvoit dans ce nombre pluſieurs muſcadiers ſauvages, inutiles pour le commerce, & malgré l'attention qu'avoit eue M. Provoſt de prendre tous les renſeignemens poſſibles, & même d'amener quelques habitans du pays; pluſieurs des plants étoient péris faute de la culture qui leur étoit propre, & ſi le reſte pouvoit ſe conſerver, ce n'étoit qu'au bout d'un grand nombre d'années qu'on pouvoit eſpérer d'en faire un objet de commerce. Dans ces circonſtances M. Poivre, de concert avec M. le Chevalier des Roches, Gouverneur général de ces Iſles, réſolut une ſeconde expédition, qui fut, comme la première, compoſée de deux bâtimens, la flûte du Roi, l'*Iſle de France*, commandée par M. le Chevalier de Coëtivi, Enſeigne des Vaiſſeaux du Roi, commandant cette expédition, & la corvette le *Néceſſaire*, commandée par M. Cordé, ci-devant Officier des Vaiſſeaux de la Compagnie. M. Provoſt s'embarqua le 25 Juin 1771, ſur la première; cet armement avoit deux objets, l'un apparent, qui étoit d'aller chercher à Manille des vivres & des munitions, dont la guerre dont on étoit alors menacé,

autoriſoit la demande; & le ſecond plus ſecret, qui étoit la recherche des plants & graines de muſcadiers & de géroſliers. Après avoir rempli le premier objet, ils partirent de Manille le 29 Décembre 1771, & ils prirent leur route vers l'Archipel des Moluques, ſous prétexte d'éviter la rencontre de l'ennemi: nous ſupprimons ici le détail de leur voyage pour en venir plus promptement à leur arrivée à une des Iſles de cet Archipel, pour y prendre les informations des gens du pays que M. Provoſt y avoit pratiqués dans ſon premier voyage; ils y apprirent que les Hollandois paroiſſoient avoir quelque ſoupçon, qu'ils avoient vu paſſer des Vaiſſeaux de cette nation à la vue de cette Iſle, ce qui n'étoit pas ordinaire & témoignoit quelque deſſein, & qu'eux-mêmes n'étoient pas ſans inquiétude.

Ces nouvelles firent changer le plan des opérations, & ils prirent le parti d'aller mouiller au Sud de l'Iſle à un petit port inhabité: là les habitans vinrent les trouver, & au moyen de beaucoup d'inſtances, de promeſſes & de préſens, ils promirent d'avertir des mouvemens & des projets que pourroient former les Hollandois; & ce qui étoit au moins auſſi important, tous les ſecours poſſibles relativement à l'objet de leur miſſion.

Dans ces circonſtances, M. le Chevalier de Coëtivi & M. Provoſt réſolurent de ſe ſéparer, le premier alla à une Iſle voiſine, pour tâcher d'obtenir de ſon côté des plants & des graines, & de les apporter à l'autre Iſle, où M. Provoſt étoit demeuré avec la corvette, & où il avoit formé une eſpèce d'habitation pour y conſerver ces plants précieux; M. Provoſt ne perdoit pas un moment pour faire diverſes expéditions avec le bateau dans les Iſles voiſines, & ſe procurer par ce moyen un grand nombre de plants & de graines; & nous verrons bientôt combien cette activité lui étoit néceſſaire. M. de Coëtivi revint dès le 9 Mars, & peu de temps après M. Provoſt remarqua quelque refroidiſſement dans les gens du pays, & fut informé qu'on tramoit une entrepriſe ſur ſa vie; il prit ſur cet avis

les précautions qu'il crut néceſſaires, ſans interrompre ſes opérations, mais il n'en eut pas long-temps beſoin; dès le 26, un Envoyé d'un Roi du voiſinage vint à bord du vaiſſeau de M. de Coëtivi l'avertir que les Hollandois armoient puiſſamment à Ternate contre les deux navires François, & lui offrit du ſecours pour ſe maintenir dans le poſte où ils étoient; mais comme il ajouta qu'il étoit preſque impoſſible que l'armement Hollandois fût aſſez-tôt prêt pour arriver avant le 25 Avril, cette circonſtance fit qu'on ſe détermina à congédier cet Envoyé avec des remercîmens & des préſens pour ſon Maître & pour lui, & à pouſſer l'opération avec toute la vivacité poſſible; la nombreuſe collection de plants & de graines fut encaiſſée avec toutes les précautions néceſſaires & répartie ſur les deux navires, qui partirent le 8 Avril, & après s'être ſéparés au ſortir des détroits, arrivèrent heureuſement à l'Iſle de France, le premier le 4, & le ſecond le 6 Juin 1772.

Dès le lendemain on débarqua les plants, & on les examina; il paroît par une lettre de M. Poivre du 16 Juillet 1772, que le nombre des muſcades, ſoit germées, ſoit prêtes à germer, paſſe le nombre de quarante mille, & qu'il en a rempli, ainſi que des plants de muſcade & de géroſle, non-ſeulement les Iſles *de France* & *de Bourbon*, mais encore les Iſles *Seichelles* qui ſont ſous la même latitude Sud, que l'Iſle *de Banda*, c'eſt-à-dire quatre degrés & demi, en accompagnant ces plants d'un imprimé à l'uſage des cultivateurs, pour la conduite de cette culture, qui dans la première importation n'avoit pu réuſſir faute de ces inſtructions.

La ſeule choſe dont il reſtoit à s'aſſurer, étoit que les plants & les graines qu'on avoit apportés étoient véritablement des muſcadiers & des géroſliers qui produiſent les muſcades & le géroſle du commerce, l'examen qu'en fit feu M. Commerſon qui étoit alors à l'Iſle de France, ne laiſſoit pas trop lieu d'en douter, mais pour en être encore plus aſſuré, on crut devoir envoyer à l'Académie des eſſais de ces plants & de ces graines avec les copies des procès-verbaux qui conſtatent, que ces eſſais ſont partie des plants & des graines

qui avoient été importés dans cette dernière expédition; voici maintenant ce qui résulta de l'examen qu'en fit l'Académie.

La branche d'un pied de long sans fleurs, mais avec de belles feuilles, qui étoient sèchées en herbier, sous le nom de *branche de gérossier*, & les fruits mûrs mis à part dans un paquet séparé, & dûment examinés & comparés avec les figures des Auteurs les plus exactes, & sur-tout à celles de *Rumphius* qui a dessiné cet arbre sur les lieux, ont paru être précisément de la même espèce, ses feuilles elliptiques, pointues aux deux bouts, minces, entières, pointillées, opposées deux à deux en croix, sa fleur régulière, à quatre pétales, à plus de vingt étamines posées sur l'ovaire qui devient en mûrissant une écosse à une loge, couronnée par les quatre feuilles persistantes du calice, & contenant une seule amande à deux lobes; tant de caractères nous assurent que ce genre de plante a été placé exactement sous son ancien nom de *Cariophyllus.* Les fruits du muscadier enfermés dans quatre bocaux ont offert trois espèces du même genre, ceux du bocal, qui a pour étiquette le nom de *Pala parampuan*, c'est-à-dire en langage Malays, *muscade femelle*, sont assez exactement sphériques, composés d'une écorce ou brou jaunâtre, semblable à une pêche, de deux pouces de diamètre, marquée d'un sillon vertical par lequel elle s'ouvre en deux vulves très-épaisses, formant une loge qui contient une noix recouverte en partie par un *macis* charnu, jaunâtre, très-aromatique; cette noix est mince, fragile, & contient une amande à un seul lobe, en tout semblable à la muscade du commerce, avec cette seule différence qu'elle est moins brune ou plus blanchâtre, n'ayant pas été passée à l'eau de chaux; elle ressemble enfin parfaitement à celle dont *Rumphius* a donné une bonne figure dans son *herbarium amboinicum, vol. II, pl. 4*, sous le nom générique de *Pala*, & dont il a représenté quatre autres variétés ou monstruosités, quoiqu'il en connût sept; selon lui, cette muscade s'appelle en Malays, *Pala parampuan*, ou *muscade femelle*; les autres espèces qui sont sauvages & ovoïdes, plus alongées, se nomment

Pala-lakki-lakki, ou mufcades mâles ou longues, auffi les variétés du mufcadier vrai qui ont des feuilles & des fruits alongés, s'appellent-elles *Pala lakki parampuan*, ou mufcades femelles longues; le bocal *N.°* 2 de M. Poivre en préfente de femblables, attachés à une branche dont les feuilles font alternes, épaiffes, longues de trois à cinq pouces; les mufcades du bocal, *N.°* 3, étiquetées *Pala-lakki-lakki*, ou mufcades mâles ou fauvages longues, diffèrent des précédentes, en ce que leur fruit eft d'un quart plus petit, figuré en poire, ou plutôt pointu aux deux extrémités, long de deux pouces fur un pouce & demi de largeur, & c'eft celui que Rumphius a repréfenté fous le même nom, *planche 5 du même Ouvrage;* enfin le bocal *N.°* 4, contenoit fous le nom de *petite fauffe mufcade des Moluques*, des fruits femblables à de petits abricots, de feize lignes de long fur dix lignes de largeur, qui peuvent fe rapporter au moins, quant à la defcription, au *Pala* de la *planche 6* de Rumphius.

Il réfulte donc de ces examens, qu'il eft exactement vrai que la branche & les fruits du géroflier envoyés à l'Académie par M. Poivre, & préfentés par M. Provoft, font celles du géroflier du commerce; que les deux fortes de mufcades appelées en Malays, *Pala parampuan*, & *Pala-lakki parampuan*, font auffi les deux efpèces de mufcades longues & rondes, ufitées dans le commerce; qu'enfin il eft également conftaté par les procès-verbaux datés & fignés par les notables de l'Ifle de France & de celle de Bourbon, que la culture de ces deux épices a été établie par M. Poivre dans ces deux Ifles & dans les Ifles Seichelles; & nous pouvons encore ajouter qu'elle a depuis été établie dans la Colonie de Cayenne.

L'Académie a cru devoir donner avec quelque détail le précis de cette expédition, & y confacrer, pour ainfi dire, le nom de nos Argonautes François. Ceux qui firent la célèbre conquête de la Toifon-d'or, n'avoient pas certainement en vue un objet fi utile, ni peut-être de fi grands périls à redouter.

ARITHMÉTIQUE.

CETTE année parut un Ouvrage de M. l'Abbé Boſſut, intitulé: *Traité élémentaire d'Arithmétique.*

Cet Ouvrage eſt deſtiné à faire la première partie d'un Cours entier de Mathématique à l'uſage des Écoles du Génie, & c'eſt pour cette raiſon que M. l'Abbé Boſſut a mis à la tête quelques notions générales des Mathématiques, de l'objet de ces Sciences, de leur diviſion en Mathématiques pures & en Sciences Phyſico-mathématiques, ſur la différence entre les unes & les autres, des différens genres de propoſitions qu'elles emploient, de leurs axiomes, c'eſt-à-dire des vérités inconteſtables qui ſont admiſes de tout le monde, & qui leur ſervent de baſe; ce n'eſt que d'après ce court expoſé, que M. l'Abbé Boſſut paſſe à l'Arithmétique, proprement dite, qui doit faire & qui fait en effet la première partie de ſon Ouvrage.

Le premier point à diſcuter dans l'Arithmétique eſt celui de la numération, ou ce qui revient au même, l'art d'exprimer les nombres par des figures; M. l'Abbé Boſſut fait voir tout l'eſprit & toute la méthode de cet Art bien plus ſavant que ne le penſe communément la plus grande partie de ceux qui le pratiquent, & qui eſt la véritable baſe de toutes les opérations d'Arithmétique.

La quantité n'eſt en général ſuſceptible que de deux opérations, d'Addition & de Souſtraction, ce ſont auſſi les deux premières qu'enſeigne M. l'Abbé Boſſut, & qu'il donne avec le plus grand détail & la plus grande clarté.

Viennent enſuite la Multiplication & la Diviſion, qui ne ſont que d'ingénieux moyens d'abréger l'Addition répétée qu'il faudroit faire des nombres à multiplier, & la Souſtraction auſſi répétée des diviſeurs, qu'il faudroit ôter du dividende juſqu'à ce qu'on l'eût épuiſé; preſque tous ces abrégés ſont fondés ſur la numération, & c'eſt à elle auſſi que M. l'Abbé Boſſut s'attache, à les ramener pour en faire clairement connoître toute l'utilité.

Tout nombre multiplié par lui-même donne un produit qu'on nomme *le quarré* ou *la ſeconde puiſſance de ce nombre*, & ſi on multiplie encore ce quarré par le même nombre, on obtient la troiſième puiſſance de ce nombre ou le cube, &c.

Le nombre qui par ſa multiplication a formé une puiſſance, ſe nomme la *racine de cette puiſſance*, il en eſt la racine quarrée, ſi la puiſſance eſt un quarré; la racine cubique, ſi c'eſt la troiſième puiſſance ou le cube.

Pour peu qu'on faſſe attention à ce que nous venons de dire, on verra aiſément que tous les nombres ne ſont pas formés de cette manière, & qu'il y en a pluſieurs qui n'ont ni racine quarrée, ni racine cubique, &c. mais il y a toujours dans les nombres un peu conſidérables un nombre quarré ou un nombre cubique, &c. prochainement moindre, qui a une de ces racines qu'il eſt poſſible de déterminer, & c'eſt ce qu'on nomme l'*extraction des racines*, qui eſt une des plus ſavantes de l'Arithmétique.

Pour y parvenir M. l'Abbé Boſſut anatomiſe en quelque ſorte les différens produits partiaux qui compoſent un nombre quarré ou cubique. C'eſt d'après cette analyſe que ſont établies les règles qu'il donne pour cette opération, qu'il donne même avec le plus grand détail, éclairant toujours chaque article du flambeau de la théorie.

Les règles d'Arithmétique dont nous venons de parler, peuvent s'exercer ſur des nombres entiers, ou ſur des nombres qui ſont entièrement ou en partie compoſés de portions d'unités; ces portions d'unités qu'on nomme *fraction*,

& cette eſpèce de nombre dont M. l'Abbé Boſſut a ſoin de bien éclaircir la nature, exigent des opérations particulières qui ſont des ſuites de cette nature & de leur expreſſion, & toutes ces règles ſont expoſées dans le plus grand détail.

Les règles fondamentales de l'Arithmétique mériteroient certainement qu'on s'en occupât, quand elles ne ſeroient qu'un objet de ſimple ſpéculation, mais on a trouvé le moyen de les rendre utiles aux hommes pour les beſoins de la ſociété, & M. l'Abbé Boſſut donne ces applications à meſure qu'il poſe les fondemens ſur leſquels elles ſont appuyées; de ce nombre ſont les règles d'alliage, qui enſeignent à former un tout de telle valeur qu'on veut avec des parties de différentes valeurs mêlées en différentes proportions, ou à déterminer la valeur de ce tout par la connoiſſance de celles des parties conſtituantes. Vient enſuite la doctrine des proportions & des rapports, doctrine eſſentielle & ſur laquelle eſt fondée une grande partie des opérations des Mathématiques; M. l'Abbé Boſſut rappelle dans cette partie ſon lecteur aux notions les plus claires de la Nature, & s'il m'eſt permis d'uſer de ce terme, des phénomènes eſſentiels des proportions, il en expoſe les différentes eſpèces & toutes les propriétés qui en réſultent, il fait voir les différens changemens que peut ſubir une proportion ſans être détruite, & toutes les propriétés des progreſſions qui ne ſont que des proportions continues; de-là il paſſe à l'expoſition des règles de trois, ſimples & compoſées, dans leſquelles il eſt queſtion de déterminer le quatrième terme d'une proportion dont on connoît les trois autres.

La théorie des logarithmes, cette belle invention de l'illuſtre Baron de Neper, eſt une ſuite & une application heureuſe de la doctrine des proportions, elle eſt fondée ſur une correſpondance ſingulière entre la proportion géométrique, & la proportion arithmétique qui n'avoit point échappé à ce grand Mathématicien, au moyen de laquelle, & par le ſecours des tables calculées ſur ce principe, on peut convertir toutes les multiplications en additions, & toutes les diviſions en ſouſtractions. M. l'Abbé Boſſut donne la manière de conſtruire ces

tables,

tables, & leurs principaux uſages, tant pour le calcul des nombres entiers, que pour celui des fractions.

Le dernier chapitre de l'Ouvrage eſt celui dans lequel M. l'abbé Boſſut traite des changemens d'ordre & de combinaiſons; il y fait voir les différens arrangemens dont peuvent être ſuſceptibles pluſieurs quantités dont on détermine le nombre; il enſeigne, pour ainſi dire, la marche de ces combinaiſons, & donne les règles néceſſaires pour en déterminer la quantité: cet article eſt terminé par une notice des caractères que les Grecs & les Romains employoient pour exprimer les nombres, & auxquels on a ſubſtitué le chiffre Arabe, infiniment plus commode; cet Ouvrage eſt traité avec méthode, & par une ſuite néceſſaire avec netteté. Les vrais principes Métaphyſiques y ſont par-tout énoncés clairement, & ſervent de baſe aux règles qui en découlent comme de leur ſource, & on a tout lieu d'en eſpérer la plus grande utilité, ſur-tout pour ceux auxquels il eſt plus particulièrement deſtiné.

GÉOMÉTRIE.

SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

V. les Mém. p. 1.

TOUS ceux qui s'intéreſſent aux progrès des Mathématiques, ſavent combien M. le Marquis de Condorcet s'eſt occupé de l'important objet du Calcul intégral; voici une nouvelle ſuite de ſon travail.

Le Mémoire dont il eſt ici queſtion eſt diviſé en treize articles, huit ont pour objet la théorie des équations partielles. Nous avons rendu compte au Public en 1770 *, du commencement de ce même travail, & nous y ajoutames que la ſuite de ces Recherches paroîtroit dans le volume de 1772; ces huit premiers articles ſont l'exécution de cette eſpèce d'engagement, que M. de Condorcet avoit pris avec le Public; mais comme il eſt une ſuite & une application ſavante des mêmes principes que nous avons alors expoſés, nous prions le lecteur de vouloir bien y recourir.

* *V. Hiſt. 1770, p. 71.*

Les articles IX & X contiennent des vues ſur quelques eſpèces d'équations aux différences finies; mais ces articles étant preſqu'entièrement de détail, veulent être lûs dans le Mémoire même, & nous nous hâtons d'en venir aux trois derniers qui contiennent des réflexions ſur la théorie générale des équations différentielles ordinaires, ſur leur nature & ſur la manière de les trouver en ſéries lorſqu'elles ne comportent pas de l'être autrement.

M. de Condorcet y obſerve que les équations de condition, de la nature de celles que M.[rs] Euler & Fontaine ont

trouvées, apprennent à distinguer si une équation proposée est susceptible ou non d'une solution; mais non pas si cette solution peut être exprimée d'une manière finie, par des quantités analytiques.

Il reste donc, lorsqu'on a reconnu qu'une équation différentielle est possible, à examiner d'abord quelles espèces de quantités peut renfermer son intégrale, à donner ensuite le moyen de trouver cette intégrale, s'il est possible, en termes finis, à distinguer si elle admet ou n'admet pas une solution de cette espèce, & enfin à résoudre d'une autre manière celles qui n'en admettent pas.

Les deux premiers cas ont été extrêmement discutés par M. de Condorcet dans d'autres Ouvrages, c'est pourquoi il n'en occupe pas ici son lecteur, mais quant à la construction des équations qui n'admettent pas de solutions finies, il se borne ici à proposer une méthode analogue à celle que M. Euler a donnée dans son *Calcul intégral,* & fondée sur les mêmes principes.

Une méthode générale & sûre de parvenir à distinguer les équations possibles en termes finis, de celles qui ne le sont pas, seroit d'une bien grande importance; M. de Condorcet n'ose encore se flatter de l'avoir trouvée; mais en attendant il en propose une qui peut être utile dans bien des cas, & qu'il croit susceptible d'être perfectionnée: l'extrême besoin qu'on en a l'a déterminé à la publier ici, toute imparfaite que lui-même l'a trouvée, & à sacrifier en cette partie l'avantage du Géomètre à celui de la Géométrie.

SUR LES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, & sur les Équations séculaires des Planètes.

M. EULER avoit remarqué le premier, il y a environ vingt ans, qu'il y avoit des équations finies qui satisfaisoient à

V. les Mém. p. 343.

des équations aux premières différences, ſans être pour cela des cas particuliers de leur intégrale complète. Ce grand Géomètre a fait depuis différentes obſervations plus ou moins générales ſur cette matière, & M. le Marquis de Condorcet s'en eſt occupé de ſon côté dans ſes recherches ſur le Calcul intégral.

Tous les Problèmes qu'on peut propoſer à ce ſujet, ſe réduiſent, dit M. de la Place, aux deux ſuivans.

Étant donné une équation différentielle d'un ordre quelconque, d'un nombre quelconque de variables, & dont on ne connoît point l'intégrale complète.

1.° Déterminer ſi une équation d'un ordre inférieur qui y ſatisfait, eſt compriſe ou non dans ſon intégrale générale.

2.° Déterminer toutes les ſolutions particulières de cette équation différentielle.

Ce ſont ces Problèmes que M. de la Place entreprend, dans la première partie de ſon Mémoire, de réſoudre par une méthode fort ſimple.

Pour en donner une idée, ſans employer le calcul, nous nous bornerons ici aux équations à deux variables du premier ordre.

On diſtingue par le nom de *ſolution particulière*, cette équation finie qui n'eſt pas compriſe dans l'intégrale complète; pour y découvrir ce caractère, l'Auteur imagine d'abord que l'on ait conſtruit une courbe dont cette ſolution particulière ſoit l'équation, & qu'on ait employé enſuite l'intégrale complète à en conſtruire une autre rapportée à la même origine, en déterminant la conſtante arbitraire, de manière que cette ſeconde courbe paſſe par un point déterminé de la première.

Il ſeroit contraire à la ſuppoſition, qu'alors les deux courbes coïncidaſſent; donc à un même accroiſſement fini, mais indéterminé de l'abſciſſe, doivent correſpondre des accroiſſemens de l'ordonnée, différens dans les deux courbes: or, dans la ſuite différentielle qui exprime généralement la différence finie des ordonnées, le coëfficient de chaque puiſſance de la différence finie des abſciſſes ſeroit le même pour l'une

& pour l'autre courbe si elles coïncidoient, quelques-uns de ces coëfficiens doivent donc différer l'un de l'autre : comme il est facile d'obtenir ces coëfficiens en différentiant, d'une part la solution particulière donnée, & en employant de l'autre l'équation différentielle proposée, & ses différences, on pourroit déjà, sans connoître l'intégrale, déterminer si l'équation finie & donnée est ou n'est pas une solution particulière, si cette vérification ne paroissoit pas entraîner un progrès à l'infini.

Pour l'éviter, l'Auteur examine un cas où dans la première courbe, les coëfficiens dont nous venons de parler seroient tous égaux à zéro; il faudroit alors pour que les deux courbes coïncidassent, qu'ils le fussent tous aussi dans la seconde; mais on peut toujours les concevoir chacun sous la forme d'une suite ascendante ordonnée, par rapport aux puissances de l'une des variables : or, en suivant les raisonnemens de l'Auteur sur la nature des exposans dans cette suite, pour ce cas particulier, & sur la possibilité de ramener à ce cas toute équation différentielle; par le moyen de sa solution particulière, on arrivera avec lui à une équation de condition, qui ne renferme que des différences secondes, & qui doit être satisfaite toutes les fois que l'équation finie & donnée n'est pas comprise dans l'intégrale générale; ce qui renferme, par rapport aux équations à deux variables & aux premières différences, la solution du premier des deux Problèmes proposés.

Pour parvenir à la solution du second de ces deux Problèmes, M. de la Place examine de nouveau l'équation différentielle ramenée par le moyen de la solution particulière, au cas dont nous avons parlé plus haut, & il trouve que toute solution particulière est nécessairement un facteur commun à deux expressions, qu'il détermine en différentielles partielles de la valeur finie & donnée du rapport entre les différences pris dans l'équation proposée; il avoit déjà publié, mais sans démonstration, cette solution dans le *VIe vol. des Mém. des Sav. étrangers;* elle paroît visiblement suffisante pour les deux Problèmes. Quant aux discussions très-délicates dont

cette partie de ſon travail eſt remplie, aux adreſſes de calcul, & à l'application aux équations d'un ordre ſupérieur, & à un plus grand nombre de variables; tout cela doit être vu dans l'Ouvrage même. . . . . ,

La ſeconde partie du Mémoire de M. de la Place eſt abſolument diſtincte de la première, & a un objet totalement différent; il y traite des inégalités ſéculaires des Planètes, c'eſt-à-dire des variations dans les élémens de leurs orbites dont l'effet n'eſt ſenſible qu'après un temps aſſez long, & telles qu'elles doivent réſulter de leur action réciproque.

L'Auteur a donné dans *les Mémoires des Savans étrangers*, les expreſſions différentielles de ces inégalités; mais un Mémoire ſur celles *du mouvement des nœuds & de l'inclinaiſon des orbites*, adreſſé depuis peu à l'Académie par M. de la Grange, lui a fait naître l'idée d'appliquer à ſes propres recherches une transformation heureuſe, imaginée par ce grand Géomètre, & ſa méthode pour intégrer dans ce cas, & pour déterminer les conſtantes. Par ce moyen, M. de la Place arrive à des équations finies, propres à déduire immédiatement du ſyſtème de la gravitation univerſelle, non-ſeulement comme a fait M. de la Grange, les inégalités ſéculaires du mouvement des nœuds & de l'inclinaiſon des orbites, mais encore celles de l'excentricité & du mouvement des aphélies; & comme il a précédemment fait voir que les moyens mouvemens, & par conſéquent les diſtances moyennes des Planètes n'étoient aſſujetties à aucune équation ſéculaire, on aura par-là un réſultat exact & complet ſur ce genre d'inégalités.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail ſur cette matière; nous aurons occaſion de le faire lorſque le Mémoire de M. de la Grange paroîtra, & lorſque M. de la Place donnera lui-même, comme il ſe le propoſe, l'application de ces recherches aux différens corps qui compoſent le ſyſtème planétaire: ce que nous venons de dire ſuffit pour en faire ſentir toute l'importance.

SUR DES IRRATIONNELLES
De différens Ordres, avec une application au Cercle.

LA diagonale d'un quarré eſt incommenſurable à ſon côté, parce que ſon expreſſion renferme le nombre qui, multiplié par lui-même, donneroit deux au produit, & que ce nombre n'eſt pas à l'unité, comme deux nombres entiers ſont entr'eux.

V. les Mém. p. 489.

On peut dire à quelques égards, qu'on ne peut que déſigner ce nombre, & non pas l'aſſigner; cependant ſon expreſſion eſt admiſe dans le calcul avec raiſon, & non comme un pur ſymbole, mais comme une expreſſion analytique & rigoureuſe, parce que ce n'eſt pas un ſymbole arbitraire, mais que c'eſt ce que devient l'expreſſion du terme général d'une ſuite algébrique, quand on y ſubſtitue les nombres convenables. Ces caractères d'une expreſſion analytique & rigoureuſe, ſe trouvent réunis dans les nouvelles irrationnelles, dont M. Vandermonde entreprend d'expoſer la nature & quelques propriétés.

Pluſieurs perſonnes avoient déjà penſé qu'il y avoit entre la circonférence du cercle & ſon diamètre une eſpèce particulière d'incommenſurabilité; cette idée demeurée vague & ſans aucun fruit juſqu'à préſent, devient ici une conſéquence préciſe d'une recherche qui n'avoit pas le cercle pour objet, & peut intéreſſer à cette recherche des perſonnes même peu exercées dans le calcul.

Pour en donner une idée, nous remonterons avec M. Vandermonde à la génération analytique des irrationnelles ordinaires. Lorſqu'un nombre doit être multiplié pluſieurs fois par lui-même, & qu'il s'agit de l'indiquer, on ſe contente d'écrire le nombre qui doit être ainſi multiplié, & le nombre de fois qu'il auroit dû ſe trouver dans le produit ſi l'on ſe fût ſervi du ſigne de multiplication, & ce dernier nombre eſt nommé l'*expoſant* du premier; on peut regarder cet expoſant comme indéterminé, mais ſi l'on vient à le ſuppoſer fractionnaire, on a alors une expreſſion irrationnelle.

La convention précédente faite ſur un produit de nombres qui ne diffèrent point entr'eux, ou ce qui eſt la même choſe, ſur un produit de termes conſécutifs d'une ſuite dont les premières différences ſont zéro, peut être généraliſée: on peut en faire une ſemblable ſur les termes conſécutifs d'une ſuite dont les ſecondes différences, par exemple, ſoient zéro, c'eſt-à-dire qu'on peut, pour indiquer le produit d'une ſuite de nombres dont les différences ſucceſſives ne diffèrent point entr'elles, & ſoient par exemple égales à l'unité, ſe contenter d'écrire d'une part le premier de ces nombres, & de l'autre celui qui exprime combien ce produit renferme de pareils facteurs; on pourroit auſſi donner le nom d'expoſant à ce dernier nombre, & ſi l'on venoit à le ſuppoſer fractionnaire, on auroit une expreſſion irrationnelle d'un ordre plus compoſé que les précédens; c'eſt préciſément ce qu'a fait M. Vandermonde.

Il commence par chercher des équations entre ces quantités, priſes ſous une forme indéterminée, & quand il vient à y ſubſtituer des nombres, il trouve une eſpèce nouvelle d'irrationnelles qui repréſentent différens rapports; il a par ce moyen les ſuites dont ces irrationnelles ſont des termes, & celles dont elles ſont les ſommes; & ſi l'on ajoutoit à cela une méthode directe & générale d'y faire toutes les réductions poſſibles, ou en d'autres termes ſi l'on avoit leur Arithmétique, on ne peut pas douter que l'Analyſe n'en retirât une grande utilité. Mais c'eſt aſſez prouver la difficulté de trouver cette méthode que de montrer, comme a fait M. Vandermonde, ſes connexions avec la recherche du rapport exact entre la circonférence & le diamètre du cercle, car cette eſpèce d'irrationnelles offre une expreſſion nouvelle & très-ſimple de ce rapport. Ce travail, comme il eſt aiſé de le voir, eſt une nouvelle route ouverte aux recherches de Géomètres, & M. Vandermonde aura toujours un droit légitime à la gloire des ſuccès qu'on obtiendra en la ſuivant.

ASTRONOMIE.

ASTRONOMIE.

SUR LA PARALLAXE DU SOLEIL,

DÉDUITE DU PASSAGE DE VÉNUS SUR SON DISQUE,

Du 3 Juin 1769.

V. les Mém. p. 398.

LA détermination de la parallaxe du Soleil, & par conſéquent celle de la diſtance de la Terre à cet aſtre, ont été un des principaux avantages qu'on s'eſt propoſé de tirer de l'obſervation des paſſages de Vénus ſur le diſque du Soleil; mais quelque jour qu'ils aient pu jeter ſur cette matière, les Aſtronomes ne ſont pas encore abſolument d'accord ſur la quantité préciſe de cette parallaxe.

Il eſt cependant néceſſaire d'expoſer, avant tout, ce que c'eſt que cette différence, qui partage aujourd'hui les Aſtronomes, loin de jeter aucun doute ſur la préciſion de leurs obſervations, elle ne peut que leur faire le plus grand honneur; ils ſont aujourd'hui tous d'accord que la parallaxe de cet aſtre n'eſt pas plus petite que 8 ſecondes, & n'excède pas 9 ſecondes, il ne s'agit donc entr'eux que de quelques dixièmes de ſeconde de plus ou de moins; on étoit bien loin, du temps de Ptolémée, de cette préciſion, quand ce célèbre Aſtronome la fixoit à 2′ 51″.

C'eſt ce point que M. Pingré a entrepris de diſcuter dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte, & il emploie pour le décider, ſix obſervations, dont trois ont été faites en Amérique, & trois dans le Nord-eſt de l'Europe. Le

premier pas à faire dans une ſemblable recherche, étoit de s'aſſurer du degré de préciſion des obſervations qu'il employoit; celle de Taïti qu'il ſuppoſe d'après toutes les connoiſſances que nous pouvons avoir de la poſition de cette Iſle, par les $17^d\ 28'\ 55''$ de latitude Sud, & par $10^h\ 7'$. $13''$ à l'Oueſt du méridien de Paris, avoit été faite par trois Obſervateurs; M. Pingré après une diſcuſſion très-délicate, ſe détermine à faire uſage de la ſeule obſervation de M. Cook, parce qu'il eſt le ſeul qui ait bien clairement ſpécifié la formation du fil de lumière au premier contact, & ſa rupture au ſecond; ce qui donne la plus grande certitude ſur le temps de la durée entière du paſſage qui doit ſervir principalement, comme nous l'allons voir, à la recherche de la parallaxe du Soleil.

Des deux autres obſervations d'Amérique, celle de Saint-Joſeph de Californie, faite par feu M. l'abbé Chappe, & par les Officiers Eſpagnols qui l'accompagnoient *, n'a pas paru ſuſceptible d'aucune diſcuſſion eſſentielle, & M. Pingré l'adopte dans ſon entier.

L'obſervation faite au fort du Prince de Galles, près de la baie d'Hudſon, n'a contr'elle que la brume continuelle qui règne dans ces parages, & qui peut avoir nui à l'exactitude de l'obſervation de la ſortie de Vénus; ce qui auroit pu, ſelon M. Pingré, altérer la parallaxe du Soleil qu'on en auroit déduite, d'environ un tiers de ſeconde.

Les trois Obſervations faites en Europe ſont, 1.° celle de Wardhus en Lapponie, ſous la latitude ſeptentrionale de $70^d\ 22'\ 36''$, & $1^h\ 55'\ 8''$, à l'Eſt du méridien de Paris; les Obſervateurs étoient le P. Hell, le P. Sajnovics & M. Borgrewing: M. Pingré diſcute avec ſoin les trois obſervations, & s'attache abſolument à celle du P. Hell, dont l'habileté & le ſavoir ſont connus de tous les Aſtronomes: 2.° l'Obſervation faite à Kola en Lapponie, ſituée à 68 degrés de latitude Nord, & $2^h\ 2'\ 52''$, à l'Eſt du méridien de Paris: M. Rumowski,

---

* Don Vincent Doz & Don Salvador de Medina.

célèbre Aſtronome Ruſſe y avoit été envoyé exprès pour ce ſujet; il fut extrêmement contrarié par le mauvais temps, & ne put qu'eſtimer le moment du premier contact; cette circonſtance avoit d'abord engagé M. Pingré à rejeter cette obſervation, mais l'accord ſingulier de la longitude de Kola, déterminée par ce phénomène, avec celle qu'on tiroit de la fin de l'éclipſe de Soleil, obſervée le même jour, lui ont prouvé que le premier contact intérieur n'avoit pas été mal déterminé, ni le ſecond mal obſervé par M. Rumowski.

3.° Enfin la dernière Obſervation d'Europe, employée par M. Pingré, eſt celle qui a été faite à Cajanebourg, ſous la latitude Nord de $64^d\ 13'\ 30''$, & $1^h\ 41'\ 41''$, à l'Orient du méridien de Paris, par M. Planmann; il eſſuya de même un aſſez mauvais temps, cependant il obtint l'immerſion totale de Vénus, ou le premier contact intérieur & l'émerſion totale, ou le dernier contact extérieur; mais à ce dernier le bord du Soleil étoit très-ondulant, ainſi M. Pingré penſe qu'on ne peut guère tirer de cette Obſervation qu'une parallaxe approchée.

Telles ſont les obſervations que M. Pingré emploie pour la détermination du Soleil; examinons préſentement comment il les met en œuvre.

Lorſque Vénus paſſe ſur le Soleil, elle paroît décrire ſur ſon diſque une corde plus ou moins éloignée du centre; mais comme ſa diſtance à la Terre a un rapport fini avec le diamètre de la Terre, tous les Obſervateurs placés en différens points de notre globe, verront, par l'effet de la parallaxe, Vénus décrire une corde différente de celle que lui verroit décrire un Obſervateur placé au centre de la Terre, excepté celui qui auroit alors le Soleil & Vénus à ſon zénith: il eſt évident que ſi on connoît la véritable parallaxe du Soleil, on pourra en connoiſſant auſſi la poſition des Obſervateurs ſur le globe, déduire de la corde que chacun a vu décrire à Vénus ſur le diſque du Soleil, celle que l'Obſervateur placé au centre de la Terre lui auroit vu décrire, & que quelques différentes durées qu'aient eu les paſſages obſervés dans

différens lieux de la Terre, ils doivent tous donner par ce calcul une même corde pour l'obſervation du centre; mais il faut bien remarquer que ſi on y emploie une parallaxe plus grande ou plus petite que la véritable, elles donneront toutes des cordes & des durées différentes à l'obſervation ſuppoſée faite au centre de la Terre: on verra donc aiſément ſi on a pris la véritable parallaxe, & ſi on ne l'a pas on l'augmentera, ou on la diminuera, juſqu'à ce que toutes les obſervations donnent la même corde pour l'obſervation ſuppoſée faite au centre de la Terre; c'eſt une eſpèce de règle de fauſſe poſition.

Dans la vue de faciliter ce calcul, M. Pingré a dreſſé une Table, qu'il a jointe à ſon Mémoire, des effets de la parallaxe ſur les principales phaſes du paſſage de Vénus dans tous les lieux de la Terre où elle a été obſervée; en ſuppoſant la parallaxe moyenne du Soleil de 8″,5.

En appliquant cette correction à la durée du paſſage de Vénus ſur le Soleil dans chaque endroit où il a pu être obſervé, & aux phaſes obſervées dans les autres, pour les réduire au paſſage qui auroit été obſervé au centre.

Dix-ſept obſervations traitées par cette méthode lui ont donné dix-ſept réſultats, dont treize s'accordent à donner la demi-durée du paſſage obſervé au centre de la Terre, dans l'intervalle de cinq ſecondes, en employant la parallaxe de 8″,81; onze ſecondes de plus ou de moins dans la durée conclue des obſervations, augmenteroit ou diminueroit la parallaxe d'un dixième de ſeconde.

En comparant la ſeule obſervation de Saint-Joſeph de Caliſornie, avec diverſes obſervations Européennes & Aſiatiques, on obtient diverſes quantités pour la parallaxe, dont la plus grande eſt 8″,85, & la plus petite 8″,71; la différence eſt, comme on voit, d'un dixième & quatre centièmes de ſeconde.

L'Obſervation de Taïti, traitée de la même manière, donneroit une parallaxe de cinq centièmes de ſeconde plus petite. De tout ce que nous venons de dire, on peut conclure:

qu'en rejetant quelques obſervations viſiblement fautives, & ſur-tout celles qui s'appuient ſur la durée de la ſortie de Vénus, que M. Pingré regarde avec raiſon comme très-ſuſpecte; toutes les autres donnent, toute compenſation faite, la parallaxe horizontale du Soleil dans ſes moyennes diſtances, à très-peu près, de huit ſecondes & huit dixièmes. Cet important élément n'avoit pas encore été déterminé avec une ſemblable préciſion.

SUR LES
ÉCLIPSES SUJETTES AUX PARALLAXES.

L'OBJET dont il eſt ici queſtion, occupe depuis long-temps M. du Séjour, & nous avons déjà rendu compte de ſes travaux ſur ce ſujet, dans plus d'un endroit de l'Hiſtoire de l'Académie : ce Mémoire eſt une application de ſa méthode à de nouveaux Problèmes d'Aſtronomie ; cette méthode a trois grands avantages ſur les méthodes ordinaires, le premier eſt d'être extrêmement générale, & de pouvoir s'appliquer à tous les Problèmes de cette eſpèce, en ſorte qu'il ſuffira à un Aſtronome de ſe la rendre familière, pour pouvoir déduire, par ſon moyen, tous les réſultats qu'il deſirera d'obtenir; le ſecond eſt d'être ſûre & démontrée dans tous ſes points, & le troiſième eſt d'être ſuſceptible de tel degré de préciſion qu'on voudra exiger, de manière qu'elle pourra toujours être employée, quelque degré d'exactitude que puiſſent acquérir les obſervations.

V. les Mém. p. 161.

M. du Séjour l'applique dans ce Mémoire à la détermination rigoureuſe des élémens de l'Éclipſe par les ſeules obſervations; & comme le grand nombre de ces élémens complique extrêmement le calcul, il ne conſidère ici que les quatre principaux; la Longitude de l'Obſervateur, la Longitude de la Lune, ſa Latitude & ſa Parallaxe. Il les détermine par une analyſe élégante, qui le conduit à des équations fort ſimples. Il eſt vrai que dans l'état actuel de l'Aſtronomie, ces quantités étant à très-peu-près connues, il ſemble préférable d'employer les méthodes différentielles que M. du Séjour a données dans

le Volume précédent; mais si cette partie de son travail est d'une utilité moins directe pour les Astronomes, elle est une de celles qui doivent le plus intéresser les Géomètres, par la finesse des moyens qu'il met en usage; car il faut beaucoup d'adresse & de sagacité pour démêler dans la multitude immense des calculs que ces recherches entraînent après elles, les équations les plus simples auxquelles il soit possible de parvenir. C'est un préjugé de la part de quelques Géomètres de regarder comme facile tout ce qui ne tient point à l'analyse infinitésimale; c'en est un, de la part de quelques Astronomes, d'imaginer que l'usage de l'analyse est plus long & plus pénible que les méthodes indirectes dont ils se servent. Nous invitons ceux qui pourroient être dans cette opinion, à lire le Mémoire de M. du Séjour.

SUR DES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES, Faites à Senones.

V. les Mém. p. 456.

DES Observations Astronomiques, faites dans un lieu où il n'y en avoit jamais eu de faites, sont une espèce de conquête pour l'Astronomie & pour la Géographie.

La ville de Senones est la capitale de la Principauté de S. A. S. le Prince Louis règnant de Salm-Salm; M. Messier né sujet du Prince, voulut y aller passer les vacances de l'Académie, mais comme il comptoit y faire plusieurs observations, il avoit emporté avec lui ses instrumens, excepté un quart-de-cercle, parce qu'il comptoit sur un très-bon demi-cercle qu'avoit le Prince, mais par malheur il étoit absent, & avoit emporté le demi-cercle; il ne put lever cet inconvénient qu'en faisant un voyage à Nanci, où feu M. le Chevalier de Solignac, Secrétaire de l'Académie de cette ville, lui procura un très-bon demi-cercle, garni de lunettes, & très-propre pour les observations qu'il projetoit de faire à Senones.

Il établit son observatoire dans un jardin placé près du château du Prince, où il y avoit une excellente pendule à

ſecondes, de Julien le Roi; & l'inſtrument ayant été bien vérifié, & la pendule réglée par des hauteurs correſpondantes du Soleil, priſes pendant pluſieurs jours, il commença par s'aſſurer de la latitude du lieu par des hauteurs méridiennes du bord ſupérieur du Soleil, & par des hauteurs de l'étoile polaire; dix-huit obſervations lui ont donné par un milieu, la hauteur du Pôle Nord à Senones, de 48ᵈ 23′ 6″ 36‴, & par conſéquent celle de l'équateur de 41ᵈ 36′ 53″ 24‴.

Pour déterminer la différence de longitude entre Senones & Paris, M. Meſſier obſerva huit éclipſes des ſatellites de Jupiter qui, comparées aux obſervations faites à Paris & en pluſieurs autres endroits, donnent la différence des méridiens entre Senones & Paris, de 18′ 37″ à l'Orient de ce dernier.

Il devoit y avoir le 11 Octobre une éclipſe de Lune, & ce n'étoit pas un phénomène à négliger; mais Senones eſt ſituée dans un baſſin environné de montagnes, & la Lune devant ſe lever éclipſée, M. Meſſier choiſit pour faire ſon obſervation la montagne d'Ortomont, placée au milieu du Val de Senones, & au Sud-eſt du lieu où il obſervoit; il s'aſſura par des triangles que le ſommet de la montagne étoit éloigné du Château de 1442 toiſes, & environ à 1000 toiſes de la méridienne du lieu de ſes obſervations, & qu'il étoit élevé au-deſſus du ſol de Senones de 1065 pieds.

L'Obſervation fut faite par un aſſez beau temps, & indépendamment des phaſes Aſtronomiques, M. Meſſier remarqua que le diſque de la Lune éclipſée, qui ordinairement eſt apparent, ne put être aperçu que lorſque cette Planète fut élevée de pluſieurs degrés; & que lorſque le recouvrement de lumière fut une fois commencé, les taches qu'on avoit juſque-là vues aſſez ſenſiblement, devinrent confuſes, & ne purent plus être aperçues qu'avec beaucoup de difficulté.

L'Obſervation de cette Éclipſe, comparée avec celles qui en ont été faites dans pluſieurs endroits, dont la poſition eſt bien connue, donne la différence de longitude entre Senones & Paris, de 18′ 23″, à l'Orient de Paris, différente ſeulement de 14 ſecondes de 18′ 37″ qu'avoient donné pour la même

longitude les Obſervations des Satellites, M. Meſſier croît donc qu'on peut ſans héſiter adopter 18′ 30″ pour la différence de longitude entre Senones & Paris.

Il ne s'eſt pas borné à faire ſeulement à Senones des Obſervations Aſtronomiques. Deux baromètres conſtruits avec toutes les précautions néceſſaires, ſuppléèrent au défaut d'un baromètre de voyage qu'il avoit emporté de Paris, & qui fut caſſé ſur la route.

M. Meſſier obſerva exactement la hauteur du mercure dans le baromètre trois fois par jour, à 7 heures du matin, à midi & à 10 heures du ſoir, pendant les mois d'Octobre & de Novembre. Son but, dans cette recherche, étoit de déterminer l'élévation du ſol de Senones au-deſſus de celui de Paris, & au-deſſus du niveau de la mer.

Dans cette vue, il s'étoit ménagé une correſpondance; un de ſes amis faiſoit aux mêmes heures que lui les mêmes obſervations à Corbeil, petite ville ſituée ſur la Seine à ſept lieues au-deſſus de Paris.

Comme on connoît exactement, par les nivellemens de feu M. l'Abbé Picard, la pente de la rivière de Seine, depuis Corbeil juſqu'à Paris, & la hauteur du ſol de ce dernier au-deſſus de la mer, il étoit facile, en ſuivant les règles données par feu M. Bouguer *, de déterminer la hauteur du ſol de Senones au-deſſus de ces différens endroits, & c'eſt ce qu'a fait M, Meſſier; il réſulte de la comparaiſon de ſes Obſervations à Senones, avec celles de Corbeil, que cette ville eſt plus élevée que Corbeil de 807 pieds, de 825 plus que la Seine à Paris, & enfin de 950 pieds au-deſſus du niveau de la mer.

* Voyez Hiſt. 1753, p. 39.

Il réſulte donc des Obſervations de M. Meſſier, une détermination des plus exactes de la poſition de la ville de Senones, détermination d'autant plus importante que les ſoins que le Prince règnant prend pour faire fleurir les Sciences & les Arts dans ſes États, donnent tout lieu d'eſpérer que cette ville ſera plus d'une fois citée dans les faſtes & dans l'Hiſtoire de l'Académie.

SUR

SUR LE
PASSAGE DE MERCURE
SUR LE SOLEIL,
Du 9 Novembre 1769.

V. les Mém. p. 445.

IL n'y a pas encore bien long-temps que les Tables de Mercure ont été portées à un point de précision suffisant pour prédire les passages de cette Planète sur le disque du Soleil; elles ne doivent cette exactitude qu'aux observations de ces passages, qui ont été faites depuis le renouvellement de l'Astronomie. Celui dont il est ici question est le treizième; il n'avoit pas été possible de l'observer en Europe; mais comme il l'avoit été dans l'Amérique & dans les Indes, M. de la Lande a cru devoir se servir de ces Observations pour constater, ou pour augmenter la précision des élémens qui servent de base aux Tables qu'il a données de cette Planète.

Les Observations faites en Asie sont au nombre de deux; la première a été faite à Batavia, par M. Mohr; & la seconde à Manille dans les Philippines, par M. Véron, jeune Astronome, Élève de M. de la Lande & qui est mort aux Indes, où il étoit retourné depuis avec M. de Bougainville. Les Observations d'Amérique sont celles qui ont été faites, 1.° à Norriton en Pensylvanie, par M.rs Lukens, Rittenhouse & Biddle; le premier avec un télescope de deux pieds & demi qui grossissoit cent quarante-quatre fois; le second avec une lunette ordinaire, à peu-près de la même force; & le troisième avec une lunette de 36 pieds, qui faisoit le même effet; ils observèrent tous trois le premier contact au même instant, & le contact intérieur fut déterminé par tous trois dans un espace de deux secondes. 2.° A Philadelphie, par M.rs Williamson, Shippen, Evans & Ewing avec la même exactitude.

Pour pouvoir réduire ces obſervations au méridien de Paris, il falloit connoître la poſition des lieux où elles avoient été faites. La latitude de Batavia étoit déterminée, à très-peu près, par les obſervations de M. Mohr, de 6^d 12′ Sud, ce qui eſt ſuffiſant pour cette recherche ſur laquelle la latitude du lieu de l'obſervation n'a que peu d'influence; mais la longitude de ce lieu, bien plus néceſſaire au deſſein de M. de la Lande, étoit totalement inconnue; heureuſement, M. Mohr y avoit obſervé le paſſage de Vénus, & M. de la Lande s'en eſt ſervi pour remédier à cet inconvénient en ſe ſervant de la parallaxe du Soleil de huit ſecondes & demie, telle qu'elle a été déterminée d'après preſque toutes les obſervations de ce phénomène. M. de la Lande réduit l'obſervation de M. Mohr à ce qu'elle auroit dû paroître à un Obſervateur placé au centre de la Terre; ayant fixé par ce moyen l'heure du milieu de la durée de ce phénomène à Batavia, & ayant calculé de même les obſervations faites à Paris, pour les réduire au centre de la Terre, il en tire la longitude de Batavia de 124^d 28′ 15″, en ſuppoſant celle de Paris de 20 degrés, comme le font nos Géographes françois.

L'obſervation de Mercure, faite à Batavia, pouvant être par ce moyen réduite au méridien de Paris, M. de la Lande a calculé, par ſes Tables, avec la plus grande préciſion toutes les phaſes obſervées de ce phénomène, & il trouve que, toute réduction faite, ce calcul tiré des Tables ne diffère que d'environ 2 ſecondes de l'annonce qui en avoit été publiée dans la *Connoiſſance des Temps de 1769*, d'après les mêmes Tables.

Les deux obſervations d'Amérique, traitées de la même manière, donnent pour le milieu du paſſage une différence de 14 ſecondes, qui pourroient même être réduites à 4 ſecondes, en ſuppoſant une réduction très-vraiſemblable à faire ſur une des phaſes obſervées à Batavia; mais quand bien même on admettroit l'erreur de 14 ſecondes dans ſon entier, il n'en réſulteroit qu'une erreur d'environ une ſeconde & demie dans la longitude de Mercure. Il réſulte donc de cette diſcuſſion qu'on peut compter ſur l'exactitude des Tables de Mercure

données par M. de la Lande, & ſur les paſſages de cette Planète ſur le diſque du Soleil, qui doivent arriver d'ici à 1894, & qui ont été calculés ſur ces mêmes Tables, *dans ſon Aſtronomie.* On étoit bien loin, il y a moins d'un ſiècle, d'oſer même eſpérer ce degré de préciſion, il eſt dû aux recherches que M. de la Lande a faites ſur la théorie de cette Planète, & dont l'Académie a rendu compte depuis pluſieurs années dans ſon Hiſtoire.

SUR LA MANIÈRE
DE
FORMER DES TABLES DES PLANÈTES,
Par les ſeules Obſervations.

NOUS ne pouvons obſerver que des faits particuliers, & lorſqu'en combinant une longue ſuite d'Obſervations, on parvient à découvrir la loi d'un phénomène, cette loi n'eſt à la rigueur que l'expreſſion la plus ſimple qui puiſſe renfermer tous les faits obſervés.

V. les Mém. p. 513.

Plus le nombre de ces faits eſt grand, plus il devient probable que les autres faits du même genre ſeront aſſujettis à la même loi.

Nous diſons que la formule qui exprime la loi, doit être la plus ſimple de celles qui ſatisfont à toutes les obſervations; car dès que le nombre des faits eſt fini, il y a certainement une infinité de formules qui peuvent également les renfermer tous.

La recherche des loix générales de la Nature peut donc ſe réduire à ce Problème : *Un nombre de faits étant donné, trouver la formule la plus ſimple qui puiſſe les repréſenter.* Il eſt abſolument du même genre que celui-ci. *Un nombre de points par leſquels doivent paſſer une ſurface ou une courbe étant donné, trouver la courbe ou la ſurface la plus ſimple qui puiſſe paſſer par tous ces points.*

M. de la Grange eſt le premier qui ait eſſayé de donner une ſolution directe de ce Problème; il ne l'applique ici qu'aux obſervations des Planètes.

Les Anciens avoient trouvé, qu'en ſuppoſant aux corps céleſtes une orbite circulaire, on ſatisfaiſoit aux obſervations avec aſſez d'exactitude, du moins pour un certain temps, & que ſi on faiſoit rouler ces orbites ſur d'autres cercles ils repréſenteroient les obſervations avec une préciſion beaucoup plus grande, & pour un bien plus grand nombre de révolutions. Il n'y a pas même lieu de s'en étonner; ils ſe rapprochoient par-là, ſans le ſavoir, de la théorie beaucoup plus ſimple de Képler, de laquelle nous allons parler.

Celui-ci trouva un moyen plus ſimple d'exprimer ces irrégularités des mouvemens des Planètes, en donnant une forme elliptique à leurs orbites. Il ſut enſuite exprimer, par des loix d'un ſeul terme, les inégalités de chaque Planète, & les rapports de celles des différentes Planètes, avec les dimenſions de leurs orbites; mais ces règles ſi connues, & qui ont fourni à Newton les faits ſur leſquels il a appuyé ſa ſublime théorie de la gravitation univerſelle, Képler les a découvertes par la ſeule force de ſon génie. Depuis, c'eſt de la théorie même de la gravitation que l'on a déduit les loix plus préciſes qu'obſervent les Planètes, & perſonne avant M. de la Grange n'avoit encore tenté de déduire ces loix des obſervations ſeules, & par une méthode analytique & directe.

Il établit ici deux principes: l'un que toutes les inégalités du mouvement des Planètes peuvent être repréſentées par des ſéries formées par les *ſinus*, les *coſinus*, les *puiſſances*, ou les *exponentielles* ſimples de quantités qui croiſſent uniformément; & en effet, la théorie de la gravitation conduit à des formules de ce genre, & l'expérience a prouvé qu'avec un petit nombre de termes d'une de ces ſéries, on parvenoit à repréſenter, ſans erreur ſenſible, un très-grand nombre d'obſervations: l'autre principe eſt que toute ſérie de la forme que nous venons de dire, peut être regardée comme une ſérie récurrente.

Suppoſons donc que l'on ait des obſervations faites à des diſtances égales, & que les valeurs de la quantité dont on cherche l'expreſſion ſoient données en nombres d'après les obſervations, on aura une ſuite de nombres, & il ne s'agira plus que de chercher la ſérie récurrente la plus ſimple, dont cette ſuite de nombres repréſente les coëfficiens, & l'expreſſion générale de cette ſérie, qui, comme il eſt aiſé de le voir, ne peut monter à un degré plus élevé que la moitié du nombre des obſervations. Nous venons de rendre compte de tout le géométrique de ce Mémoire, & quand M. de la Grange en ſeroit reſté là, c'étoit toujours une carrière nouvelle & immenſe qu'il ouvroit aux Mathématiciens; mais il ſavoit que dans les recherches de ce genre, où l'on a pour but l'utilité des Sciences phyſiques, un problème n'eſt pas toujours réſolu quand il ne l'eſt que géométriquement, & qu'il faut encore que la ſolution ait une marche aſſez ſimple & aſſez régulière pour qu'elle puiſſe être employée dans la pratique, pour que, par exemple, dans le cas préſent, tous les Aſtronomes, tous les Phyſiciens puiſſent ſe la rendre familière; c'eſt ce que M. de la Grange a exécuté par une application très-élégante de la théorie des fractions continues, dont il a fait déjà, dans la ſolution de tant d'autres Problèmes, un uſage ſi heureux.

Les valeurs données par l'obſervation ne peuvent être qu'approchées; il n'eſt donc nullement néceſſaire que l'équation ſatisfaſſe rigoureuſement aux obſervations; il ſuffit que l'expreſſion générale qu'on trouvera les repréſente à une erreur près, qui ſoit plus petite que celle qui a pu être commiſe dans les obſervations mêmes. M. de la Grange donne le moyen d'apprécier ces erreurs avec la plus grande préciſion, & de les rendre auſſi petites qu'il eſt poſſible.

Nous n'avons pas beſoin d'en dire davantage pour faire ſentir toute l'importance de cet Ouvrage. C'eſt ce qui a déterminé l'Académie à le faire paroître en 1772; quoique M. de la Grange ne le lui ait envoyé qu'en 1773, elle n'a pas voulu retarder plus long-temps l'utilité que les Aſtronomes

& les Phyſiciens peuvent retirer de cet Ouvrage, qui, toutes les fois que les loix de la Nature ſeront ſuſceptibles d'être exprimées par une formule aſſez ſimple, leur donne une méthode ſûre de les déterminer, ſans avoir beſoin d'autres connoiſſances que de ſavoir faire des diviſions algébriques.

En effet, quoique l'Auteur, qui s'eſt ſeulement occupé d'appliquer ſa méthode aux obſervations Aſtronomiques, ne ſoit entré dans un grand détail que ſur les ſéries de *ſinus* & de *coſinus;* cependant la méthode générale expoſée au commencement de ſon Mémoire, s'applique ſans difficulté à tous les autres cas. Il y a peu d'ouvrages d'analyſe plus utiles au progrès de la Phyſique, & plus propres à produire une révolution dans l'étude de cette Science.

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires :

V. les Mém. p. 159. L'Obſervation de l'Éclipſe de Lune du 11 Octobre 1772, faite à Paris : Par M. le Monnier.

P. 325. Les Obſervations Aſtronomiques, faites en 1772, à Périnaldo, dans le Comté de Nice : Par M. Maraldi.

P. 333. Les Obſervations de la première Comète de 1760, faites à Paris : Par M. Meſſier.

P. 378. L'Obſervation de quelques phaſes de l'éclipſe de Lune du 11 Octobre 1772, faite à Fontainebleau : Par M. le Cardinal de Luynes.

P. 421. Et les Obſervations de la ſeconde Comète de 1760, faites à Paris : Par M. Meſſier.

CETTE année parut un Ouvrage de M. de la Lande, intitulé : *Mémoire ſur le paſſage de Vénus, obſervé le 3 Juin 1769, pour ſervir de ſuite à l'explication de la Carte publiée en 1764.*

Ce Mémoire contient trois articles principaux, le premier eſt un recueil de toutes les Obſervations faites dans notre

continent, ſoit en Europe, ſoit en Aſie; & le ſecond contient les Obſervations de ce même phénomène, faites en Amérique: il eſt à remarquer que dans ce recueil, M. de la Lande ne fait mention que des Obſervations des Contacts, qui ſont en effet les ſeules qu'il emploie dans cet ouvrage, renvoyant pour les autres aux Mémoires des différentes Académies qui les ont publiées.

Le troiſième article eſt le principal de l'ouvrage; c'eſt dans cette partie qu'il diſcute les Obſervations pour en tirer la parallaxe du Soleil, & qu'il donne pluſieurs détails hiſtoriques ſur les grands voyages que ces Obſervations ont occaſionnés; il y joint la diſcuſſion des Obſervations de l'Éclipſe de Soleil, du 4 Juin, qui, dans toute l'Europe & dans une partie de l'Aſie, a ſervi à déterminer les longitudes des lieux où les Obſervations du paſſage ont été faites.

C'eſt encore dans cet article que M. de la Lande explique, dans un plus grand détail qu'il ne l'avoit fait dans ſon Aſtronomie, le calcul des parallaxes pour le paſſage de Vénus, il donne un exemple de toute la ſuite de ce calcul, & les réſultats de toutes les Obſervations importantes, qu'il a calculées avec les attentions les plus ſcrupuleuſes. Il fait voir que huit de ces Obſervations les plus concluantes & les plus directes, s'accordent à donner $8'' \frac{1}{2}$, pour la parallaxe du Soleil dans ſes moyennes diſtances, ſoit qu'on prenne les durées entières, ſoit qu'on joigne l'entrée obſervée à Paris, avec la ſortie obſervée à l'orient de cette ville; enfin le Mémoire eſt terminé par les dernières concluſions qu'on peut tirer de ce paſſage pour la conjonction, pour la latitude, pour le lieu du nœud de Vénus, pour les vrais diamètres, les maſſes & les diſtances des autres planètes. On peut regarder ce Mémoire comme un recueil intéreſſant de ce qu'on pouvoit faire, pour tirer le meilleur parti poſſible de l'Obſervation la plus importante que les Aſtronomes aient faite depuis long-temps.

CETTE même année parut un ouvrage de M. Caſſini fils, intitulé : *Voyage en Californie pour l'Obſervation du paſſage de Vénus ſur le diſque du Soleil, du 3 Juin 1769, par M. l'Abbé Chappe d'Auteroche.*

Perſonne de ceux qui s'intéreſſent au progrès des Sciences, & ſur-tout de l'Aſtronomie, n'ignore aujourd'hui que ce célèbre Aſtronome paya de ſa vie la gloire d'avoir contribué, par une des plus complètes Obſervations qui aient été faites de ce phénomène, à la détermination de la parallaxe & de la diſtance du Soleil.

L'Académie en recevant les papiers de M. l'abbé Chappe, qui lui furent remis le 7 Décembre 1770, chargea M. Caſſini fils, de rédiger ces Obſervations, de les mettre en état d'être données au Public, & de ſuppléer, autant qu'il ſe pourroit, au défaut de l'Auteur; l'Ouvrage dont nous avons à rendre compte eſt le fruit de ce travail.

La première Partie contient la relation hiſtorique du voyage de M. l'abbé Chappe, depuis ſon départ de Paris juſqu'à ſon arrivée en Californie. Les Journaux de cet Académicien ne contenoient que très-peu de détails, & formoient un itinéraire fort ſec. M. Caſſini y a ſuppléé par ceux qu'il a tirés de M.rs Noel & Pauly, qui l'avoient accompagné, qui ſe trouvoient en état de donner des éclairciſſemens, de faire part de leurs remarques, & de ſe rappeler les différens évènemens de la route : il avertit cependant qu'il n'a uſé de ce ſecours qu'avec diſcrétion, & qu'ayant cru devoir, pour rendre la narration plus vive, faire parler M. l'abbé Chappe; il avoit toujours eu pour point de vue, de ne faire dire à cet Académicien, que des choſes dignes de lui. La relation très-intéreſſante de ce voyage, eſt terminée par le récit encore plus intéreſſant de la mort de M. l'abbé Chappe; ce morceau eſt d'autant plus digne d'être lû, qu'il ſert, pour ainſi dire, de ſupplément à l'éloge de cet Académicien, dans lequel nous n'avons pu inſérer aucune des circonſtances de ce funeſte évènement, qui nous étoient alors totalement inconnues.

On

On trouve à la ſuite de cette Relation, différentes Obſervations & différentes Expériences phyſiques, faites dans le cours de ce Voyage, avec leurs réſultats; des Obſervations de la déclinaiſon & de l'inclinaiſon de l'Aiguille aimantée, faites en différens parages; des Expériences du Thermomètre plongé à différentes profondeurs dans l'eau de la mer, & une ſuite aſſez complète d'Expériences ſur la peſanteur des différentes eaux, & principalement ſur celle de l'eau de la mer à différentes latitudes. Ce dernier article a été rédigé par M. Lavoiſier, que M. Caſſini avoit prié de s'en charger, comme un des Académiciens qui avoit le plus de connoiſſances dans cette matière.

On trouve encore dans cet Ouvrage une lettre écrite à l'Académie, par Don Joſeph-Antonio de Alzate y Ramirez, Correſpondant de l'Académie, qu'elle a bien voulu permettre à M. Caſſini d'y inſérer, contenant pluſieurs détails très-intéreſſans ſur l'Hiſtoire Naturelle des environs du Mexique. Cette lettre accompagnée de pluſieurs remarques de M. Fougeroux, eſt une eſpece de dédommagement offert au Public, pour les Obſervations d'Hiſtoire Naturelle que M. l'abbé Chappe s'étoit propoſé de faire, & dont la mort de cet Académicien l'a privé.

La ſeconde Partie de l'Ouvrage contient tout ce qui a rapport à l'Aſtronomie & au paſſage de Vénus ſur le diſque du Soleil. Les Obſervations y ſont diſcutées, réduites & préſentées avec tout le ſoin, l'ordre & la clarté poſſible ; à la ſuite de ces Obſervations, on trouve des éclairciſſemens ſur la poſition de la Vera-Cruz & de Mexico; ainſi que la deſcription de la route qu'on tient pour aller à travers le Mexique, de la côte du golfe à celle de la mer Vermeille, article d'autant plus intéreſſant, qu'il en réſulte la néceſſité de rapprocher le Mexique & toute cette partie de l'Amérique ſeptentrionale, d'environ 4 degrés des côtes occidentales de l'Europe. C'eſt ici que ſe termine ce qui appartient à M. l'abbé Chappe. Le reſte de l'Ouvrage contient une hiſtoire abrégée de la parallaxe, que M. Caſſini a cru pouvoir ſe permettre

d'ajouter aux Obſervations de la parallaxe, & dont le Public ne peut que lui ſavoir gré. Après toutes les tentatives qui ont été faites depuis un ſiècle à ce ſujet : après les grands & nombreux Voyages qui ont été entrepris, & qui viennent d'être exécutés, à l'occaſion des paſſages de Vénus ſur le Soleil ; il étoit bien naturel de préſenter au Public un tableau des uns & des autres, de l'inſtruire du ſuccès de nos dernières recherches, & de le mettre en état de juger de leur importance. M. Caſſini parle d'abord des premières opinions ſur la parallaxe du Soleil, & ſur la diſtance de cet aſtre à la Terre. Les Philoſophes anciens n'en jugeoient que par conjecture. Ariſtarque de Samos fut le premier qui, par une méthode ingénieuſe, établit une opinion plus raiſonnable, & montra que la parallaxe du Soleil n'excédoit pas trois minutes ; Ptolémée, long-temps après, la détermina de 2′ 51″, en employant la méthode d'Hipparque : enfin Vendelinus, vers le milieu du dernier ſiècle, y fit un bien plus grand retranchement, & la réduiſit à 15″. Tel eſt le précis de ces recherches juſqu'au moment de l'établiſſement de l'Académie royale des Sciences, cette époque fut, pour ainſi dire, le ſignal des principales découvertes en tout genre ; la parallaxe du Soleil devint l'objet des travaux des Aſtronomes de l'Académie naiſſante : on avoit déjà reconnu que cette parallaxe étoit une quantité ſi petite, qu'elle pouvoit être anéantie ou couverte par l'erreur des Obſervations ; en conſéquence on changea de route & de méthode, & au lieu de chercher directement la parallaxe du Soleil, on s'appliqua à la déduire de celle de quelque planète, où cette quantité fût plus ſenſible. Le Voyage de M. Richer à Cayenne, en 1672, & la poſition avantageuſe de Mars apogée & en oppoſition, offroient l'occaſion la plus favorable de déterminer la parallaxe de cette planète. Les méthodes les plus ingénieuſes, les obſervations les plus délicates furent employées à cette recherche, d'où il réſulta que la parallaxe de Mars étoit de 25″, & par conſéquent celle du Soleil de 9″ $\frac{1}{2}$, ce fut du moins celle que M.rs Flamſteed & Dominique Caſſini adoptèrent, d'après les Obſervations ; quelques Aſtronomes eurent d'abord de la peine

à adopter ce résultat, regardant les méthodes qu'on avoit employées comme peu susceptibles d'exactitude. Cependant lorsque par la suite on en a fait usage, dans des circonstances favorables, elles ont toujours donné à peu-près le même résultat; c'est-à-dire de 9″ $\frac{1}{2}$ à 10″, de manière que par un tacite consentement, les Astronomes s'étoient comme fixés à cette quantité, jusqu'au moment du passage de Vénus, qui devoit décider la question; plusieurs Astronomes même croyoient que l'Observation de ce phénomène, n'apporteroit qu'un léger changement à la quantité déja établie : enfin le premier passage de Vénus, si long-temps attendu arriva, les Astronomes ne négligèrent rien pour en profiter. M. Cassini rend compte de leurs préparatifs, & des Voyages qui furent entrepris à ce sujet ; il rassemble dans une table toutes les Observations, il en donne les résultats, explique les différentes méthodes par lesquelles on les a obtenus; mais ce tableau présente un fait auquel on ne se seroit sûrement pas attendu, il n'en résulte qu'une augmentation d'incertitude. La parallaxe du Soleil qui avoit été renfermée entre 9″ $\frac{1}{2}$ & 10″ $\frac{1}{4}$, se trouva alors entre 8″ $\frac{1}{2}$ & 10″, en sorte que l'incertitude qui n'étoit que de $\frac{3}{4}$ de secondes, se trouva d'une seconde & demie, & la question seroit demeurée indécise, sans le second passage arrivé en 1769, qui a fixé enfin la parallaxe du Soleil dans ses moyennes distances, à 8″ $\frac{1}{2}$.

M. Cassini entre, par rapport à ce second passage, dans les mêmes détails où il étoit entré pour le premier, il n'omet rien de ce qui peut servir à mettre le lecteur au fait de ce qu'il peut desirer de savoir sur cette matière. On peut dire que M. Cassini a peint son cœur dans la première partie de son Ouvrage, & son esprit & son savoir dans la seconde.

IL avoit paru l'année dernière 1771, un Ouvrage de M. le Monnier, intitulé: *Astronomie Nautique Lunaire, première Partie.* L'absence de l'Auteur, & différentes circonstances ayant empêché qu'il n'en fût fait mention dans le volume de 1771, nous nous hâtons de réparer cette omission.

Il n'y a aucun Aſtronome qui ignore que le célèbre M. Halley a fait voir, par une demi-période d'obſervations de la Lune, que les erreurs des Tables de la Lune revenoient les mêmes au bout d'une période de dix-huit ans. M. le Monnier, perſuadé que l'armement de la Frégate deſtinée à la recherche des Longitudes, ſeroit achevé au printemps dernier, n'avoit pas voulu la laiſſer partir ſans ce ſecours, & dans cette première partie de ſon Ouvrage, il donne les erreurs des Tables de la Lune dont il s'eſt ſervi pour l'année 1753, qui répond, dans la période en queſtion, à l'année 1771. Les détails des obſervations faites à chaque Lunaiſon de 1753, pour conſtater ces erreurs, ſont développés au commencement & à la fin de cet Ouvrage.

Cet objet n'eſt pas le ſeul que l'Auteur ſe ſoit propoſé d'y remplir. On trouve dans ſon Ouvrage de nouvelles Tables du *nonagéſime* & de ſa hauteur ſous l'équateur, ſous les tropiques, & ſous le parallèle de 20 degrés, qui eſt celui des îles de France & de Saint-Domingue. On ſait que la connoiſſance de ce point eſt de la plus grande importance, parce que lorſque la Lune eſt au 90.e degré de l'écliptique, au-deſſus de l'horizon, le vertical & le cercle de longitude ſe confondent, & que par conſéquent la parallaxe n'altère en aucune façon ſa longitude. Ce travail de M. le Monnier peut être de la plus grande utilité pour l'attérage de ces Iſles.

Il eſt ſouvent impoſſible d'avoir la hauteur du Soleil au moment où il paſſe par le méridien; pour ſuppléer au défaut de cette obſervation ſi néceſſaire, il faut ſavoir de combien le Soleil baiſſe dans un temps donné après ſon paſſage par le méridien. Pour y parvenir plus facilement, M. le Monnier a calculé des Tables de l'abaiſſement du Soleil, devant & après midi, ſous la ligne équinoxiale, ſous les tropiques, & ſous d'autres latitudes, & il y a joint des méthodes pratiques très-abrégées pour déterminer l'abaiſſement du Soleil vers midi, dans les lieux qui ne ſont pas compris dans les Tables, lorſqu'on n'a pas pu ſaiſir l'inſtant précis de la médiation.

Ces Tables ſont ſuivies de méthodes faciles pour calculer

la parallaxe de la Lune en latitude, & enſuite des Tables du Soleil de M. le Monnier, jointes à quelques remarques qui y ſont relatives; elles ſont accompagnées d'un ſupplément aux époques des moyens mouvemens de la Lune, imprimées dans les Tables des Inſtitutions, avec un Diſcours abrégé ſur l'accélération du mouvement de cette planète.

Pour ne rien laiſſer à deſirer, M. le Monnier ajoûte à ſon Ouvrage une Table de la poſition des principales étoiles pour le commencement de 1770, & comme il y a joint les poſitions des mêmes étoiles en 1750; la comparaiſon des deux poſitions, donne lieu à diverſes conſidérations ſur le mouvement réel de ces étoiles, & ſur leur variation en latitude.

L'Ouvrage eſt terminé par des combinaiſons & des réflexions intéreſſantes ſur les réfractions aſtronomiques, dans les Zones torride, glaciale & tempérée; les réfractions, par exemple, ſont plus grandes à Cayenne, ſur la mer du Nord, qu'au niveau de la mer du Sud, quoique le baromètre paroiſſe indiquer le contraire. On peut aiſément juger de l'utilité d'un Ouvrage qui contient tant de choſes néceſſaires, raſſemblées en ſi peu d'eſpace.

GÉOGRAPHIE.

SUR LES VOYAGES À CANTON,

PAR LE CAP DE BONNE-ESPÉRANCE ou PAR LE NORD.

V. les Mém. p. 452.

IL n'eſt preſque perſonne de ceux qui s'intéreſſent aux progrès de la Géographie & de la Navigation, qui ne ſoit informé des tentatives qu'on a faites pour trouver dans les mers du nord, un paſſage par lequel on pût aller au Japon & à Canton, ſitué ſur la côte orientale de la Chine, ſans paſſer par la route ordinaire du cap de Bonne-eſpérance, & de la mer des Indes.

La grande diminution de chemin qu'on obtiendroit en effet par cette route, a pu facilement en impoſer & animer à la recherche de ce paſſage; mais quand on l'auroit effectivement trouvé, ſoit en paſſant du côté de l'eſt, ſoit par-derrière le nouveau Groënland, & paſſant par le détroit du nord, découvert par les Ruſſes; M. le Gentil, qu'un long ſéjour dans les mers de l'Inde, a mis au fait de toutes les circonſtances qu'il faut choiſir pour y naviguer ſûrement, prétend que le Voyage en Chine, par ce paſſage, ſeroit auſſi long que celui qu'on y feroit par la route ordinaire, en paſſant par le cap de Bonne-eſpérance. Tous ceux qui ont fréquenté les mers de l'Inde & de la Chine, ſavent que les vents y ſoufflent conſtamment de l'oueſt, du ſud-oueſt & du ſud, depuis la mi-Mai juſqu'à la mi-Octobre, & que pendant le reſte de l'année ils ſoufflent conſtamment du nord, du nord-eſt &

de l'eſt; c'eſt ce qu'on nomme *la mouſſon de l'eſt* & *la mouſſon de l'oueſt :* on profite de ces vents aliſés pour les voyages, & on ne peut, ſans s'expoſer aux plus grands dangers, entreprendre des voyages contre mouſſon. Suppoſons donc qu'un Vaiſſeau ait débouché du paſſage du nord à la mi-Août, ce qui eſt à peu-près le temps où ces mers ſont libres de glaces; il ne peut pas entrer dans les mers de Chine, avant que la mouſſon de l'oueſt ſoit finie, & que celle de l'eſt ait commencé, ce qui n'arrive au plus tôt qu'au commencement d'Octobre; il faudra pendant tout ce temps qu'il ſe tienne à l'abri dans quelqu'endroit de la côte. Arrivé à Canton, il ne faut pas qu'il eſpère d'en ſortir avant la mi-Mai de l'année ſuivante, & il ſera dans le cas de ſe conſommer en frais pendant ce ſéjour, car il ne peut regagner les mers du Japon, qu'à la faveur de la mouſſon de l'oueſt; il ne lui reſtera donc qu'environ deux mois pour ſe rendre à l'entrée du détroit du nord, & pour peu qu'il ſoit contrarié par les vents variables qu'il trouvera vers les 40 à 50 degrés de latitude, il court riſque de trouver le détroit fermé ou d'être pris par les glaces dans la mer glaciale. Mais ſuppoſé même qu'il ne lui arrive aucun de ces accidens, il ne peut ſe débarraſſer du paſſage, & être rendu en France avant le mois de Septembre; il devoit en être parti, au plus tard au commencement de Mai de l'année précédente, ce qui fait dix-ſept mois complets, abſtraction faite des accidens.

Les Vaiſſeaux qui partent de France pour la Chine, mettent à la voile au commencement de Janvier, & ſont de retour au mois de Juin de l'année ſuivante; ce qui fait dix-huit mois: mais il en faut rabattre près de deux que conſomme la relâche à l'île de France; ſans cette relâche, à laquelle oblige la néceſſité d'approviſionner les îles de France & de Bourbon, le voyage pourroit n'être que de ſeize à dix-ſept mois, peut-être même pourroit-il n'être que de quinze à ſeize.

Il réſulte de ce que nous venons de dire, que les voyages en Chine, par le nord, emploieroient au moins autant de temps que ceux qu'on y fait par la route ordinaire, & qu'on

auroit de plus à essuyer des dangers dont cette dernière est presqu'entièrement exempte. Ceux qui avoient conçu ce projet n'avoient apparemment fait attention qu'à l'accourcissement du chemin, sans penser à la difficulté qu'oppose le peu d'accord qui se trouve entre les glaces de la mer du nord & les moussons des mers de l'Inde, qui rendent ce voyage aussi long que par la route du Cap, & exposent à de très-grands dangers. Il n'est permis de faire des projets de cette espèce qu'à ceux qui connoissent parfaitement les circonstances locales.

CETTE année, M. Buache de la Neuville, parent & Élève de feu M. Buache l'Académicien, présenta à l'Académie un Ouvrage intitulé: *Géographie Élémentaire moderne & ancienne, contenant les principes de la Géographie, une description générale du globe, & un détail particulier de l'Europe & de la France*, deux volumes in-12.

Personne n'ignore l'utilité de la Géographie, & à combien de titres elle entre dans le système de la bonne éducation. Cicéron a dit quelque part que la Chronologie & la Géographie étoient les deux yeux de l'Histoire. Nous pourrions ajouter que cette dernière est le guide des voyageurs & des commerçans, en leur indiquant les endroits où se trouvent les objets de leur commerce, & les routes de terre ou de mer pour y parvenir.

Le but que M. Buache s'est particulièrement proposé dans cet Ouvrage, a été de donner, dans l'ordre le plus méthodique, ce qu'il y a de plus utile à connoître sur cette matière pour le mettre à portée de servir dans les Colléges à l'éducation de la jeunesse; réservant pour d'autres Ouvrages les autres connoissances qui exigeroient de plus longs détails.

L'Ouvrage de M. Buache est divisé en trois parties: la première renferme la Géographie astronomique & mathématique; c'est-à-dire le rapport des parties du globe terrestre avec le Ciel, & les cercles de la sphère; la seconde traite de la

la Géographie physique; c'est-à-dire de l'arrangement des montagnes, des rivières, des terres & des mers; & enfin, la troisième est destinée à la Géographie politique; c'est-à-dire, à la division politique des différens Empires, Royaumes & autres États qui couvrent la surface de ce globe. Dans la première partie, M. Buache donne une idée générale de l'Univers & de la correspondance de la Terre avec le Ciel, & il y expose les méthodes que fournissent l'Astronomie & la Géométrie pour représenter sur des cartes les positions respectives des différens points du globe terrestre.

Dans la seconde partie qui traite de la Géographie physique, il expose la direction naturelle des terreins, par les montagnes & les rivières; il y détermine les limites & les contours des mers & des terres, il y enseigne quelle correspondance ont entre elles les longues chaînes de montagnes terrestres, & celles qui sont sous les eaux de la mer, & fait voir qu'elles sont, en quelque sorte, la charpente du globe terrestre. Ces descriptions amènent plusieurs notions & plusieurs définitions des différentes parties de ce globe, présentées avec toute la clarté & toute l'exactitude possibles.

La Géographie politique, qui forme la troisième partie, est la portion de l'Ouvrage la plus étendue; elle comprend en cinq sections la description générale de l'Europe, celle de l'Asie, celle de l'Afrique, celle de l'Amérique, & de plus une idée des continens peu connus. Il n'arrive que trop souvent que le peu d'étendue qu'il est permis de donner aux Traités Élémentaires les rend secs & ennuyeux; pour éviter cet inconvénient, M. Buache présente ses descriptions sous la forme plus intéressante de Voyages; & dans la cinquième section il donne une indication des routes que l'on tient dans les grands Voyages par terre ou par mer.

Il ne faut pas perdre ici de vue que l'Ouvrage de M. Buache est destiné à l'instruction des jeunes gens, il a supposé qu'ils pourroient employer deux ans à cette espèce de Cours, ce que nous venons de dire doit employer la première année, la seconde est destinée à revenir sur ces connoissances générales,

& à les fortifier par de plus grands détails, mais ces détails ont particulièrement pour objet, les pays que nous habitons ou avec lesquels nous avons des relations plus fréquentes; ainsi ce qui appartient à l'Europe, & sur-tout à la France, compose la plus grande partie de ce qui doit remplir cette seconde année. On y suit la même méthode que dans la première en faisant voyager le lecteur, & ces détails sont par-tout accompagnés des principaux traits qui caractérisent chaque pays.

L'auteur a aussi ajouté l'article des révolutions, pour servir d'explication à la Mappemonde historique, chronologique & généalogique, publiée par M. Barbeau de la Bruyere; enfin l'Ouvrage est terminé par un Traité abrégé de la Géographie ancienne, qui est l'explication de l'*Orbis vetus*, & du *Theatrum Historicum* de M. de l'Isle.

Cet Ouvrage a paru très-bien conçu, exécuté d'une manière propre à aider la mémoire, les objets de raisonnement ont paru présentés avec clarté, & les faits avec précision.

MÉCANIQUE.

CETTE année parut un Ouvrage de M. l'abbé Boſſut, intitulé : *Traité Élémentaire de Mécanique ſtatique.*

La Mécanique eſt la Science de l'Équilibre & du Mouvement des corps ; lorſqu'elle s'occupe du premier, elle prend le nom de Statique ; & lorſqu'elle embraſſe le ſecond, elle retient le nom de *Mécanique*, ou prend celui de *Dynamique.*

L'Ouvrage de M. l'abbé Boſſut, dont il eſt ici queſtion, eſt la première partie d'un Traité complet de Mécanique ſpéculative & pratique, qu'il ſe propoſe de publier ; il n'y eſt queſtion que de la Statique ou de l'Équilibre des corps, & il poſe dans un Diſcours préliminaire, qui eſt à la tête, les principes métaphyſiques de tout l'Ouvrage.

Dans l'état d'équilibre, la force n'agit point, il réſulte de la deſtruction de pluſieurs forces qui tirent ou pouſſent un point donné dans des directions différentes ; il eſt clair que, lorſque ces directions ſont abſolument oppoſées, l'équilibre entre deux forces ne peut naître que de l'égalité de ces forces ; mais que ſi les directions entre pluſieurs forces, qui agiſſent ſur le même point, ſont obliques, il faudra décompoſer ces forces, & évaluer ce que chacune oppoſe à celle avec laquelle on compare les autres, c'eſt un des principaux objets de l'Ouvrage de M. l'abbé Boſſut.

Juſqu'ici nous n'avons conſidéré l'action des forces en équilibre, que comme s'exerçant ſur un ſeul point ; mais il eſt évident que ce n'eſt pas le cas de la Nature, & que les corps ayant un volume plus ou moins grand, il n'eſt pas indifférent

d'appliquer les forces à un tel point du corps qu'on veut ſoumettre à leur action ; heureuſement il y a dans tous les corps, un point nommé *Centre de gravité*, qui eſt tel que le corps, étant ſuſpendu en différens ſens par ce point, demeurera immobile dans toutes les ſituations poſſibles ; il eſt donc néceſſaire de connoître ce point, & c'eſt à la recherche de cette théorie ſi néceſſaire, qu'eſt employée une partie de l'Ouvrage de M. l'abbé Boſſut ; appliquons maintenant tout ce que nous venons de dire aux machines. La plupart de ceux qui ne ſont pas au fait des principes de la Mécanique, ne mettent point de bornes à l'effet des machines, M. l'abbé Boſſut détruit cette illuſion, & réduit la puiſſance de ces agens, à de juſtes limites, en poſant les principes ſur leſquelles elle eſt fondée ; eſſayons d'en donner une idée.

Le mouvement ne peut naître de lui-même, il eſt néceſſairement produit par un agent extérieur. Cet agent ou force, de quelque eſpèce qu'on le ſuppoſe, eſt la véritable force de la machine ; les leviers, les roues, & tout ce qui la compoſe, ne peuvent en augmenter la quantité ; ils n'ont d'eux-mêmes aucune vertu active : bien loin de-là, ils détruiſent toujours une partie de la force par les frottemens & les autres réſiſtances qu'ils occaſionnent ; ils ne peuvent que modifier la force mouvante, en donnant plus de vîteſſe au fardeau à élever, auquel cas ils augmentent ſa réſiſtance ; ou en diminuant cette réſiſtance & diminuant ſa vîteſſe. La machine la plus parfaite eſt celle où ces opérations ſe font avec le moins de perte ſur la force, mais cette prérogative de pouvoir à volonté augmenter le fardeau & la vîteſſe, n'en eſt pas moins précieuſe ; c'eſt au Mécanicien à en faire uſage ſelon le beſoin, & à ſe ſouvenir que, quelle que ſoit une machine, elle ne fera jamais rien gagner du côté de la vîteſſe, qu'elle ne le faſſe perdre ſur la force.

Tous ceux qui ont examiné des machines avec attention, ont remarqué qu'elles étoient toutes compoſées, s'il m'eſt permis d'employer ce terme, des mêmes élémens ; auſſi les Mécaniciens diſtinguent-ils ſept eſpèces de machines ſimples

& primitives; la machine funiculaire, le levier, la poulie, le treuil, le plan incliné, la vis & le coin, toutes les autres machines ne ſont & ne ſeront jamais que des combinaiſons de celles que nous venons de nommer, ou de la même répétée un certain nombre de fois, & elles ſeront toujours d'autant plus parfaites, qu'il y aura moins de complications.

On conçoit aiſément que depuis le temps que les beſoins des hommes les ont forcés d'avoir recours à la Mécanique, ces matières ont dû être traitées par un grand nombre de Mathématiciens; cependant M. l'abbé Boſſut a trouvé encore des démonſtrations & des problèmes nouveaux à inſérer dans ſon Ouvrage, tant il eſt rare qu'on puiſſe regarder une matière comme épuiſée.

M. l'abbé Boſſut a fait plus, il ne s'eſt pas contenté d'examiner la théorie mathématique des machines, il les a conſidérées dans leur état naturel, en examinant les réſiſtances qu'elles éprouvent de la part des frottemens, de la roideur des cordes, &c. on voit qu'il n'y a que l'expérience qui puiſſe ſervir de guide dans cette recherche, on en a déjà commencé ſur cette matière, que M. l'abbé Boſſut applique à pluſieurs exemples; en un mot, il conduit l'équilibre des machines juſqu'au moment où il eſt prêt à ſe rompre, & où la machine va prendre du mouvement, ce n'eſt que là qu'il s'arrête. La théorie des machines en mouvement devant faire le ſujet de la ſeconde Partie de cet Ouvrage; celle dont nous venons de rendre compte, eſt bien propre à en faire deſirer la publication.

LES Arts publiés pendant le cours de l'année 1772, ſont au nombre de ſix.

Le premier eſt l'*Art de faire des Pipes* à fumer le tabac: Par M. Duhamel. Cet Art très-ancien & aſſez généralement répandu, non-ſeulement en Europe, mais encore parmi les nations Sauvages de l'Amérique, ſe pratique en Europe, dans l'Allemagne, la Hollande, l'Angleterre & la France,

où il y en a trois Manufactures; c'eſt de celle qui eſt établie à Rouen, que M. Duhamel a eu, par les ſoins de M. Dubois, Ingénieur des Ponts & Chauſſées, les détails les plus intéreſſans pour la deſcription de cet Art. Il y donne la manière de reconnoître la terre propre à cet ouvrage; il y détermine la nature de cette terre, qu'il fait voir être une argile, & non une marne, comme on le croyoit communément; il y enſeigne la manière de la préparer, celle de fabriquer les Pipes, de leur donner l'eſpèce de vernis qui les empêche de s'attacher à la bouche; la conſtruction des fourneaux qui ſervent à les cuire, & enfin la manière de les arranger & d'y conduire le feu.

Le ſecond eſt l'*Art du Coutelier*, première Partie : Par M. Perret, Maître Coutelier. L'auteur y donne le dénombrement de toutes les matières qu'emploient les Couteliers dans leurs ouvrages; la manière de les choiſir, de les préparer avec adreſſe, de les débiter avec économie, & d'en tirer le meilleur parti poſſible; il inſiſte particulièrement ſur la nature & le choix des différens aciers; ſur la manière de les forger, & ſur-tout, ſur celle de les corroyer pour en former l'étoffe propre à chaque eſpece de tranchant qu'on deſire; il y donne le détail le plus entier des outils propres à cet Art, & de leur uſage; il inſiſte encore, ſur le choix des meules dans leſquelles le plus petit défaut peut, non - ſeulement altérer la perfection de la pièce qu'on travaille, mais quelquefois même mettre en riſque la vie de l'Ouvrier; il n'a garde d'omettre dans cet Ouvrage, les différentes manières de polir les manches & les châſſes des différens inſtrumens tranchans; les lames, & toutes les pièces d'acier qui les compoſent, tant avec l'émeril, la potée d'étain, & le rouge d'Angleterre, qu'avec la potée d'acier, qui eſt de ſon invention, & qui peut donner à l'acier un poli bien plus vif qu'aucune autre matière; en un mot, il n'a rien négligé de ce qui pouvoit rendre cette première Partie de ſon Ouvrage intéreſſante, & faire deſirer la publication de la ſeconde, dans laquelle il ſe propoſe de traiter des Inſtrumens de Chirurgie, qu'on peut regarder comme le

chef-d'œuvre de cet Art, & dont le lecteur verra l'exécution dans les articles ſuivans.

Le troiſième eſt l'*Art de la fabrique de la Porcelaine :* Par M. le Comte de Milly. L'auteur commence ſon Ouvrage par donner, dans un Avant-propos qu'il met à la tête, l'hiſtoire de cet Art, depuis le cinquième ſiècle ou environ de l'Ere Chrétienne, qu'on croit qu'il fut inventé à la Chine juſqu'à préſent ; il y diſcute la nature des différentes Porcelaines, qui bien que ſemblables, en ce qu'elles ſont toutes des demi-vitrifications, diffèrent cependant eſſentiellement, en ce que les unes ſont compoſées de matière entièrement vitrifiable, ſaiſie au moment où elle étoit à demi-vitriſiée, & que les autres ſont compoſées de matières différentes, dont les unes ſont aiſément vitriſiables, & les autres peuvent ſoutenir un feu très-vif, ſans perdre leur blancheur & ſans ſe vitriſier ; il indique la nature des matières qui doivent compoſer la belle Porcelaine, la proportion dans laquelle elles doivent être mêlées, les préparations qu'on doit leur faire ſubir, la manière de travailler la pâte, & de faire ſubir aux ouvrages qui en ſont faits, la première cuiſſon qui les met dans l'état de *Biſcuit ;* & enfin l'art de lui donner, avec les mêmes matières, mais plus finement broyées, cette eſpèce de vernis qu'on nomme *Couverte,* & auquel elle doit ſon brillant. Le dernier article de l'Ouvrage de M. le Comte de Milly, traite de la manière d'appliquer ſur la Porcelaine, les couleurs, & même l'or, qui leur doivent ſervir d'ornement, & des fours deſtinés à lui donner le dernier feu ; il y décrit les différentes eſpèces de fours uſités dans les meilleures fabriques de Porcelaines, & finit par celui qui eſt en uſage dans la Manufacture de Sève, qui donne une chaleur égale dans toutes ſes parties, & par la découverte faite depuis peu, par les ordres de M. Bertin, & par les recherches de pluſieurs des Membres de cette Académie, des matières propres à compoſer une Porcelaine auſſi ſolide que celle de la Chine & du Japon, qui ne le cède en beauté à aucune de celles qu'on a connues juſqu'à préſent, & qui les ſurpaſſe toutes par l'élégance des

formes, & la perfection des Peintures dont les pièces sont ornées.

Le quatrieme est l'*Art du Relieur-Doreur de Livres :* Par M. Dudin. Tout le monde connoît la néceſſité de relier un Livre pour s'en ſervir commodément, & pour le conſerver; mais on ne connoît pas de même toutes les opérations néceſſaires pour mettre un Livre dans cet état. M. Dudin les a décrites avec exactitude, depuis celle par laquelle on plie les blancs, pour mettre chaque Livre dans le format qui lui convient, juſqu'à l'opération de vernir & de dorer la couverture & la tranche pour lui ſervir d'ornement; il eſt d'autant plus utile d'être au ſait de cet Art, qu'un Livre mal relié eſt ſouvent défiguré, qu'il devient incommode à lire, & qu'il ne ſe conſerve pas, à beaucoup près, autant que s'il étoit relié comme il le devroit être.

Le cinquième eſt l'*Art du Coutelier en ouvrages communs :* Par M. Fougeroux. Cet Art, qui s'exerce principalement à Saint-Étienne-en-Forès, & qui produit à cette ville un commerce d'environ ſix cents mille livres, ne tend qu'à épargner le travail & le temps pour pouvoir fournir au peuple des couteaux d'uſage à ſi peu de frais, que les moindres ſe donnent au marchand à quarante ou cinquante ſous la groſſe, c'eſt-à-dire les douze douzaines, & les plus chers à vingt-quatre livres; on peut juger combien il en faut vendre pour faire la ſomme que nous venons d'énoncer, & combien l'induſtrie a dû trouver de reſſources pour pouvoir les donner à ce prix.

Le ſixième & dernier eſt la ſeconde Partie de l'*Art du Coutelier :* Par M. Perret. Cette ſeconde Partie contient la deſcription & la fabrique des inſtrumens de Chirurgie. Les Chirurgiens ne peuvent opérer ſans inſtrumens, & on peut être aſſuré que dans la main même du plus habile Chirurgien un mauvais inſtrument ne peut que rendre une opération moins ſûre, plus longue & plus douloureuſe pour le malade. Il eſt donc du bien de l'humanité de rendre ces reſſources

les

les plus parfaites qu'il est possible. La collection d'instrumens que présente M. Perret dans cet Ouvrage est bien propre à produire un pareil effet; elle est peut-être la plus complète qui ait paru jusqu'ici, & il ne néglige rien pour mettre les Couteliers en état de bien exécuter ces instrumens; elle ne laisse rien à desirer, sinon qu'un habile Chirurgien veuille bien y joindre la manière de s'en servir. Il formeroit, par ce moyen, un Traité des opérations plus ample & plus complet que tout ce qui a paru jusqu'à présent sur cette matière.

MACHINES OU INVENTIONS APPROUVÉES PAR L'ACADÉMIE, EN M. DCCLXXII.

I.

UN nouveau Lit brisé, à l'usage des Voyageurs & des Officiers, exécuté en fer par M. Tranoy. Ce lit n'a ni vis, ni tenons, ni crochets; il peut être monté & démonté avec facilité en six minutes, & il tire de sa construction même une solidité aussi grande que celle d'un lit ordinaire; en le supposant de six pieds de long, & large à proportion, il n'aura, étant plié, que vingt pouces de large, trois pieds de long & trois pouces d'épaisseur. Quoique la précision que ce lit exige dans l'exécution, & les différens ajustemens qui entrent dans sa construction, doivent le rendre d'un prix assez considérable; cependant, comme il a d'un autre côté l'avantage de se tendre & de se détendre très-promptement, celui d'être très-solide, & enfin celui d'occuper très-peu de place étant plié, l'Académie a pensé que ce lit ingénieusement imaginé pour son objet, & pouvant être utile dans bien des occasions, méritoit l'attention des Officiers & des Voyageurs.

II.

Des Compositions métalliques, imitant l'or & l'argent, présentées par le sieur Baillot, maître Fondeur à Paris; il

résulte des épreuves auxquelles ces différentes compositions ont été soumises, que quoique le verd-de-gris ne se soit manifesté sensiblement dans aucune des épreuves, il n'en est pas moins certain que la base de toutes ces compositions est le cuivre, qui n'est nullement dépouillé de ses qualités désagréables & malfaisantes, & que, par conséquent, elles ne peuvent sans danger être employées aux usages de la table & de la cuisine; mais que comme les alliages du sieur Baillot imitent l'or & l'argent mieux qu'aucun de ceux qui ont été présentés jusqu'à présent; qu'il a su y introduire une grande quantité de fer, chose assez difficile à faire; qu'elles sont susceptibles d'un travail assez fini, & de prendre beaucoup d'éclat; enfin, qu'elles se nettoient très-bien lorsqu'elles sont ternies, elles peuvent être employées sans inconvénient à la fabrication de tous les ustensiles & ornemens qui ne doivent servir ni à la table, ni à la cuisine.

III.

Deux Machines proposées par M. du Pré de Retonsay, Chevalier de Saint-Louis, ancien Capitaine au régiment de Montmorin.

La première a pour objet de diviser en tranches parallèles, ayant entre elles tel rapport qu'on voudra, la figure la plus irrégulière. Pour y parvenir il prépare une boîte quarrée ou rectangulaire, d'un pouce d'épaisseur, suffisante pour contenir le plan de la figure proposée, ou plutôt une planche de même épaisseur, découpée suivant le contour de ce plan, & il remplit le vide avec de la cire, du plâtre, ou quelqu'autre mastic, ensuite, ayant retiré le morceau de bois, il couvre cette boîte d'une glace, & remplit d'eau le vide qu'a laissé le morceau de bois; d'où il suit que si on vide cette eau dans un vaisseau de forme régulière, on pourra, en divisant la capacité de ce vaisseau en parties égales ou inégales, se procurer des quantités d'eau, qui étant versées successivement dans la boîte, y marqueront des tranches parallèles, qui auront entre elles les mêmes rapports de surfaces que

les portions d'eau miſes ſucceſſivement dans le vaiſſeau ; ce procédé a paru ſimple & ingénieux, & on a cru qu'il pouvoit être utile dans bien des circonſtances.

La ſeconde Machine, du même Auteur, eſt une alidade, compoſée de deux règles de bois bien dreſſées, au bout deſquelles ſont placées des portions de cercles pour pouvoir les élever & les abaiſſer à volonté, ſur l'une deſquelles ſont portées deux lunettes contre-pointées: au moyen de cette alidade on peut avoir, ſur un plan qu'on lève, la poſition de tous les objets placés haut & bas, réduite à l'horizon. Cette alidade a paru devoir être d'un uſage juſte & commode.

I V.

Une nouvelle conſtruction de Vignettes pour l'Imprimerie, préſenté par M. Luce, Graveur du Roi, attaché à l'Imprimerie Royale. On ſait que les vignettes & les culs-de-lampes dont on orne les belles éditions, ont été juſqu'à préſent gravés, ou en taille-douce qu'on tiroit ſéparément, ou en bois pour être tirées avec la lettre; mais ces planches en bois périſſoient ou ſe gâtoient en très-peu de temps. M. Luce a imaginé de graver ſéparément ſur des poinçons, comme on fait pour les lettres, les pièces ſéparées de ces ornemens, & d'en juſtifier les matrices avec tant de préciſion que ces pièces étant fondues ne laiſſaſſent apercevoir aucune interruption dans les traits, il en réſultera des vignettes & des culs-de-lampes qui auront l'avantage de ſe tirer avec la lettre comme les planches en bois, qui ſeront d'une bien plus grande durée, qui pourront ſe renouveler toutes les fois qu'on en aura beſoin, & qui enfin pourront être variées d'un grand nombre de manières, ces pièces étant compoſées avec tant d'art qu'elles peuvent former beaucoup de combinaiſons différentes.

V.

Une nouvelle Manière de faire marquer aux Montres le quantième du mois & le mois de l'année, ſans être obligé

d'y toucher pour les mois qui n'ont pas trente-un jours, ni pour le vingt-neuvième jour de Février dans les années bissextiles. Le quantième du mois est marqué par une aiguille sur une division en trente-un, placée en dedans du cercle des heures, & qui lui est concentrique, & les mois sont gravés sur un chaperon placé sous le cadran, & paroissent successivement à travers une ouverture qui y est pratiquée. Le mouvement de la Montre n'a pas la moindre part à celui qui fait aller le quantième, il ne le reçoit que d'une dent attachée au quarré de la fusée, qui agit toutes les fois qu'on la remonte. L'inégalité des mois de trente & trente-un jours s'opère par l'inégalité des divisions du chaperon des mois, & le saut des années bissextiles au moyen de deux étoiles & de leurs sautoirs. Ces moyens employés par M. le Féron, Horloger, auteur de cette Montre, pour lui faire marquer les mois & le quantième sans être obligé d'y toucher, ont paru nouveaux, simples & ingénieux, & devoir être d'un usage assez commode.

V I.

Une construction nouvelle de Ruches, inventées par M. de Saint-Foi. Ces Ruches consistent en trois corps de boîtes de sapin, partagées chacune en deux par une cloison: ces boîtes, qui peuvent se joindre & se séparer, ont, de même que leurs cloisons, des ouvertures qui se ferment avec des coulisses, & qui interceptent ou permettent à volonté le passage des Abeilles d'une boîte & d'une moitié de boîte dans l'autre: au moyen de cette disposition, les Abeilles auxquelles on fournit toujours de nouvel espace, ne jettent point, & on recueille à coup sûr tous les essaims; on les fait de même aisément passer d'une ruche pleine de miel dans une ruche vide, lorsque le temps de la récolte est venu, & par la disposition des boîtes & des passages qu'on ouvre & ferme comme on veut, on peut faire cette récolte sans courir aucun risque d'endommager ou de déranger le couvain, sans interrompre le travail des abeilles, & sans en faire périr aucune. Les vues de l'Auteur se sont étendues jusque sur la manière

de travailler le miel & la cire, & d'en augmenter la quantité & la qualité. Ces nouvelles ruches ont paru préférables à tout ce qu'on connoiſſoit juſqu'ici ſur cette matière, & on a cru qu'il ſeroit à ſouhaiter que l'uſage s'en introduisît dans tout le royaume.

VII.

Un *Forte-Piano*, préſenté par M. de l'Épine, Facteur d'Orgues du Roi. On ſait que ces inſtrumens ſont des clavecins à marteaux, dont on augmente & on diminue le ſon en appuyant plus ou moins ſur les touches. On ſait encore qu'on avoit organiſé ces inſtrumens en y joignant un petit jeu de flûtes placé dans le pied, & qui alloit par le même clavier; mais l'inſtrument à cordes éprouvoit ſeul l'enflure & la diminution des ſons, ſans que l'Orgue y participât en aucune manière.

L'Orgue qu'a joint au ſien M. de l'Épine, a trois jeux différens; il a deux claviers à la main & un de pédale qu'on peut ôter & remettre à volonté; il a, de même que le *Forte-Piano*, la propriété d'enfler & de diminuer ſes ſons au moyen d'une ſeule pièce qu'on fait mouvoir avec le pied. On peut, quand on veut, ſéparer les deux inſtrumens, même emporter le *Forte-Piano*, ſans que l'Orgue qui a ſon clavier, demeure inutile; on le couvre en ce cas d'une eſpèce de ſecrétaire qui forme un meuble utile & agréable.

Il a paru que M. de l'Épine avoit employé toutes les reſſources de ſon Art pour donner à cet inſtrument tous les avantages dont il peut être ſuſceptible, pour écarter tous les inconvéniens qui auroient pu en altérer la perfection, & qu'il y a mis la plus grande préciſion & la plus grande ſolidité dans l'exécution pour en aſſurer les effets.

VIII.

Un nouveau Bandage à reſſort, propre à contenir les exomphales ou hernies ombilicales, inventé par M. Juville, Chirurgien-herniaire : on ſait que le mouvement de la reſpiration fait alternativement élever ou déprimer la partie de

l'ombilic; il faut d'ailleurs que lorſque l'inteſtin s'eſt fait jour par le nombril, la pelote du Bandage deſtinée à lui fermer le paſſage, y demeure conſtamment appliquée; or, c'eſt ce que ne peut faire le Bandage ordinaire contenu par une ſimple ceinture, parce que s'il ſerre ſuffiſamment dans le temps auquel le ventre eſt peu gonflé, il gènera ſûrement lorſqu'il ſera plus élevé, ſoit par les alimens, ſoit par la reſpiration; c'eſt ce qui avoit fait imaginer des Bandages dans leſquels les deux parties de la ceinture étoient roulées ſur des eſpèces de barillets ſemblables à ceux des Montres; mais ces barillets forment une épaiſſeur incommode, & qui peut même bleſſer dans de certaines occaſions; celui qu'a propoſé M. Juville eſt tout-à-fait exempt de cet inconvénient, & eſt abſolument plat : nous allons eſſayer d'en donner une idée.

La pelote eſt comme dans les Bandages ordinaires, fixée au centre d'une plaque elliptique, mais les deux moitiés de la ceinture ne ſont pas attachées aux deux extrémités du grand diamètre de cette plaque; elles le ſont à deux pièces qui peuvent gliſſer le long de ce diamètre, au moyen d'une fente qui y eſt pratiquée; ces deux pièces ſont plus larges dans la partie qui avoiſine le centre de la grande plaque, que dans celle qui eſt vers les bouts de l'ellipſe; & où la ceinture eſt attachée, elles ſont retenues entre les extrémités de deux reſſorts attachés par le milieu aux deux bouts du petit axe de l'ellipſe; il ſuit de cette conſtruction que le Bandage étant mis en place, dès que le ventre du malade viendra à s'élever, la ceinture tirera les pièces auxquelles elle eſt attachée, qui ne pourront, à cauſe de leur évaſement, céder à leur action, qu'en faiſant plier les reſſorts entre leſquels elles gliſſent; d'où il ſuit que dès que le ventre s'aplatira, ces reſſorts les appelleront à leur première ſituation, & que malgré toutes les variations qui pourront arriver dans la capacité du ventre, la pelote ſera toujours contenue ſur l'ombilic, avec la même force, & ſans incommoder le malade, & que d'ailleurs tout cet appareil n'ayant qu'une très-petite épaiſſeur, ne lui cauſera ni danger, ni déſagrément. Cette

machine a paru ſimple & ingénieuſe, & on a cru qu'il ſeroit à deſirer que l'uſage pût s'en introduire.

I X.

Des Piles de fer fondu pour les Manufactures de Papier, propoſées par M. Pannetier, fabricant de Papier à Clary près Mézières.

Tous ceux qui connoiſſent les Fabriques de Papier, ſavent que, pour réduire en pâte les chiffons qui en font la matière, on les expoſe à l'action réitérée de peſans maillets, dans des eſpèces d'auges creuſées dans une forte pièce de bois, & dans leſquelles paſſe un courant d'eau; il eſt aiſé de voir que ces Piles doivent être ſujettes à des réparations fréquentes, & s'uſer aſſez promptement; auſſi pluſieurs fabricans en avoient fait conſtruire en pierre dure. M. Pannetier a profité du voiſinage d'une forge à fer, pour en faire exécuter en fonte de fer, & il s'en eſt bien trouvé; on pourroit peut-être craindre que ces Piles ne communiquaſſent au Papier des taches de rouille; mais il y a apparence que le mouvement de la matière, & le courant d'eau perpétuel qui y paſſe, ne permettent pas à la rouille de s'y former; car M. Pannetier n'en a aperçu aucun veſtige, auquel cas on en ſeroit quitte pour les bien nettoyer à chaque ceſſation de travail. Ces Piles peuvent ſoutenir un mouvement très-rapide de maillets, ce qui rend la pâte très-belle & très-égale, & n'arrrive pas dans les Piles de bois; elles font auſſi beaucoup plus d'ouvrage en même temps. Quatre Piles de fer ont donné en vingt-quatre heures, cent quatre-vingts livres de pâte, tandis que ſept Piles de bois n'en fourniſſoient qu'environ cent vingt. Le même M. Pannetier ayant remarqué que le trou daus lequel roulent les tourillons des maillets, étoit ſujet à s'agrandir aſſez promptement, ce qui dérangeoit leur action; il a remédié à cet inconvénient, en faiſant rouler ces tourillons dans des boîtes de fer fondu.

Ces réformes de M. Pannetier ont paru devoir être utiles, ſur-tout pour les Papeteries qui auront des forges à leur portée, & c'eſt ce qui a déterminé l'Académie à les publier ici.

DANS le nombre des Pièces qui ont été présentées cette année à l'Académie, elle a jugé les seize suivantes dignes d'avoir place dans le Recueil de ces Ouvrages qu'elle fait imprimer.

Sur la détermination de quelques fonctions arbitraires, dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles : Par M. Monge, Professeur royal de Mathématique & de Physique à l'École du Génie, à Mézières, Correspondant de l'Académie.

Sur les Affinages de l'Or & de l'Argent : Par M. Meydinger.

Sur la déterminaton de la Parallaxe du Soleil, déduite du dernier passage de Vénus sur le Soleil : Par M. Wallot.

Sur l'utilité des Éclipses de Soleil de 1777, 78, 79, 81 & 84, avec la projection de ces Éclipses : Par M. Duvaucel.

Sur une Exostose monstrueuse à la face : Par M. Ribelt, Chirurgien à Perpignan.

Sur l'Or fulminant : Par M. Bergmann.

Sur la circulation du sang dans le fœtus : Par M. Sabatier.

Sur les Longitudes de Berlin, & de plusieurs autres Villes : Par M. Méchain.

De Machinâ Parallacticâ : Par M. l'Abbé Boscowich.

Sur plusieurs combinaisons Salines de l'Arsenic. *Premier Mémoire :* Par M. Bucquet, Médecin de la Faculté de Paris.

Sur un Enfant né sans cerveau & sans cervelet : Par M. Pinson, Chirurgien.

Analyse de la Mine de Plomb blanche : Par M. Laborie.

Sur les Huiles exprimées : Par M. de Machy.

Sur plusieurs combinaisons Salines de l'Arsenic. *Second Mémoire :* Par M. Bucquet.

Examen

Examen de plusieurs substances qui se trouvent dans les vaisseaux où l'on distille le phosphore, & qu'on rejette comme inutiles, quoiqu'on en puisse tirer parti : Par M. Mitouard.

Détermination de la Longitude de Manille, par l'Éclipse de Soleil du 30 Janvier 1767 : Par M. Duvaucel.

L'ACADÉMIE avoit proposé pour le sujet du Prix de 1772, *de perfectionner les méthodes sur lesquelles est fondée la Théorie de la Lune, de fixer, par ce moyen, celles des équations de cette Planète, qui sont encore incertaines, & d'examiner en particulier si l'on peut rendre raison, par cette théorie, de l'équation séculaire du mouvement moyen de la Lune.*

Le Prix étoit double, c'est-à-dire de 4500 livres.

Entre les Pièces que l'Académie a reçues, elle en a trouvé deux qui, par un mérite différent, lui ont paru avoir un droit égal au Prix double proposé, qu'elle a cru, en conséquence, devoir partager également entre ces deux Pièces.

La première est la Pièce *N.° 3*, de 1772, qui a pour devise:

Hic Labor extremus longarum hæc meta viarum,
Hinc jam digressi vestris appellimur oris,

dont l'auteur est M. Léonard Euler, Associé-Étranger de l'Académie, & Membre des Académies de Péterſbourg, de Berlin, &c.

La seconde est le *N.° 4*, de 1772, qui a pour devise :

Juvat integros accedere fontes,

dont l'auteur est M. de la Grange, Associé-Étranger de l'Académie, Directeur de la Classe Mathématique, de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse, & Membre de la Société royale des Sciences de Turin.

Outre ces deux Pièces, entre lesquelles le Prix double a été partagé, la Pièce *N.° 2*, de 1772, dont la devise est :

Vicli penetralia cæli,

a paru digne d'être citée avec éloge.

ÉLOGE
DE
M. LE BARON VAN SWIETEN.

GÉRARD VAN SWIETEN, Baron du Saint-Empire, Premier Médecin & Bibliothécaire de Leurs Majeſtés Impériale & Royale, Préſident perpétuel de la Faculté de Médecine de Vienne en Autriche, & de celles des États héréditaires; Préſident en ſecond des Études, Membre des Académies royale des Sciences, de Péterſbourg & de Sienne, de la Société royale de Médecine d'Édimbourg, & de pluſieurs autres Sociétés Littéraires de l'Europe, Membre de la Nobleſſe & des États du Tirol, de la Carinthie & de la Carniole, Commandeur de l'Ordre de Saint-Étienne, naquit à Leyde, le 7 Mai 1700, de Thomas van Swieten, & d'Éliſabeth de Loo. Sa famille étoit une des plus diſtinguées de la Hollande. On trouve, dès le quinzième ſiècle, la ſignature de quelques-uns de ſes aïeux, appoſée à des Traités & à d'autres Actes publics, auxquels les ſeuls Nobles avoient droit d'intervenir. Lorſque la Hollande ſe ſépara de l'Égliſe Catholique, des deux branches de la famille de *Swieten* qui exiſtoient alors; l'une adopta la nouvelle Religion, poſſéda le bien des deux branches, & continua d'être décorée d'emplois & de dignités; l'autre reſta conſtamment attachée à la Religion de ſes pères, & n'héſita pas à ſacrifier à cet attachement, les biens & les honneurs auxquels elle avoit droit de prétendre. C'étoit de cette dernière que ſortoit M. van Swieten, martyr, s'il m'eſt permis d'uſer de ce terme, même avant que de naître, de la piété de ſes ancêtres. Il commença ſes études à Leyde, à l'âge d'environ douze ans, & ce fut pendant leur cours qu'il eut le malheur de perdre ſon père & ſa mère. Ses tuteurs l'envoyèrent à Louvain, pour y faire ſa Philoſophie,

dans la vue de le faire ensuite étudier en Droit dans la même Université; mais le jeune van Swieten avoit une aversion décidée pour cette dernière étude. Il eut, malgré sa grande jeunesse, la prudence de retenir, pour ainsi dire, son génie dans l'étude de la Philosophie, pour ne se pas voir forcé à fournir malgré lui cette nouvelle carrière; & pour s'en délivrer entièrement, il retourna à Leyde, à l'âge de seize ans, malgré les instances de toute sa famille, pour s'y livrer à l'étude de la Médecine & de la Physique, vers lesquelles l'entraînoit une inclination prédominante.

Le célèbre Boërhaave y professoit alors la Médecine. M. van Swieten étoit digne de rencontrer un tel Maître : son ardeur pour l'étude en prit un tel accroissement, que Leyde devint presque pour lui une solitude; il s'enfermoit dans sa chambre hors le temps des leçons; il ne buvoit ni ne mangeoit que lorsqu'il y étoit forcé par le besoin; il se privoit absolument du vin, & prenoit beaucoup sur son sommeil. Non content de l'étude de la Médecine, il étudioit encore les Mathématiques, & il étoit parvenu seul & sans secours à entendre les élémens d'Euclide. Quelques heureuses contrées de l'Amérique, peuvent, dit-on, recevoir les productions végétales de tout l'Univers; l'esprit de M. van Swieten étoit de même susceptible de toutes les Sciences.

Cette singulière manière de vivre étoit bien propre à assurer le succès de ses études; mais il s'en falloit bien qu'elle le fût également à conserver sa santé; elle en souffrit très-considérablement, & il tomba dans une mélancolie profonde, accompagnée de marasme & d'insomnie. Boërhaave qui l'avoit bientôt distingué dans la foule de ses disciples, & qui s'y étoit véritablement attaché, blâma cet excès de travail, & en ordonna la cessation; il lui prescrivit l'exercice des armes & l'étude de la musique; il lui recommanda, sur-tout, de faire avant que de se mettre au lit quelque lecture plaisante, & de se coucher aussitôt qu'il se sentiroit envie de rire. Ce régime, si sagement indiqué, joint aux remèdes convenables, eut tout l'effet qu'on pouvoit en attendre : en peu de temps

la mélancolie disparut, & M. van Swieten reprit l'embonpoint & le sommeil dont il étoit privé. On lui a souvent entendu dire qu'il devoit le retour de son sommeil au Théâtre Italien de Gherardi; c'est peut-être la première & l'unique fois que cet agréable ouvrage ait été employé comme somnifere.

Après sept années d'études à Leyde, M. van Swieten y obtint en 1725, le grade de Docteur en Médecine; mais il se garda bien, malgré ce grade, d'abandonner les leçons de son illustre maître; il les suivit encore pendant onze ans. Boërhaave alors n'ayant plus rien à lui enseigner, devint son ami, son admirateur & son panégyriste, & M. van Swieten, de son côté, lui voua l'amitié la plus tendre, la reconnoissance la plus vive, & la plus profonde vénération.

En acquérant tant de connoissances, M. van Swieten n'avoit pas eu dessein de les enfouir; le desir de contribuer au bien de l'humanité, l'engagea à donner à Leyde des leçons de Médecine; bientôt la foule des Auditeurs qui s'y rendirent, excita l'envie. On se servit du prétexte de la Religion qu'il professoit, pour armer contre lui la constitution de l'État, & les leçons furent défendues. Cette défense, au reste, ne fit tort qu'à la ville de Leyde. Une infinité d'Étrangers, & surtout d'Anglois, que les leçons y avoient attirés, disparurent & sans retour, & allèrent porter en Angleterre le nom & la gloire du savant homme qu'on vexoit avec si peu de raison. Cette espèce de témoignage public fit tant d'impression sur le Ministère Anglois, qu'il fut invité à passer à Londres. On lui offrit même de placer, dans les fonds publics, une somme suffisante pour assurer à lui & à ses descendans, un revenu de mille livres sterling, ou environ vingt-trois mille livres de notre monnoie, & l'assurance de n'être gêné en rien sur la Religion; mais ces offres, toutes avantageuses qu'elles étoient, ne purent l'ébranler; il ne vouloit quitter sa patrie que pour s'établir dans un pays où il fût libre de professer ouvertement la Religion de ses Pères, & où on ne se servît pas ridiculement de ce prétexte pour l'empêcher de faire des leçons de Médecine.

La cessation des Leçons de M. van Swieten, le renvoyoit

naturellement dans ſon cabinet, & on peut bien juger qu'il n'y demeuroit pas oiſif. Il deſiroit ardemment d'éclaircir, par un commentaire, les Aphoriſmes de ſon célèbre maître, M. Boërhaave: mais une forte raiſon le retenoit; il ſe connoiſſoit lui-même, & ſavoit combien il étoit vif; il ſentoit qu'en ſe livrant au Public, il ſe livroit à la critique, & qu'il lui ſeroit peut-être difficile de ne pas rendre ſes réponſes amères, & de ne pas paſſer ſa vie, pour ainſi dire, les armes à la main. Cependant l'utilité de ſon projet, & ſon attachement pour M. Boërhaave, le firent paſſer par-deſſus cette conſidération; mais ce ne fut qu'après avoir pris la ferme réſolution de ne répondre à aucune critique. Réſolution qu'il a ſi bien gardée, qu'ayant été attaqué, & même aſſez vivement, par le célèbre M. Haller, non-ſeulement il ne répondit point, mais il empêcha même qu'on ne lui répondit. Il eſt vrai qu'il n'y perdit rien. M. Haller, revenu de ſon premier feu, fit lui-même la réponſe; & avoua en grand homme qu'il s'étoit trompé.

Pendant que M. van Swieten ſe faiſoit connoître par ſes travaux, & par les contradictions qu'il eſſuyoit, l'Impératrice-Reine, qui dans les temps même les plus difficiles, ne perdoit jamais de vue ce qui pouvoit contribuer à la gloire de ſon règne & au bien de ſes Peuples, cherchoit à ranimer dans ſes États l'étude des Sciences & des Arts, que les guerres & les malheurs publics avoient plongé dans une eſpèce d'indolence. Il falloit, pour l'aider dans cette grande entrepriſe, un homme qui joignit aux plus vaſtes connoiſſances, la probité la plus décidée; une impartialité à toute épreuve; un amour ardent pour ſes devoirs, & l'activité la plus infatigable: cet homme étoit préciſément M. van Swieten; auſſi, cette grande Princeſſe n'épargna-t-elle rien pour ſe l'acquérir.

Les premières tentatives qu'elle fit furent cependant infructueuſes; le faſte & le tumulte d'une Cour effrayoit la tranquille ſimplicité de M. van Swieten, & il s'excuſa ſur ce motif. L'Impératrice ne ſe rebuta pas: elle revint à la charge; & après avoir inutilement employé l'adreſſe de ceux à qui elle avoit confié cette négociation, elle ſe réſolut à traiter directement avec lui; elle lui écrivit; elle loua l'éloignement qu'il

témoignoit pour le faſte, & lui promit de le laiſſer abſolument le maître de continuer le genre de vie auquel il paroiſſoit ſi attaché, & qu'elle ſuivoit elle-même, autant que l'éclat qui environne néceſſairement les Rois, pouvoit le lui permettre.

Tant de marques de bonté de la part d'une Souveraine admirée de tout l'Univers, & dont il avoit vu l'ame à découvert, dans les lettres dont elle l'avoit honoré, ébranlèrent M. van Swieten; mais ce qui acheva de le déterminer, ce fut la demande que la Reine lui fit avec inſtance d'aller à Bruxelles, pour y traiter l'Archiducheſſe Marie-Anne ſa ſœur, qui y étoit malade, & qu'elle aimoit tendrement. Cette nouvelle marque de confiance acheva de vaincre M. van Swieten, & il adopta, dès ce moment, la nouvelle Patrie que lui offroit l'Impératrice Reine. Il alla à Bruxelles, guérit l'Archiducheſſe, retourna enſuite en Hollande mettre ordre à ſes affaires, & partit en 1745 pour Vienne, où il arriva avec toute ſa famille, le 7 Juin de la même année. L'Impératrice fut ravie de l'y voir; elle le mit, ſur le champ, à la tête de toutes les études des pays de ſa domination, & de ſa Bibliothèque Impériale; le fit ſon premier Médecin, lui fit obtenir de l'Empéreur, le titre de Baron de l'Empire; & elle a pluſieurs fois dit & écrit de ſa main, qu'elle regardoit le moment auquel elle ſe l'étoit attaché, comme une des plus heureuſes & des plus glorieuſes époques de ſon règne.

Un des premiers ſoins du Baron van Swieten, en arrivant à Vienne, fut de travailler à tirer la Médecine de l'état de langueur où elle étoit. Il ne trouva pas de meilleur moyen pour y réuſſir, que d'en donner lui-même des leçons publiques. Bientôt ſa réputation y attira une foule d'auditeurs, même Étrangers : les Écoles auparavant déſertes, ſuffirent à peine pour les contenir; & il ne ceſſa ſes utiles leçons qu'en 1753, lorſqu'il eut formé des hommes capables de le remplacer en cette partie.

Les autres abus qui s'étoient introduits dans toutes les branches de la Médecine, n'avoient pas échappé à ſa vigilance; & il y apporta les remèdes les plus prompts & les plus convenables.

Il avoit vu combien l'ignorance des Sages-femmes pouvoit porter de préjudice à l'humanité. Il y remédia, par une Chaire où l'on enſeigne en langue vulgaire, tout ce qui peut avoir rapport aux Accouchemens. Inſtitution utile, depuis long-temps établie en France, & que l'exemple de M. van Swieten a fait adopter dans pluſieurs autres contrées.

Il avoit remarqué que les jeunes Médecins ne pouvoient acquérir dans leurs études, même les mieux ſuivies, que les principes & la théorie de la Médecine; mais qu'ils n'y acquéroient preſqu'aucune lumière ſur l'application de ces principes à la pratique, & qu'il y avoit aſſez ſouvent une grande différence entre un Docteur en Médecine & un Médecin. Pour faire diſparoître cette dangereuſe différence, il engagea la Reine à établir un Profeſſeur, qui, pendant le cours des études, donnât aux Élèves, chaque jour, une leçon au lit des malades, & leur fît acquérir le coup-d'œil & les connoiſſances de pratique ſi néceſſaires à leur profeſſion.

La Médecine ne peut ſe paſſer de l'Anatomie, de la Chimie, ni de la Botanique; ces trois Sciences en ſont la baſe & le fondement : aucune des trois n'étoit cultivée à Vienne. Il n'y avoit ni amphitéâtre Anatomique, ni laboratoire public de Chimie, ni Jardin des plantes où on en fît des démonſtrations. La Chirurgie, cette autre branche de la Médecine, n'étoit pas en meilleur état; elle n'avoit ni préparations anatomiques, ni inſtrumens. L'activité du Baron van Swieten remédia à tous ces maux, & il donna libéralement aux établiſſemens utiles qu'il fit pour ces différens objets, toutes les pièces qu'il avoit pu ſe procurer pendant ſon ſéjour en Hollande, & qu'il avoit apportées à Vienne.

Un autre obſtacle bien plus conſidérable s'oppoſoit encore au progrès de l'Anatomie. Nous nous ſommes ſouvent plaints de la difficulté d'avoir des ſujets pour les diſſections, fondée ſur le reſpect mal entendu pour les cadavres humains. Cette difficulté étoit bien plus grande à Vienne : on y regardoit comme infame quiconque diſſéquoit, quiconque touchoit un cadavre, même une bête morte; il avoit bientôt la viſite

du bourreau & des écorcheurs, qui venoient s'impatronifer chez lui à titre de confraternité. Il fallut employer l'autorité fuprême, & faire une Loi pofitive pour abolir cette antique extravagance. Une fage Ordonnance foumit les Apothicaires à une vifite annuelle & imprévue, & prononça contr'eux des peines, fi leurs drogues ne fe trouvoient pas alors dans l'état où elles devoient être.

Il régnoit encore un autre abus bien propre à étouffer le mérite; il en coûtoit environ cinq mille livres de notre monnoie, pour prendre, à Vienne, le bonnet de Docteur en Médecine, foit par les droits portés trop haut, foit par le fafte inutile dont on accompagnoit cette cérémonie. Le Baron y remédia, en diminuant les droits, & en retranchant tout le fafte. Les droits de Faculté n'excèdent pas à préfent cinq cents livres, & l'argent n'a plus rien à difputer au mérite.

Il arrivoit fouvent que des Médecins en mourant, laiffoient leur veuve & leur famille dans une misère capable de décréditer cet état; M. van Swieten y pourvut, en obtenant de l'Impératrice, qu'une fomme de onze cents livres que chaque Médecin devoit payer au Fifc à fa réception, fût remife à une Société qu'il nomma la *Société des Veuves*, & qu'il chargea de veiller à leur foulagement. Ce droit & quelques autres beaucoup moindres, qui y ont été joints, ont fuffi avec la bonne adminiftration qu'il y a introduite, pour leur affurer à chacune environ quinze cents livres de revenu, & S. M. I. a bien voulu que cette Société jugeât elle-même toutes les conteftations qui pourroient naître à ce fujet, fans l'intervention d'aucun autre Tribunal.

On peut aifément imaginer que les autres Sciences n'étoient pas plus floriffantes que la Médecine, lorfque le Baron van Swieten arriva à Vienne. Nous excéderions les bornes de cet Éloge, fi nous voulions rapporter ici tout ce qu'il fit pour leur rendre leur éclat; nous dirons feulement qu'il eut foin de pourvoir à tout ce qui pouvoit leur être néceffaire. Il s'éleva, à fa follicitation, un Palais, fous le nom d'*Univerfité*, dans lequel on plaça des Profeffeurs de toute

toute eſpèce, avec quatre mille livres d'appointemens, & les ſages règlemens faits pour la Capitale, étant rendus communs dans tous les pays héréditaires, y rétablirent par-tout les études & le progrès des Sciences.

La Bibliothèque impériale, du ſoin de laquelle le Baron van Swieten étoit chargé, n'étoit pas en meilleur état. Quantité de manuſcrits précieux y périſſoient, rongés par les vers ou détruits par la pouſſière; un grand nombre de livres étoient dépareillés; la magnifique collection d'eſtampes & ſur-tout de portraits, ſupérieure en ce dernier genre à toutes celles de l'Europe, avoit été négligée & étoit demeurée imparfaite; il pourvut à tout & compléta tout. La Bibliothèque n'étoit ouverte qu'en été; on n'y trouvoit ni papier, ni plumes, ni encre pour faire des extraits: M. le Baron van Swieten obtint qu'elle fût également ouverte en hiver, & les Savans qui venoient y faire leurs recherches, y trouvèrent deux ſalles échauffées, & garnies de tout ce qui pouvoit leur être néceſſaire. En un mot, ſes jours furent preſque tous marqués par quelque établiſſement avantageux pour les Sciences & les Arts: ce ne fut qu'à cet uſage qu'il employa la confiance que lui avoit accordée l'Impératrice Reine; il ne demanda jamais rien pour lui ni pour les ſiens, & ne ſollicita des bienfaits que pour ceux qui ſe diſtinguoient dans les différens départemens dont il étoit chargé.

Tant d'établiſſemens utiles, dûs preſque en entier à ſes ſoins, & formés en ſi peu de temps, les deux premiers volumes de ſes Commentaires ſur les Aphoriſmes de Boërhaave, qui avoient paru en 1747 & en 1754, & la réputation qu'il s'étoit ſi juſtement acquiſe, avoient porté avantageuſement ſon nom à l'Académie, & lui avoient fait deſirer de ſe l'acquérir; elle trouva enfin le moyen de le mettre au nombre de ſes Membres, & elle lui conféra le 23 Juin 1750, une de ſes huit places d'Aſſocié-Étranger, vacante par la mort de M. de Crouzas.

Tout ce que nous venons de rapporter de M. le Baron van Swieten, ſeroit bien ſuffiſant pour illuſtrer ſa mémoire;

mais ce ne feroit cependant le peindre qu'à demi, que de ne le confidérer que fous ce point de vue. Il favoit tirer un bien meilleur parti de fon temps. Soins de la fanté de Leurs Majeftés & de leur augufte & nombreufe Famille, Direction des études en général, & de celle de la Médecine en particulier dans leurs vaftes États, Direction des hôpitaux, Infpection fur les maladies contagieufes & épidémiques, Préfidence de la cenfure des livres, Mémoires continuels à dreffer ou à examiner fur ces différens objets, Difcours académiques fréquens à compofer & à prononcer, Correfpondances très-étendues au dehors, Confultations dont le nombre étoit proportionné à la réputation qu'il s'étoit acquife; c'étoit la tâche que le Baron van Swieten avoit à remplir, & qu'il rempliffoit en effet avec une exactitude & une ponctualité fingulière. Ce n'eft pas tout encore, il travailloit affidûment à compléter fes Commentaires fur les Aphorifmes de Boërhaave; ouvrage qui n'a été fini qu'un an avant fa mort. Il faifoit des lectures fuivies des Ouvrages en toute Langue, qui concernoient la Médecine ou la Phyfique; & on a trouvé après fa mort, trente volumes *in-folio* des extraits qu'il en avoit faits & écrits de fa main. On ne croiroit jamais qu'un feul homme eût pu fuffire à tant d'objets différens, fi nous ne nous hâtions de dire comment il difpofoit de fon temps.

Il fe levoit régulièrement tous les jours à cinq heures du matin; à fix heures & demie il alloit à la Cour, & en revenoit à huit ou neuf heures, à moins que quelque affaire ne l'y retînt; il s'enfermoit alors dans fon cabinet, où il travailloit jufqu'à deux heures, qu'il dînoit; il n'étoit jamais plus d'une heure à table, & celle qui fuivoit fon repas, étoit deftinée à répondre aux pauvres qui venoient le confulter; il rentroit enfuite dans fon cabinet, où il reftoit jufqu'à fept heures, qu'il retournoit à la Cour; & à fon retour il travailloit encore jufqu'à neuf heures; il foupoit alors pour fe coucher à dix heures & demie. Il obfervoit fi conftamment cette manière de vivre, que quiconque n'eût

fait le voyage de Vienne que pour obſerver comment il vivoit, auroit pu ſe diſpenſer d'y reſter plus d'un jour, il n'en auroit pas ſu davantage au bout de l'année.

M. van Swieten travailloit donc régulièrement au moins douze heures par jour : nous diſons *au moins*, car dans le temps qu'il employoit à aller à la Cour, dans celui même de ſes repas, on le voyoit réfléchir, & diſpoſer dans ſa tête les matériaux qu'il préparoit; auſſi a-t-on remarqué que dans les minutes de ſes Ouvrages il ne ſe trouvoit preſque aucune correction ni aucune rature. Ses Ouvrages étoient compoſés dans ſa tête lorſqu'il les écrivoit, & il copioit, pour ainſi dire, d'après ſa mémoire, qu'il avoit ſi excellente que, même dans les dernières années de ſa vie, il récitoit dans l'occaſion cent vers & plus, d'Homère, de Virgile & des meilleurs Poëtes des Langues qu'il ſavoit : nous diſons *qu'il ſavoit*, car, outre ſa Langue maternelle, il poſſédoit le Latin, le Grec, le François, l'Allemand, l'Italien, l'Eſpagnol & l'Anglois; il avoit même depuis peu appris le Hongrois, à ce qu'il diſoit, pour s'amuſer.

Tout ce que nous venons de dire de M. van Swieten, inviteroit à ſe le repréſenter comme un Savant farouche, hériſſé de Science, de Grec & de Latin. Rien ne lui reſſembleroit cependant moins : ſon cœur étoit ſenſible à l'amitié, & il recevoit avec plaiſir le petit nombre de perſonnes que ſes occupations multipliées lui permettoient de recevoir, & le fond de gaieté naturelle qu'il avoit, rendoit ſa converſation très-amuſante.

On le regardoit néanmoins comme ſévère, & comme inflexible dans l'exercice de ſon miniſtère; il ne paſſoit aucune faute à ceux qui lui étoient ſubordonnés, il les reprenoit avec une eſpèce de dureté, mais il n'en avoit que le dehors & l'apparence; il réprimandoit, il tonnoit, il menaçoit de toute l'indignation de l'Impératrice, & il alloit lui demander grâce pour le coupable, aſſez puni, diſoit-il, par la mercuriale qu'il lui avoit faite, & par la crainte qu'il lui avoit cauſée.

Hors ces occaſions où la ſévérité lui étoit preſcrite par ſon devoir, & celle du menſonge avéré, pour lequel il avoit la plus grande horreur, on voyoit éclater la bienfaiſance & la ſenſibilité de ſon ame dans toutes les occaſions. On a ſu après ſa mort qu'il avoit donné depuis dix ans, plus de trente mille livres à la Caiſſe générale des pauvres; qu'il entretenoit pluſieurs Étudians en Médecine, dans leſquels il avoit reconnu des talens; qu'il donnoit à des Médecins du plat-pays trente, cinquante, cent ducats pour le ſoulagement des pauvres malades, & qu'il donnoit ſouvent à ceux qui venoient le conſulter, non-ſeulement de quoi acheter des remèdes, mais encore de quoi ſe nourrir eux & toute leur famille; en un mot, il étoit le père de tous les infortunés, & ne manquoit jamais de leur tendre une main ſecourable.

Jamais perſonne ne fut moins enivré que lui de ſon mérite & de ſon ſavoir, ni plus exempt de jalouſie. Ce qu'il faiſoit, un autre, diſoit-il, auroit également pu le faire. Il diſoit que l'eſprit humain étoit ſi borné, qu'il ne pouvoit paſſer certaines limites. Il ſe moquoit de ceux qui veulent abſolument remonter aux premières cauſes. On rit, ajoutoit-il, de Molière, qui fait dire à ſon candidat que l'opium endort, parce qu'il a une vertu ſoporative; il a cependant dit tout ce qu'on pouvoit dire ſur ce point: je n'en ſais & n'en ſaurai vraiſemblablement jamais davantage.

M. van Swieten avoit joui juſqu'à l'âge de ſoixante-ſept ans d'une très-bonne ſanté; mais on s'aperçut vers la fin de 1767, qu'il baiſſoit ſenſiblement, & qu'il devenoit ſujet à des infirmités, qui menacèrent plus d'une fois ſes jours. Ce fut dans ces fâcheuſes circonſtances qu'un évènement encore plus fâcheux, l'obligea à faire beaucoup plus qu'il ne pouvoit, & mit ſon mal dans le cas d'être abſolument ſans remède.

Au mois de Mai 1768, Madame l'Archiducheſſe de Saxe-Teſchen fut réduite à l'extrémité par un accouchement laborieux, dont les ſuites furent longues & dangereuſes; dans

ce même-temps, l'Impératrice-Reine fut attaquée d'une petite vérole de la plus mauvaise espèce; le Duc Albert de Saxe-Teschen & Madame l'Archiduchesse Josephe, déja fiancée au Roi des deux Siciles, furent attaqués du même mal auquel cette dernière Princesse succomba. M. le Baron van Swieten ne quitta ni jour ni nuit les malades; tant de veilles, d'inquiétudes & de fatigues achevèrent de ruiner son tempérament: & depuis cette époque, les hivers devinrent pour lui des temps critiques, & il n'en passa plus sans accidens plus ou moins fâcheux. Le printemps le remettoit un peu, mais on remarquoit en lui un dépérissement sensible.

Ce fut cependant dans cet état qu'il donna au Public le cinquième & dernier volume de ses Commentaires sur les Aphorismes de Boërhaave.

Aphorisme, suivant la force du mot grec *, signifie une chose séparée, isolée. Les Aphorismes sont en effet de courtes sentences, des préceptes, uniquement fondés sur l'observation, & sans égard à aucun système. Cette manière d'exposer les principes a été premièrement mise en usage par Hippocrate, le Prince de la Médecine. Boërhaave l'avoit imité, peut-être même surpassé dans le style nerveux & serré qu'il emploie: les explications qu'il faisoit dans ses leçons, servoient de commentaire à ses Aphorismes. M. van Swieten a suppléé au défaut de ces leçons, que la mort de M. Boërhaave avoit interrompues; il a par-tout expliqué, développé des vérités, dont son auteur ne présentoit que le germe; il les a étendues, il les a éclaircies par des exemples choisis, tirés des Mémoires des différentes Académies, & de tous les Journaux littéraires. Son Commentaire est un excellent Professeur, & le Public a décidé depuis long-temps que ce Professeur seroit immortel. On est étonné du profond savoir & de la vaste lecture que cet ouvrage a exigé, & nous ne dirons rien de trop, en assurant qu'il sera toujours un des guides les plus sûrs que puissent avoir ceux qui se destinent à la Médecine.

* Ἀφορίζω, separo.

Quoique les hivers fussent fâcheux pour M. van Swieten, cependant il avoit passé celui de 1771 à 1772, sans aucun

accident marqué ; mais on le voyoit devenir pesant & dépérir: & quoiqu'il affectât une gaieté apparente, il retomboit souvent dans une sombre mélancolie ; on l'entendoit quelquefois dans la solitude de son cabinet élever la voix, & demander au Ciel la force de souffrir patiemment les douleurs qu'il ressentoit.

Malgré cet état, il ne relâchoit rien de son travail ; il voulut même continuer, malgré le froid le plus rigoureux, ses visites aux Hôpitaux situés à une demi-lieue de Vienne ; il répondit à ceux qui le pressoient de se reposer, la même chose que répondoit en cas pareil un de nos plus célèbres Magistrats ; *le puis-je, quand je sai qu'il y a tant d'hommes qui souffrent !*

Vers la fin de Mars 1772, il parut au doigt d'un ses pieds une petite tumeur blanchâtre, qui en l'ouvrant ne donna qu'un peu d'eau sereuse, & qu'il pansa lui-même : bientôt on s'aperçut que l'os étoit entamé ; & au bout de quelques jours, en retirant son pied de l'eau, où il le baignoit, on trouva le doigt noir & gangréné, il fallut en enlever les chairs ; il souffrit cette opération en lisant & sans sourciller ; on le mit au lit, & le mal parut céder au quinquina, dont on lui fit faire usage ; mais bientôt on découvrit un autre doigt attaqué ; il étoit trop bon Médecin, pour ne pas connoître le danger de son état ; il regarda son Médecin & son Chirurgien, & leur dit seulement, *c'en est fait :* puis il rendit la conversation générale ; il ne cessa pas même de travailler. Le 30 Mai il fit encore venir le Professeur de Chimie & quelques Apothicaires, & travailla avec eux plus de deux heures à une nouvelle Pharmacopée qu'il avoit entrepris depuis environ sept mois. Mais à la levée de l'appareil, toute la plante du pied parut gangrénée ; il vit bien qu'il n'y avoit plus de temps à perdre ; il demanda les secours spirituels qui lui furent administrés en présence de l'Archiduc & des Archiduchesses. L'Impératrice-Reine ne put prendre sur elle d'assister à cette triste cérémonie ; tous les assistans fondoient en larmes ; lui seul conservoit la tranquillité & la sérénité qui ne l'abandonnoient jamais ; il fit venir sa femme & ses enfans dîner auprès de son lit ; il s'entretenoit avec eux, comme un homme,

qui prêt à partir pour un long voyage, reſte avec ceux qu'il aime juſqu'au moment de ſon départ. Les forces diminuoient cependant à vue d'œil, & il vit pendant pluſieurs jours approcher l'inſtant de ſa mort, non avec cette indifférence aveugle ou affectée à laquelle on a quelquefois oſé proſtituer le nom de philoſophie, mais avec la réſignation d'un Chrétien qui met en Dieu ſeul toute ſa confiance. *Quand nous avons* (ce ſont ſes propres termes) *rempli la tâche que Dieu nous avoit impoſée, il vient nous avertir qu'il a beſoin de nous ailleurs ; un enfant doit-il craindre un père qui l'appelle !*

Le 6 Juin il voulut écrire à ſon fils ; mais il ne put tracer que quelques mots ſans ſuite, & en les regardant, il dit *cela ne va plus.* Ce fut en effet le dernier effort de ſon eſprit, qui commença à baiſſer peu de temps après : il reprit cependant une vigueur momentanée lorſqu'il vit, le 13 Juin, entrer l'Impératrice-Reine dans ſa chambre, ſans qu'il en fût prévenu; ſes forces ſe ranimèrent pour la remercier de toutes les bontés dont elle l'avoit honoré depuis vingt-ſept ans qu'il étoit à ſon ſervice : & cette grande Princeſſe lui en donna de nouveaux témoignages, qu'elle arroſa de ſes larmes. Cette ſcène attendriſſante fut le dernier moment de ſa préſence d'eſprit; il tomba auſſitôt après de délire en délire, & mourut le 18 Juin 1772, âgé de ſoixante-douze ans & environ un mois.

A peine fut-il expiré, que l'Impératrice-Reine s'empara des reſtes précieux d'un homme auquel elle avoit ſi juſtement accordé toute ſa confiance, & fit rendre les plus grands honneurs à ſa mémoire : ſon Éloge funèbre fut prononcé publiquement le 6 Septembre dernier, dans l'aſſemblée de l'Univerſité de Vienne, & cette grande Princeſſe daigna en dicter elle-même quelques endroits à l'Orateur. Il faudroit peut-être remonter aſſez avant dans l'antiquité, pour trouver un Philoſophe auquel on ait rendu autant d'honneurs après ſa mort, & qui les ait ſi bien mérités.

Le Baron van Swieten étoit marié; il avoit épouſé en 1729 Marie-Lambertine-Thérèſe Ter Beek van Coësfeld; d'une ancienne famille patricienne, originaire de Caſſel en Heſſe,

avec laquelle il a vécu dans une union d'autant plus conſtante qu'elle étoit fondée ſur l'heureuſe ſympathie de leurs caractères & de leurs vertus. Il reſte de ce mariage deux fils & deux filles. Des deux premiers, l'un eſt Envoyé extraordinaire & Plénipotentiaire de la Cour Impériale à celle de Berlin, & ſuit, quoique dans une carrière différente, les traces de ſon illuſtre père. Le cadet eſt Auditeur à la Chambre des comptes de Bruxelles : l'aînée des filles eſt mariée à M. de Tſerelay de Tilly, Lieutenant-colonel au ſervice de L. M. & la cadette au Baron de Bonaërt, Grand-Bailli d'Ypres.

M. van Swieten n'a laiſſé qu'une fortune médiocre, ſi on conſidère le crédit dont il jouiſſoit. Rien ne peut mieux prouver la droiture & le déſintéreſſement de cet homme reſpectable; d'autres en ſa place euſſent profité de la confiance du Souverain pour s'enrichir, il ne l'a jamais employée que pour le bien public, ſans rien demander pour lui ni pour les ſiens : exemple admirable, mais qui ſera probablement plus ſouvent admiré qu'imité. Il s'eſt toujours contenté de vivre honorablement d'une manière également éloignée de l'oſtentation & de l'avarice, & de laiſſer un nom bien plus grand que ſa fortune.

Il n'y a d'Ouvrages imprimés de M. van Swieten que les cinq volumes *in-4.°* de ſes Commentaires ſur Boërhaave, & un *Traité de Médecine à l'uſage des armées*, imprimé *in-8.°* en Allemand & en François, & réimprimé à Paris dans cette dernière langue; mais on a trouvé dans ſes manuſcrits des pièces intéreſſantes, & nommément un Traité *de Corde*, par Boërhaave, avec des notes que M. van Swieten y avoit ajoutées.

La place d'Aſſocié-Étranger qu'il occupoit dans cette Académie, a été remplie par M. Franklin, de la Société royale de Londres.

MÉMOIRES

MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXII.

RECHERCHES DE CALCUL INTÉGRAL.

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

JE prie les Géomètres qui voudront bien jeter les yeux ſur ces Recherches, de les recevoir avec indulgence. Je ne me ſuis permis de leur préſenter ces vues, que parce que j'ai eſpéré qu'ils ſauroient les pouſſer plus loin que moi : elles doivent ſervir de fondement à un ouvrage que je me propoſe de donner ſur le Calcul intégral,

matière importante & difficile, qui a été, depuis quinze ans, l'objet presque unique de mes recherches.

ARTICLE PREMIER.

De la distinction des équations aux différences partielles qui admettent des intégrales de l'ordre immédiatement inférieur d'avec celles qui n'en admettent point.

PROBLÈME I.er

Soit V = 0 *une équation aux différences partielles, on demande les équations de condition qui doivent être identiques, ou avoir lieu en même temps que la proposée, pour que l'on puisse supposer* V *de la forme* $A\partial B + A'dB$.

SOLUTION.

Je prends la différence de V & de $A\partial B + A'dB$ par rapport à une différentielle δ, & comparant terme à terme, j'ai

$$\frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta A}{\delta z}\partial B + \frac{A\delta dB}{\delta z} + \frac{dA'}{\delta z}dB + \frac{A'\delta dB}{\delta z};$$

$$\frac{\delta V}{\delta \partial z} = \frac{\delta A}{\delta \partial z}\partial B + \frac{A\delta dB}{\delta \partial z} + \frac{dA'}{\delta \partial z}dB + \frac{A'\delta dB}{\delta \partial z},$$

$$\frac{\delta V}{\delta d z} = \frac{\delta A}{\delta d z}\partial B + \frac{A\delta \partial B}{\delta d z} + \frac{\delta A'}{\delta d z}dB + \frac{A'\delta dB}{\delta d z},$$

& ainsi de suite.

On voit donc qu'à cause des $\frac{n+1.n+2}{1.2}$ différences ou variables qui entrent dans V, on a $\frac{n+1.n+2}{1.2}$ équations semblables, & que si on met au lieu de $\frac{\delta \partial B}{\delta \partial z}$ sa valeur $\frac{\partial.\delta B}{\delta \partial z} + \frac{\delta B}{\delta z}$ & ainsi de suite, on aura un nombre $\frac{n+1.n}{1.2}$ de différences partielles de B & de leurs

différentielles à éliminer; ce qui produira néceſſairement $n + 1$ équations de condition, entre les différences de V, quantités connues, & les quantités A, A' ou leurs différences.

Cela poſé on remarquera que l'on peut toujours prendre A ou A', tels qu'ils ſatisfaſſent à ces équations; mais qu'il faut, pour ſatisfaire aux conditions du Problème, que ni A ni A' ne deviennent $\frac{1}{0}$, lorſque V & B deviennent égaux à zéro: or cette condition rend égaux à zéro, en même temps que la propoſée, tous les termes multipliés par les différences partielles de A & A' dans les équations identiques; donc ce qui reſte après les avoir effacés, doit être nul ou identiquement ou en même temps que la propoſée; donc éliminant A & A', on aura $n - 1$ équations de condition, qui devront être ou identiques, ou avoir lieu en même temps que la propoſée. C. Q. F. T.

Autre ſolution. Soit $V = 0$, je ſuppoſe $(V - L) A = \partial B$, $LA' = dB$. Je prends les équations de condition, par rapport à la caractériſtique ∂ pour la première formule, & par rapport à la caractériſtique d, pour la ſeconde, en regardant dans la première tous les $d^{n-1}z$, $d^{n-2}z$, &c. comme des variables particulières, & de même les $\partial^{n-1}z$, $\partial^{n-2}z$, &c. dans la ſeconde. J'aurai donc, avant d'avoir éliminé les A, A', $2n$, équations de condition qui contiendront de plus L & ſes différences. Maintenant, par les formules du Problème IV, *page 18* de mon calcul intégral, j'ai par chacune des ſuppoſitions ci-deſſus, une valeur de chacune des $\frac{n.n+1}{1.2}$ différences partielles de B; donc les égalant entr'elles, j'ai $\frac{n.n+1}{1.2}$ équations entre les différentielles partielles de L, & $\frac{n+1.n+2}{1.2}$ différentielles partielles; donc il en reſtera $n + 1$ dans les $2n$ équations de condition. Mais il faut de plus que $\frac{\delta A'L}{\delta \partial^n z} = 0$, & $\frac{\delta (V - L) A}{\delta d^n z} = 0$, ce qui

donne encore deux équations entre les différences partielles de L. Donc éliminant les différences de L, on aura un nombre $n + 1$ de conditions, qui contiendront A, A' & L ſans ſes différences partielles. Or, il eſt aiſé de voir dans toutes ces opérations, que puiſque $V = 0$, $L = 0$, $B = 0$, qui ont lieu en même temps, ne doivent rendre ni A, ni A' égaux à $\frac{1}{0}$, il faut que dans toutes ces équations identiques, la ſuppoſition de ces quantités égales à zéro, qui fait diſparoître tous les termes où il y a des différences partielles de A ou de A', rende le reſte nul ou identiquement ou dans les mêmes hypothèſes; donc l'on tirera de même, en éliminant A & A', $n - 1$ équations de condition comme ci-deſſus. C. Q. F. T.

PREMIÈRE REMARQUE.

Si au lieu de rechercher les cas où V peut devenir de la forme $A \partial B + A' dB$, je cherchois ceux où V peut devenir de la forme $A\,(dA' \partial B - \partial A' dB)$, il eſt aiſé de voir que faiſant les mêmes opérations que ci-deſſus, j'aurai des équations de condition. Maintenant, comme A eſt, par rapport aux $\partial^n z$, $\partial^{n-1} dz$, du degré $m - 2$, celui des mêmes quantités étant m dans V, j'aurai la forme de A, par rapport à ces quantités, comme celles de $\partial A'$ & dA'. Subſtituant donc ces formes dans les équations de condition, qui ne contiendront plus d'indéterminées que des fonctions de z, dz, ∂z, &c. juſqu'à $\partial^n z$, $\partial^{n-1} dz$, &c. excluſivement, ces équations devront être nulles identiquement; faiſant donc égaux à zéro, dans chaque équation, tous les coëfficiens des $\partial^n z$, $\partial^{n-1} dz$, &c. & de leurs puiſſances, on aura des équations identiques, dont pour avoir les dernières équations de condition, il faudra éliminer les indéterminées. *Voyez les Mémoires de 1770, page 118, remarque IV.*

Dans le cas de cette remarque, puiſque l'on a $dA' \partial B - \partial A' dB = 0$, on aura pour intégrale générale de l'ordre, $n - 1$ $B + FA' = 0$, F déſignant une fonction arbitraire.

SECONDE REMARQUE.

On a ſuppoſé ici que la propoſée ne contenoit pas $\partial^n x$, ni $\partial^n y$, &c. mais ſi elle contenoit ces quantités, il eſt aiſé de voir que l'on auroit facilement, par ces mêmes principes, les deux nouvelles équations de condition, qu'il faudroit avoir alors.

TROISIÈME REMARQUE.

Les équations ci-deſſus, au nombre de $n - 1$, répondent aux $n - 1$; conditions que dans le *N.° I.er* du Mémoire de 1770, ſur ces équations, j'ai remarquées avoir lieu entre les coëfficiens de la formule

$$d^n Z + A d^{n-1} dz \ldots\ldots\ldots + Z = 0,$$

qui repréſente toutes les équations dont l'intégrale finie eſt $Z = 0$, lorſque ces équations ſont produites par les différentiations d'une fonction de l'ordre inférieur d'une unité. Il ſeroit aiſé de déterminer, par le même principe employé dans ce numéro, le nombre des équations de condition, pour toutes les eſpèces d'équations différentielles.

QUATRIÈME REMARQUE.

Si l'on n'a point les équations de conditions égales à zéro, en y mettant pour une des plus hautes différences la valeur tirée de V, mais qu'elles fourniſſent une équation moins générale, & qui ait lieu en même-temps que V, il n'en faut pas conclure que $V = 0$ n'ait pas d'intégrale finie générale, mais ſeulement que $V = 0$ n'a pas d'intégrale générale de l'ordre inférieur. La recherche des équations de condition conduit donc ici à des ſolutions particulières, comme dans les équations ordinaires; mais ces ſolutions qui peuvent être quelquefois ſuffiſantes, ne ſont pas ici les ſeules dont les propoſées ſoient ſuſceptibles.

PROBLÈME II.

Trouver les équations de condition, pour que l'intégrale B

de l'équation V = o *puiſſe être de la forme* $A'' dB' + A''' dB'$.

SOLUTION.

On trouve par le Problème précédent, les valeurs de $\frac{\delta B}{\delta z}$, $\frac{dB}{\delta dz}$, $\frac{\delta B}{\delta \partial z}$, en fonctions de V & de A, A'. Subſtituant donc, dans les équations de condition, pour que $B = 0$ ſoit de cette forme, ces valeurs des différences partielles de B, on aura n, équations qui ne contiendront que V, A, A', A'', A'''; faiſant égaux à zéro, dans ces équations, les termes multipliés par V, on aura le reſte qui devra être nul identiquement & en même-temps que V, ce reſte ne contiendra que les A, ∂A, dA & A', ∂A, dA' &c. A'', $\partial A''$, dA'' & A''', $\partial A'''$, dA''', & éliminant les deux nouvelles indéterminées A'', A''', on aura $n - 2$, nouvelles équations de conditions, *C. Q. F. T.*

PREMIÈRE REMARQUE.

Il eſt aiſé de voir que ſi on recherche les conditions pour que B' puiſſe être de la forme $A^{IV} \partial B'' + A^{V} dB''$, on trouvera de même $n - 3$, conditions où il n'y aura plus que des fonctions connues, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à une intégrale finie.

DEUXIÈME REMARQUE.

Si l'on veut avoir les équations comme dans la première Remarque ci-deſſus, même ſans connoître B, on ſuppoſera d'abord B du ſecond degré ſeulement, par rapport aux plus hautes différences $\partial^{n-1} z$, $d\partial^{n-2} z$, &c. & on cherchera pour B, mis ſous cette forme, les équations de condition, *1.ere Remarque*, comme ſi B étoit connu; ces équations ne renfermeront d'indéterminées que les coëfficiens ſans $\partial^{n-1} z$, $\partial^{n-1} dz$, &c. de la valeur hypothétique de B; pour les éliminer, on différentiera cette valeur de B, ou on la

ſubſtituera dans la propoſée, & on ſuppoſera que cette ſubſtitution la rende nulle identiquement; c'eſt-à-dire qu'on égalera à zéro le coëfficient de tous les termes de l'ordre n, ou $n - 1$ de différences.

PROBLÈME III.

Trouver en général les équations de condition, pour que $V = 0$ *puiſſe être de la forme* $A \partial B + A' dB + A'' \partial dB + A''' \partial dB + A^{IV} d^2 B$, *& ainſi de ſuite.*

SOLUTION.

Je prends comme ci-deſſus δV, & je le compare terme à terme à

$$\delta (A \partial B + A' dB + A' \partial^2 B \ \&c.);$$

cela poſé, ſi la formule ne renferme que deux ordres, il eſt aiſé de voir que le nombre des équations de comparaiſon étant égal à celui des différences partielles de V, ſera $\frac{n+1 \,.\, n+2}{2}$; que celui des différences partielles indéterminées de B ſera $\frac{n-1 \,.\, n}{2}$; que celui des A ſera 5; & qu'ainſi, après avoir fait évanouir les différences de B, & éliminé les A, il reſtera $2n - 4$, équations de condition.

De même, ſi la formule eſt compoſée de trois ordres, le nombre des équations de comparaiſon ſera toujours $\frac{n+1 \,.\, n+2}{2}$, celui des différences de B ſera $\frac{n-2 \,.\, n-1}{2}$, celui des A ſera 9, & par conſéquent, après avoir fait évanouir les différences de B, & éliminer les A, il reſtera $3n - 9$, équations de conditions.

Et en général, on trouvera ſi la formule eſt compoſée de m ordres, $mn - m^2$ ſera le nombre des équations de conditions, qui, comme on voit, devient zéro dans le cas de $n = m$. Ce qu'on ſavoit d'ailleurs.

Maintenant, pour trouver dans tous les cas les équations

de conditions, on obſervera que toute la difficulté ſe réduit à exprimer un terme tel que $\frac{\delta\, d^m\, \partial^n B}{\delta\, \partial^p\, \partial^q z}$ en différences partielles de B; pour cela, on remarquera que...... $\frac{\delta\, d^m\, \partial^n B}{\delta\, \partial^p\, d^q z} = \partial.\ \frac{\delta\, d^m\, \partial^{n-1} B}{\delta\, \partial^{p-1}\, \partial^q z} + \frac{\delta\, d^m\, \partial^{n-1} B}{\delta\, \partial^{p-1}\, d^q z}$, où l'on voit que dans les deux termes l'ordre des différences placées ſous le ſigne δ eſt diminué de l'unité; donc continuant, on aura en termes δB, & leurs différences ∂ & d la valeur de $\frac{\delta\, d^m\, \partial^n z}{\delta\, d^p\, \partial^q z}$, & par conſéquent l'élimination des différences partielles de B ſera toujours poſſible.

Quant à celle des A, on obſervera que les A ne doivent pas être tels que, faiſant V ou B égaux à zéro, ils deviennent infinis; donc, les termes où V & dB, &c. ſe trouvent multipliés par des différences partielles de A, doivent être nuls lorſque V & dB, &c. ſont égaux à zéro; donc, les effaçant des équations ci-deſſus, les reſtes ſeront égaux à zéro, ou identiquement, ou lorſque $V = 0$; donc on aura en éliminant, des équations de condition nulles ou identiquement, ou lorſque $V = 0$. C. Q. F. T.

Première Remarque.

Il eſt aiſé de voir que ſi dans ce Problème on avoit eu les $\partial^n y$, ou les $\partial^n x$, ou bien ſi on avoit eu pluſieurs z, les équations de condition auroient augmenté en nombre, mais qu'on les auroit eues par les mêmes opérations. Ainſi l'on trouveroit, par cette méthode, les équations de condition pour que l'équation $V = 0$, lorſqu'elle contient pluſieurs z, ou des différences de ∂y ou de ∂x, puiſſe avoir une intégrale finie.

Deuxième Remarque.

Dans ce cas, cette même méthode donnera les ſolutions particulières lorſqu'il n'y en aura pas de générales qui ſoient poſſibles, & ſi on prend ſucceſſivement les équations de condition

condition pour tous les ordres, on aura ces ſolutions particulières, tant finies que des ordres inférieurs.

Troisième Remarque.

On peut auſſi employer la méthode expoſée ci-deſſus à la recherche des équations de *maximum;* je ne m'y arrêterai point ici, ayant fait aſſez remarquer ailleurs la ſimilitude de ces deux eſpèces de queſtions.

Quatrième Remarque.

De la même manière que dans la première Remarque du Problème I.er on a indiqué le moyen d'avoir les équations de condition, pour que $AV = 0$ réponde à la forme $\partial B\, dA' - \partial A'\, dB$; de même, on trouvera ici les équations de condition, pour que la propoſée réponde à d'autres formes d'intégrales. Soit

1.° $V = 0$ de la forme $A\partial B + A'dB$, & qu'on cherche le cas où l'intégrale pourra être de la forme

$$B = P + F(Q) + R\,\frac{\partial F}{\partial Q} + \&c.$$

on verra que puiſque l'on a $\partial P + \frac{\partial F}{\partial Q}\partial Q + \&c. = \partial B + \partial R\,\frac{\partial F}{\partial Q}$,

& $dP + \frac{\partial F}{\partial Q}\, dQ$, &c. $= dB$, & puiſqu'il faut que $+ dR\,\frac{\partial F}{\partial Q}$,

$\frac{\partial F}{\partial Q}$ ne ſe trouve plus dans la formule $A\partial B + A'dB = 0$, il faudra que $A = dQ + dR$ & $A' = -\partial Q - \partial R$, ce qui donne comme ci-deſſus, $B + F\,(Q + R)$ ou $P + F\,(Q + R) = 0$ pour l'intégrale générale. On voit que ſi on avoit continué la ſérie ci-deſſus, on auroit trouvé les coëfficiens des termes $\frac{\partial\partial F}{\partial Q^2}$, $\frac{\partial^3 F}{\partial Q^3}$, &c. déterminés de manière à donner la même ſolution, comme il

seroit facile de s'en assurer par le calcul. Ainsi, cette supposition ne donne aucune étendue à l'hypothèse de la première Remarque du Problème I.er

2.° Soit pour une formule

$A\partial B + A' dB + A'' \partial\partial B + A''' \partial dB + A^{\text{IV}} ddB,$

la supposition de l'intégrale

$$B = P + F(Q) + R\,\frac{\partial F}{\partial Q} + S\,\frac{\partial\partial F}{\partial Q^2}, \text{ \&c.}$$
$$+ F'(Q') + R'\,\frac{dF'}{\partial Q'} + S'\,\frac{\partial F'}{\partial Q'}, \text{ \&c.}$$

Prenant les valeurs de ∂B, dB, $\partial^2 B$, $\partial\partial B$, ddB, que donne cette hypothèse, & substituant, nous aurons A, A', A'', A''', A^{IV}, qui devront être tels que $\frac{\partial F}{\partial Q}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2}$, $\frac{\partial F'}{\partial Q'}$, $\frac{\partial\partial F'}{\partial Q'^2}$ ne soient plus dans la formule; donc, puisque Q, Q', R, R', S, S' sont des fonctions des variables où la différence du n.e & du $n - 1$.e ordre manque, on aura la forme de A par rapport aux différences de cet ordre; & substituant dans les équations de condition, on aura des équations qui devront être identiques; c'est-à-dire, que tous les coëfficiens des différences, tant de l'ordre n que du $(n - 1)^e$ devront être nuls par eux-mêmes.

Ensuite on pourra ou supposer que la forme générale d'équations s'arrête à un terme donné, & alors on aura une suite de nouvelles équations de condition pour la possibilité de cette forme, ou bien on supposera la forme indéfinie, & on aura les deux coëfficiens de chaque terme de la série donnés successivement chacun par une équation.

3.° On voit que la même méthode aura lieu pour des formules d'intégrales d'ordres plus élevés, mais il n'arrivera pas alors comme dans le second ordre où le nombre des coëfficiens étant 5, les quatre quantités à éliminer suffisent exactement pour déterminer les coëfficiens; dans le troisième, par exemple, faisant l'intégrale

$$B = P + FQ + R\frac{\partial F}{\partial Q} + S\frac{\partial\partial F}{\partial Q^2} + T\frac{d^3 F}{dQ^3}, \&c.$$
$$+ F'Q' + \&c.$$
$$+ F''Q'' + \&c.$$

on trouvera qu'il y a neuf quantités à éliminer ſi on s'arrête au quatrième terme de la ſérie; mais il n'y a que neuf coëfficiens à déterminer; donc, outre leur équation de condition du Problème, il y en aura une de plus entre les Q, les R, les S & les T. Dans le quatrième ordre, on aura, en ſuivant la même méthode, ſeize quantités à éliminer & quatorze coëfficiens indéterminés, ce qui, outre les équations de condition du Problème en donnera trois autres; & en général pour l'ordre n, le nombre des quantités à éliminer ſera n^2, celui des coëfficiens indéterminés de la valeur hypothétique de V ſera $\frac{n^2+3n}{2}$, & par conſéquent il y aura entre les n^2, quantités indéterminées de la valeur de B $\frac{n^2-3n+2}{2}$, $\frac{n-1.n-2}{1.2}$, équations de condition, indépendamment de celles du Problème.

On voit qu'on pourra, pour un ordre quelconque, ſuppoſer enſuite finie ou indéfinie la valeur hypothétique de B, & on aura ou une ſuite de nouvelles équations de condition ou une équation pour donner chaque coëfficient indéterminé de la ſérie.

On auroit pu, au lieu de la forme choiſie ci-deſſus, prendre

$$B = P + RFQ + S\int(FQ).\partial Q + T\int(\int FQ\partial Q)\partial Q, \&c.$$
$$+ R'F'Q' + S'\int(F'Q')\partial Q' + T\int(\int FQ'\partial Q')\partial Q', \&c.$$

& ainſi de ſuite pour des ordres plus élevés; on voit qu'ici le nombre des quantités à éliminer ſera $n^2 + n$, & qu'ainſi au lieu de $n^2 - \frac{n^2+3n}{2} + 1$, le nombre des conditions entre les coëfficiens de la valeur hypothétique de B ſeront, outre celles du Problème, au nombre de

$$n^2 + n - \frac{n^2+3n}{2} + 1 = \frac{2n^2+2n-n^2-3n+2}{2}$$

$= \frac{n^2-n+2}{2} = \frac{n.n-1}{2} + 1$, enſuite on remarquera que dans les termes ſuivans de la ſérie, les termes à faire diſparoître ſeront $\int(FQ)\partial Q$, & $\int(F'Q')\partial Q'$, & que pour les faire diſparoître on aura à employer les coëfficiens des termes où le ſigne intégral ſera répété $n + 1$ fois; donc, ces coëfficiens entreront ſeuls dans l'équation qui ſervira à faire diſparoître ces fonctions, & ils ſeront donnés par une équation linéaire & finie. Nous ferons uſage de cette obſervation dans l'article des Équations linéaires.

PROBLÈME IV.

Trouver les équations de condition, pour que $AV + A'\partial V + dV$ *ſoit ſuſceptible de la forme* $A, \partial B + A', dB$ *&* B *de la forme* $A'', \partial B' + A''', dB'$.

SOLUTION.

On prendra les équations de condition comme ci-deſſus, & puiſqu'on ſuppoſe B & B' égaux à zéro, en même-temps que V, on éliminera après avoir ſuppoſé nuls toutes les différentielles partielles des A, qui ſont toutes multipliées par V, B, ou B', & l'on aura $2n - 3$, équations de condition qui ſeront nulles, ou par elles-mêmes, ou en même-temps que $V = 0$. C. Q. F. T.

PREMIÈRE REMARQUE.

Il eſt aiſé de voir que la méthode auroit également lieu pour les équations ſous la forme

$$AV + A'\partial V + A''dV + A'''\partial\partial V + A^{\text{IV}}d\partial V + ddV,$$

qu'on ſuppoſeroit d'une forme ſuſceptible de trois intégrations, alors le nombre des conditions ſeroit $3n - 5$. Enfin, ſi on ſuppoſoit la formule de l'ordre m, & qu'on voulut qu'elle fût ſuſceptible de ſolutions ſucceſſives juſqu'à

la ſolution finie, on auroit par la même méthode....
$\frac{n+m.n+m-1}{2}$, équations de condition, & ſeulement
$\frac{m+1.m+2}{2}-1$, coëfficiens, & après avoir éliminé
$\frac{n+m.n+m-1}{2}-\frac{m+1.m+2}{2}+1$, équations de condition, nombre qui ne peut devenir o lorſque $n<1$.

Deuxième Remarque.

Toute ſolution finie d'une équation aux différences partielles, eſt compoſée de fonctions tranſcendantes & d'arbitraires combinées les unes avec les autres, & il eſt aiſé de voir, que quelle que ſoit une pareille fonction, on peut éliminer toutes les fonctions par de doubles différentiations ſucceſſives; donc toutes les fois que la propoſée $V=0$ aura une intégrale finie, on trouvera une formule $AV+A'\partial V$, &c. qui ſera intégrable par des intégrations ſucceſſives & dont l'intégrale donnera celle de la propoſée.

Troisième Remarque.

Si on vouloit que $A\partial V+A'dV+A''V$ fut de la forme ∂A, $dB-\partial BdA$, & ainſi de ſuite, on trouveroit en général les équations de condition; en ſuppoſant par exemple ici, que A & A' ſont des fonctions linéaires par rapport aux différences de l'ordre $n+1$.

Quatrième Remarque.

Il faut obſerver qu'en général les équations de condition, trouvées par la remarque précédente, ou par les remarques première du Problème I, ſeconde du Problème II, & quatrième du Problème III, ne peuvent ſervir à trouver les quantités qui mettent $V=0$, ou ſes différences, ſous la forme dA, dB, ∂B, ∂A; en effet, ces quantités doivent être néceſſairement données elles-mêmes par des équations aux différences partielles, plus compliquées que les propoſées;

ainſi les valeurs tirées, en éliminant, des équations de condition, ſeroient, ſi on ſuppoſoit ces valeurs données par des équations linéaires, ou finies, ou aux différences ordinaires, telles que les coëfficiens de ces équations ſeroient tous zéro, ou la valeur trouvée égale à $\frac{0}{0}$.

ARTICLE SECOND.

De la manière de diſtinguer les équations aux différences partielles, dont les intégrales contiennent des fonctions arbitraires & d'en déterminer le nombre.

1.° Soit une équation d'un ordre quelconque, qui contienne z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{\partial y}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial dz}{\partial x \partial y}$, $\frac{ddz}{\partial y^2}$, &c. & qu'aucun rang n'y manque lorſqu'elle ſera ordonnée par rapport à x & à y, que l'on ſuppoſe

$$z = a + bx + b'y + cx^2 + e'xy + e''y^2 \ldots$$

que l'on ſubſtitue ces valeurs dans la propoſée; on aura, ∂x ni ∂y ne ſe trouvant pas dans la propoſée, 1.° tous les rangs de la propoſée, juſqu'au n.^{e} excluſivement, dont les coëfficiens ſeront arbitraires; 2.° les coëfficiens du n.^{e} aſſujettis à une équation; ceux du $n + 1$.^{e} à deux; du $n + 2$.^{e} à trois; or, comme le nombre des coëfficiens indéterminés de ces rangs eſt $n + 1$; on aura dans chaque rang n coëfficiens arbitraires, ce qui ſignifie que dans ce cas, toutes les fois que la ſolution ſera finie, on aura n fonctions arbitraires, & qu'il y a toujours une ſolution poſſible, au moins en ſéries infinies.

2.° Suppoſons maintenant que la propoſée contienne des ∂x, ∂y, qu'on y ait fait la ſubſtitution ci-deſſus, en prenant au lieu des $\partial\partial z$, ∂dz, ddz, leurs valeurs $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\partial x^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\partial^2 x$, $\frac{\partial dz}{\partial x \partial y}\partial x \partial y$, $\frac{ddz}{\partial y^2}\partial y^2 + \frac{dz}{\partial y}\partial^2 y$, & mettant les valeurs de $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial dz}{\partial x \partial y}$, $\frac{ddz}{\partial y^2}$, $\frac{dz}{\partial y}$ en ſéries ſans ∂y, ni ∂x, & ainſi de ſuite pour les autres ordres.

Il ſuit des principes ci-deſſus, que l'on aura autant de fonctions que cette ſubſtitution doit rendre nulle, qu'il pourra y avoir de termes en ∂x, ∂y, $\partial\partial x$, $\partial\partial y$, &c. & qu'ainſi pour que la valeur de z ait la même étendue que ci-deſſus, *(article premier)* il faut ou que toutes ces fonctions deviennent nulles par elles-mêmes, excepté celle qui eſt ſans ∂x, ni ∂y, ou bien qu'elles aient toutes lieu en même temps que celle-là; ainſi toutes celles où l'équation pourra contenir le nombre n de fonctions arbitraires, pourra auſſi ſe rapporter toujours au cas du numéro précédent. Lorſqu'elles ne s'y rapportent pas, on trouvera le nombre des fonctions arbitraires en comparant les équations que donne entre les coëfficiens de chaque rang, l'égalité à zéro de chaque coëfficient des différences de x ou de y dans la propoſée préparée comme on l'a enſeigné au commencement de ce numéro 2.

3.° La ſuppoſition de z égale à une fonction de x & de y n'eſt pas générale dans ce cas non plus que dans celui d'une équation aux différences ordinaires, où aucune différentielle n'eſt ſuppoſée conſtante; en effet, l'intégrale peut, dans les deux cas, contenir une quantité t qui a diſparu, ainſi que ſes différentielles conſtantes & indépendantes l'une de l'autre; & dans ce cas des équations partielles, l'intégrale peut, par conſéquent contenir non-ſeulement t, mais encore une ou pluſieurs fonctions arbitraires de t; pour reconnoître donc, ſi une propoſée contient ou ne contient pas de telles fonctions de t, nous ferons z égal à une fonction indéfinie de x, y & t, & ſubſtituant cette fonction ordonnée par rapport à x & à y, & dont chaque terme a pour coëfficient alors une ſérie en t; nous verrons s'il reſte une de ces ſéries indéterminées, ou bien ordonnant par rapport à t, ſi dans chacune des ſéries en x & y, qui multiplient chaque terme, il reſte un ou pluſieurs coëfficiens indéterminés. On pourra encore rappeler ces équations à la forme des autres, en mettant par-tout au lieu de $\partial\partial z$, $\partial\partial x$, $\partial\partial z - \frac{\partial z \partial\partial t}{\partial t}$,

$\partial\partial x - \frac{\partial x \partial\partial t}{\partial t}$, & ainſi de ſuite pour toutes les différences deuxièmes, troiſièmes, &c.

4.° On pourra employer la méthode du *numéro premier* ou celle *du ſecond*, pour ſavoir ſi l'on a une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur; & pour cela il ſuffira de prendre une ſérie en $x, y, z\ \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{dz}{dy}$, &c. juſqu'à $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$ & $\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}$ de ſubſtituer dans la propoſée les valeurs de $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ & $\frac{d^n z}{dy^n}$ venue de la différentiation de la ſérie précédente, & d'égaler à zéro le coëfficient de chaque différence de l'ordre n qui reſtera dans la propoſée. Il eſt aiſé de voir que le cas de $\partial B dA - dB \partial A = 0$, donnera une arbitraire dans chaque rang des coëfficiens de la ſérie, & que toutes les fois que la propoſée contiendra une fonction arbitraire dans ſon intégrale, la même choſe aura lieu.

5.° On pourroit demander ici s'il y a réellement des équations aux différences partielles poſſibles dans le ſens de l'article précédent, & qui ne contiennent pas de fonctions arbitraires, ou qui n'en contiennent que de t. Il eſt donc à propos d'en offrir des exemples. Soit d'abord l'équation

$$a\partial z + dz + b\partial x + c dy = 0,$$

il eſt aiſé de voir que, faiſant la ſubſtitution ci-deſſus, on aura, z étant ſuppoſé égal à $A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$, &c. A quelconque, $Ba + b = 0$, $c + C = 0$, & les autres coëfficiens égaux à zéro. Soit encore l'équation $\partial z \partial x + \partial x^2 + dz dy + dy^2 = 0$, on trouvera, en faiſant la même ſubſtitution, A quelconque, $B + 1 = 0$, $C + 1 = 0$, & tous les autres coëfficiens égaux à zéro de la ſérie en x & y; donc, l'intégrale de cette équation eſt $z + x + y + A = 0$, A étant arbitraire.

6.° Soit

6.° Soit de même l'équation du ſecond ordre,

$$\frac{\partial\partial z + a\partial^2 x}{(\partial z + a\partial x)^2} = \frac{ddz + bddy}{(dz + bdy)^2},$$

on trouvera que ſon intégrale ſera

$$z + ax + by + qt = 0,$$

t étant une quantité qui, lorſque x devient $x + \partial x$ & $z + \partial z$, ou que y devient $y + dy$, & z, $z + dz$, augmente d'une quantité conſtante, mais que nous ne ſuppoſons pas la même que pour x, parce que cette ſuppoſition introduiroit une équation entre t & les variables.

7.° La méthode ci-deſſus peut s'employer encore avec ſuccès pour déterminer ſi une intégrale trouvée pour une équation, eſt ou n'eſt pas ſon intégrale complète. Ce problème, qui eſt aſſez facile pour les équations ordinaires, a beaucoup de difficultés dans le cas des équations aux différences partielles, ſoit par lui-même, ſoit parce que leur théorie eſt encore trop peu connue. On aura par la méthode de cet article un moyen facile de le réſoudre; en effet, une intégrale étant donnée, on verra combien il reſtera de coëfficiens arbitraires dans la valeur de z tirée de cette intégrale; on comparera ce nombre à celui qui reſtera dans la ſérie ſubſtituée pour z dans l'équation différentielle, & il faudra que ces deux nombres conviennent entre eux.

Cette méthode, pour déterminer les conditions des équations différentielles & l'étendue de leur ſolution, eſt générale pour les équations de toutes les eſpèces, & elle eſt preſque toujours plus commode dans la pratique que celle de l'article précédent.

ARTICLE III.

Intégration des équations du premier ordre de la forme $dB.\partial A - \partial B\, dA = 0$, *& de celles des ordres ſupérieurs qui s'y rapportent.*

1.° Nous avons vu *(article premier)* que les équations dont

les intégrales étoient ſuſceptibles de la forme $Z + FZ' = 0$, &c. provenoient toutes de la forme différentielle de $\partial B dA - \partial A dB = 0$, que la forme d'intégrale $Z + FZ' + \frac{P \partial FZ'}{\partial Z'} = 0$, ſe rapportoit à la même forme de différences, qu'on pouvoit toujours la rappeler alors à $Z + F'Z' = 0$, & qu'ainſi elle n'étoit pas plus générale que la précédente. Si donc nous avons une équation en $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{\partial y}$, z, x & y, ſuſceptible de la forme $\partial A dB - dA \partial B$, ſon intégrale ſera $Z + F'Z' = 0$; il nous reſte à chercher les quantités Z & Z'.

2.° Pour cela il faut rechercher d'abord quels radicaux & quelles tranſcendantes les fonctions peuvent contenir. Soit donc $\frac{P \partial z + Q \partial x}{P dz + R dy} = \frac{P' \partial z + Q' \partial x}{P' dz + R' dy}$; il eſt aiſé de voir qu'il ſuffit pour que la propoſée ſoit ſous une forme rationnelle & algébrique, à cauſe de $P \partial z + Q \partial x \times P' dz + R' dy = P dz + R dy \times P' \partial z + Q' \partial x$, & qui doit être terme à terme avec la propoſée, que

$$PQ' - QP', PR' - RP', QR' - RQ'$$

ſoient ſans tranſcendantes & ſans radicaux, autres que ceux qui ſe trouvent dans la propoſée miſe ſous la forme $A dz \partial x + B \partial z \partial y + C \partial y \partial x$; ainſi P, Q, R, P', Q', R', ſeront ſans tranſcendantes, & ſi on tire de $PQ' - QP' = A, P'R - RP' = B, QR' - RQ' = C$, la valeur de P', Q', R', en P, Q, R, & A, B, C, il ne reſtera plus dans la formule cherchée que P, Q, R, quantités algébriques, mais pouvant contenir des radicaux. Ainſi nous aurons $\partial P = A' \partial x + B' \partial y + C \partial z, \partial Q = A'' \partial x + B'' \partial y + C \partial z, \partial R = A''' \partial x + B''' \partial y + C''' \partial z$, ces fonctions étant ſans radicaux & contenant z, x, y & P, x, y, z & Q, x, y, z & R, ou plutôt $P = A' \partial x + B' \partial y + C' \partial z + D' \partial p$, $Q = A'' \partial x + B'' \partial y + C'' \partial z + D'' \partial p$, $R = A''' \partial x + B''' \partial y + C''' \partial z + D''' \partial p'''$, & $\partial p + A^{\text{v}} \partial x$

$+ B^{\text{iv}} \partial y + C^{\text{iv}} \partial z = 0$, ou toutes les quantités sont fonctions de x, y, z, p & $\partial p + A^{\text{v}} \partial x + B^{\text{v}} \partial y + C^{\text{v}} \partial z = 0$, une équation susceptible d'avoir une intégrale algébrique & rationnelle.

3.° Maintenant les P, Q, R sont déterminés par ces deux conditions; 1.° que $P \partial z + Q \partial x + R \partial y$ doit être une différentielle exacte, étant multipliée par le facteur M, M étant une fonction de x, y, p de la forme $\sqrt[n]{(M')}$, M' étant rationnel. 2.° $P' \partial z + Q' \partial x + R' \partial y + N(P \partial z + Q \partial x + R \partial y)$ soit une différentielle exacte, étant multiplié par un facteur M'', & il suffit que $M''(P' \partial z + Q' \partial x + R' \partial y)$ soit algébrique; c'est-à-dire que M'' sera $\sqrt[n]{(M''')}$ & M''', P', Q', R', des fonctions rationnelles de z, x, y, p & $\int(M . P \partial z + Q \partial x + R \partial y)$ telles que $M''(P' \partial z + Q' \partial x + R' \partial y)$ soit une différentielle exacte de z, x, y en faisant $\int M . P \partial z + Q \partial x + R \partial y$ constant, & il faudra que, tant $\int M(P \partial x + Q \partial x + R \partial y)$, que ses fonctions qui entrent dans M'', P', Q', R' soient algébriques, ou qu'elles n'y entrent point.

4.° En cherchant donc à déterminer les P, Q, R, d'après toutes ces conditions, pour la méthode des coëfficiens indéterminés, on trouvera $Z' = \int M . P \partial z + Q \partial x + R \partial y$ & $Z = \int M'' . P' \partial z + R' \partial y + Q' \partial x$, l'intégrale étant prise en y regardant les Z' comme constans, & on aura des valeurs finies de Z & Z' toutes les fois qu'elles seront possibles.

5.° Toutes les fois que l'équation différentielle du premier ordre ne sera pas susceptible de la forme ci-dessus, & contiendra cependant une fonction arbitraire dans son intégrale, par la méthode de l'article ci-dessus, on en cherchera la solution par les séries. Je ne connois du moins aucune forme de fonction arbitraire finie, ou même en série, qui convienne à ce cas.

6.° Lorsque la proposée du premier ordre ne doit pas contenir d'arbitraire dans son intégrale, mais seulement *(art. précédent)* un nombre de constantes n; on verra s'il n'y a

pas une équation aux différences ordinaires de l'ordre n, qui ait lieu en même temps, & on la trouvera toutes les fois que la proposée sera susceptible d'une intégrale finie.

7.° Passant maintenant aux équations du second ordre de la forme $\partial B dA - dB\partial A = 0$; nous aurons

$$\frac{P\partial\partial z + Q\partial dz + R\partial\partial x + T}{Pd\partial z + Qddz + Sddy + T'} = \frac{P'\partial\partial z + Q'd\partial z + R'\partial\partial x + T''}{P'd\partial z + Q'ddz + S'ddy + T'''};$$

comparant donc terme-à-terme avec la proposée, qui devra être susceptible de la forme

$$A\partial\partial z ddz + B(\partial dz)^2 + C\partial\partial x\partial dz + D\partial\partial x ddz + Eddy\partial dz + Fddy\partial\partial z + H\partial\partial z + Id\partial z + Kddz + L\partial\partial x + Mddy + N = 0,$$

$$\begin{aligned}
PQ' - QP' &= A.\\
QP' - Q'P &= B, \text{ d'où } B = -A.\\
RP' - PR' &= C.\\
RQ' - QR' &= D.\\
PS' - P'S &= F.\\
QS' - Q'S &= E.\\
RS' - R'S &= G.\\
PT''' - T'P' &= H.\\
QT''' - Q'T' &= I.\\
+ TP' - T''P.&\\
TQ' - QT'' &= K.\\
RT''' - R'T' &= L.\\
TS' - T''S &= M.\\
TT''' - T'T'' &= N.
\end{aligned}$$

D'après ces équations, il arrivera ou que les P, Q, R, S, T, &c. seront déterminés par les conditions ci-dessus, ou qu'ils ne le seront pas; dans le premier cas, il faudra que $P\partial\partial z + Q\partial dz + R\partial\partial x + Sddy + T + T'$, ou la formule correspondante en P', &c. devienne une différentielle exacte; cela une fois trouvé par le calcul des

différences ordinaires, on cherchera comme ci-dessus (si c'est la formule en P qui est devenue différentielle exacte de Z') la formule en P' par la condition que, multipliée par un facteur A, elle devienne différentielle exacte, en y supposant Z' constant, comme ci-dessus pour le premier ordre.

8.° Seulement, nous remarquerons ici que le facteur qui rendra chacune de ces formules une différentielle exacte ne sera pas assujetti à n'avoir qu'une seule valeur, comme pour le premier, mais qu'il en aura un nombre égal à l'ordre de la proposée, ou au moins au nombre de fois qu'elle est susceptible de la forme ci-dessus.

9.° Si les P, Q, R, ou quelques-uns d'eux restent indéterminés, en sorte que les autres; savoir les P', Q', R', &c. soient des fonctions déterminées de ces P, Q, R, &c. des A, B, &c. on les déterminera comme dans les *n.*os *7 & 8*, en observant seulement que (*n.*° *2*) P, Q, R peuvent ici contenir un radical quelconque.

ARTICLE IV.

Des Équations dont l'intégrale peut être de la forme $Z + AFZ' + BF'Z'' + \frac{A'\partial F}{\partial Z'} + \frac{B'\partial F'}{\partial Z''}$, &c. *cette série étant finie.*

1.° On supposera que cette formule s'arrête au second terme $\frac{\partial^2 F}{\partial Z'^2}$, & $\frac{\partial^2 F'}{\partial Z''^2}$ inclusivement; cela posé, on aura une formule en différences partielles de Z', Z'', A, & $A_{,}$ &c. qui devra avoir lieu en même-temps que la proposée; & comparant terme à terme, on aura des équations pour déterminer toutes ces quantités.

2.° On observera d'abord qu'il doit suffire ici d'avoir de ces équations une solution qui contienne le nombre de transcendantes qu'elle doit contenir, & qu'ainsi il ne faut en chercher que des solutions sans fonctions arbitraires.

3.° On remarquera que Z' & Z'' ſont tels que $\partial Z'$, $\partial Z''$ ſoient ſans tranſcendantes, qu'ils peuvent contenir des radicaux indéfiniment; c'eſt-à-dire que $\frac{\partial Z'}{\partial z}$, $\frac{\partial Z'}{\partial x}$, &c. ſont fonctions de x, y, z & p; p étant donné par l'équation rationnelle $\partial p + A\partial z + B\partial y + C\partial x + D\partial p$, dont l'intégrale eſt algébrique.

4.° On remarquera que les Z, A, B, &c. dépendront d'une équation différentielle ordinaire du cinquième ordre tout au plus, pourvu que les coëfficiens, fonctions déterminées de Z' & Z'', ſoient regardés comme conſtans.

5.° Cela poſé, ſi tout eſt connu on déterminera les coëfficiens de la ſérie en F & F', qui ſeront donnés par des équations linéaires dont on cherchera la ſolution comme celle des équations qui donnent Z, A & B, &c. mais on pourra ſe diſpenſer de cette ſeconde recherche, ſi au lieu de la ſérie ci-deſſus on prend celle-ci, qui lui eſt équivalente,

$$Z + AFZ' + B\int FZ'.\partial Z' + C\int(\int FZ'\partial Z')\partial Z'$$
$$+ A'F'Z'' + B'\int F'Z''\partial Z'' + C'\int(\int FZ'\partial Z'\partial Z';$$

En effet, chaque terme de la ſérie de $A\ B$ & A', B', &c. eſt toujours donné alors par une équation linéaire & finie.

6.° Il ne faut pas, lorſque l'on a une ſérie de la forme

$$F + \frac{A\partial F}{\partial Z} + \frac{B\partial\partial F}{\partial Z^2}, \text{ \&c.}$$

& qu'elle eſt infinie, en conclure ſur le champ que la propoſée n'eſt pas ſuſceptible d'une intégrale finie de la même forme. En effet, ſoit mis à la place de Z, $Z + V$, ſi la ſérie infinie ſe trouve réduite à une ſérie finie, l'intégrale de la propoſée ſera une ſérie finie de la fonction $FZ - V$. Si l'on a deux fonctions, dans ce cas, on tentera ſi la réduction eſt poſſible ſéparément pour toutes deux. Mais ſi les deux fonctions ſe trouvoient être des fonctions différentes de la même quantité Z, alors ſoit F une des fonctions & F' l'autre, il faudra voir ſi en mettant au lieu de F, $F''Z + V$, & $F'''Z + B$, & de même

pour F', $F^{IV} Z + V$, & $F^{V} Z + B$, on ne réduiroit pas à une formule finie. *Voyez ci-dessous, article VII.*

7.° Il est aisé de voir par quels moyens cette méthode s'appliquera aux équations des ordres supérieurs.

ARTICLE V.

D'une manière de résoudre les Équations partielles linéaires, lorsque les coëfficiens sont constans.

Soit l'équation du second ordre

$$\frac{a \partial\partial z}{\partial x^2} + \frac{b \partial\partial z}{\partial x \partial y} + \frac{c \partial\partial z}{\partial y^2} + \frac{e \partial z}{\partial x} + \frac{f \partial z}{\partial y} + g z = 0.$$

Je suppose que j'ai $z = A e^{mx + ny}$, je fais la substitution & j'ai

$$a m^2 + b m n + c n^2 + e m + f n + g = 0,$$

ce qui me donne A arbitraire, m arbitraire aussi &

$$n = -\frac{b m + f}{2 c} \pm \sqrt{\left(\frac{(b m + f)^2}{2 c} - a m^2 - e m - f\right)}.$$

Donc, je puis représenter la valeur générale de z par deux séries infinies, dont les coëfficiens soient arbitraires, ainsi que l'exposant de x, mais dans l'une desquelles l'exposant n soit toujours égal à sa valeur de n en m, avec le radical positif, & dans l'autre, à sa valeur avec le radical négatif.

Si maintenant j'examine différens cas de cette manière d'exprimer la valeur, je trouve d'abord que si la quantité sous le signe est un quarré, j'aurai $n = a' m + b'$ & $a'' m + b''$; donc, au lieu d'une série de termes $A e^{mx + ny}$, où A & m sont arbitraires, j'aurai une série $A e^{m(x + dy)}, e^{b'y}$, où A & m sont arbitraires, c'est-à-dire que j'aurai une fonction $A' e^{b'y} F x + a' y$; j'aurai de même, au lieu de l'autre série, une fonction $e^{b''y} F x + a'' y$; donc l'intégrale totale mise en termes finis sera

$$z = A e^{b'y} F x + a' y + A' e^{b''y} F' x + a'' y.$$

Si les deux racines ſont égales, & que par conſéquent la quantité ſous le ſigne ſoit zéro; alors je n'ai qu'une ſérie, mais dans ce cas, mettant au lieu de $z = A e^{mx + ny}$ $z = A x e^{mx + ny}$, j'aurai, après la ſubſtitution, deux coëfficiens à égaler à zéro; celui de $x e^{mx + ny}$, qui ſera le même que le coëfficient de $e^{mx + ny}$, dans la ſubſtitution précédente, & enſuite le coëfficient de $e^{mx + ny}$, qui ſera $2am + bn + c = 0$, or ſi l'équation précédente à ſes deux racines égales on a $2am + bn + c = 0$, puiſque cette quantité eſt égale à la différence de la première fonction, priſe en faiſant varier m, & diviſant par dm, on aura donc deux ſéries, l'une de termes $A e^{mx + ny}$, l'autre de termes $A' x e^{m'x + n'y}$; mais ici j'ai $n = - \frac{bm + f}{2c}$; donc, au lieu de chaque ſérie, je puis mettre $A e^{-\frac{f}{2c} y} F x - \frac{b}{2c} y$, & $A' x e^{-\frac{f}{2c} y} F' x - \frac{b}{2c} y$, ce qui me donne encore l'intégrale générale, & en termes finis $z = A e^{-\frac{f}{2c} y}$ $F x - \frac{b}{2c} y + x e^{\frac{f}{2c} y} F' x - \frac{b}{2c} y$.

Si j'ai $c = 0$, alors j'aurai, ſi je prends m arbitraire, une ſeule valeur de n en m, & par conſéquent une ſeule ſérie; mais ſi je ſuppoſe n arbitraire, ce qui revient au même, alors on a deux valeurs en n, & j'ai par conſéquent deux ſéries. Mais en examinant ces deux ſéries, on trouve qu'elles ne contiennent pas un ſeul terme qui ne puiſſe ſe trouver dans la ſeule ſérie que donne la première ſolution; en effet, quel que ſoit dans le terme $e^{ny + mx}$ d'une des deux ſéries, la valeur de n & celle de m qui y répond; il eſt clair que prenant cette valeur de m, on aura, dans la ſérie unique, le terme $e^{mx + ny}$, comme dans l'autre hypothèſe. Ainſi il n'y a réellement dans ce cas qu'une ſeule ſérie.

Si c

Si c étant zéro, les deux équations $bm + f = 0$ $am^2 + cm + g = 0$, peuvent avoir lieu en même-temps, soit a' cette valeur de m, j'aurai, au lieu de la série, $Ac^{a'x} Fy$, mais cela ne peut arriver que lorsque ces deux fonctions ont un facteur commun; alors la seconde est divisible par la première, & on a $n = a''m + b''$, ce qui donne une seconde fonction $A'e^{yb''} Fx + a''y$, l'intégrale totale sera donc ici $Ae^{a'x} Fy + A'e^{b''y}$ ou $A'^{b'''x} F \cdot x + a''y$, ou $b''' = \frac{b''}{a''}$.

Si a & c sont à la fois égaux à zéro, alors on a $n = -\frac{cm + g}{bm + f}$; donc si l'on a à la fois $bm + f = 0$, & $cm + g = 0$, on aura au lieu de la série, un terme $Ae^{-\frac{fx}{b}} Fy$, & à cause que dans ce cas on a seulement en général $n = -\frac{c}{b}$, il faudra y ajouter un terme $A'e^{-\frac{c}{b}y} F \cdot x$, ainsi l'intégrale générale sera

$$z = e^{-\frac{c}{b}x} Fy + e^{-\frac{c}{b}y} F'x.$$

Dans tout autre cas on n'a qu'une série où les coëfficiens & m restent arbitraires.

Détermination des arbitraires.

1.° Dans l'hypothèse où l'on auroit $z = a'$, lorsque $y = 0$, & $z = b'$ lorsque $y = c'$.

Dans le cas des deux séries ci-dessus, je prends d'abord deux termes correspondans $Ae^{mx + ny}$, $A'e^{m'x + n'y}$, & j'ai $Ae^{mx} + A'e^{m'x} = a'$, quel que soit x, ce qui donne $m = 0$, $m' = 0$, & $A + A' = a'$, j'ai ensuite $Ae^{nc'} + A'e^{n'c'} = b'$,

$n = -\frac{f}{2c} + \sqrt{(\frac{f^2}{4c^2} - g)}$, & $n' = -\frac{f}{2c} - \sqrt{(\frac{f^2}{4c^2} - g)}$. J'ai enſuite le reſte des deux ſéries qui doit être égal à zéro, lorſque $y = 0$, & quand $y = c'$; donc j'aurai en prenant toujours deux termes correſpondans $Be^{mx} + B'e^{m'x} = 0$, quel que ſoit c', ce qui donne $m = m$. & $B = B'$; & de plus appelant n & n' les deux valeurs de n, répondant à m', j'aurai $e^{nc'} - e^{n'c'} = 0$; ainſi appelant p la différence des deux racines, on aura $e^{pc'} - 1 = 0$; on aura donc par-là une valeur de $pc' = q\Pi$, Π étant la demi-circonférence du cercle, & q un nombre entier, on aura donc une ſérie infinie de termes dont les coëfficiens ſeront arbitraires & où m, ſera tel que

$\frac{(bm + f)^2}{2c} - am - \varepsilon m^2 - g = \frac{q^2 \Pi^2}{c'}$ avec une ſérie correſpondante où les coëfficiens ſeront les mêmes & pris négativement où m conſervera ſa valeur & n aura la valeur de la ſeconde racine de l'équation de n en m. On voit déjà par ce qui reſte d'arbitraire dans cette ſérie, le rapport qu'il y a entre cette ſolution & celle qu'auroit donnée la conſidération de l'intégrale en termes finis.

Si on applique maintenant cette méthode, au cas où les deux valeurs de m en n ſont rationnelles, on aura

$(a' - a'')m + b' - b'' = \frac{q\Pi}{c'}$; donc, $m = \frac{\frac{q\Pi}{c'} + b'' - b'}{a' - a''}$;

donc, au lieu de la ſérie correſpondante, on peut prendre

$$e^{\frac{b'' - b'}{a' - a''}x} \times Fe^{\frac{\Pi x}{c'.a' - a''}}$$

cette fonction ne pouvant contenir de termes où l'exponentielle ait un expoſant fractionnaire (*voyez, ſur cette limitation, les Mémoires de 1771*). Ainſi, l'intégrale générale ſera, après la détermination, $e^{b'y} . e^{\frac{b'' - b'}{a' - a''}x + a'y}$,

$F(e^{\frac{\Pi}{c'a - a'}}x + ay) + e^{b''y}, e^{\frac{b'' - b'}{a' - a''}}(x + a''y)$, $F(e^{\frac{\Pi}{c'd - a''}}x + a''y')$. Si maintenant je prends l'intégrale finie $z = e^{b'y}Fx + a'y + e^{b''y}F'x + a'y$, j'ai dans les mêmes suppositions $Fx + F'x = 0$, ce qui donne $Fx = - F'x$, &

$$e^{b'c}Fx + a'c' - e^{b''e}Fx + a''c' = 0,$$

ou $e^{b''c'}F - e^{b'c'}F + \Delta F = 0$, où la différence de x est $(a' - a'')c'$; résolvant donc cette équation, dont l'intégrale est évidemment $Fe^{\frac{\Pi}{c'.d - d'}}x, e^{b'c'}.e^{Ax} - e^{b''c'}e^{Ax + A.c'd' - a''} = 0$, & par conséquent $1 - e^{b''c' - b'c' + Ac'(d' - a'')} = 0$, ou $A = \frac{b'' - b'}{d' - b''}$, ce qui me donne exactement la même solution que la méthode en série.

Dans le cas des deux racines égales, j'ai, par les séries, d'abord en prenant deux termes correspondans $Ae^{mx + ny} + A'ye^{n'x + n'y}$ égaux à a' lorsque $y = 0$, & à b' lorsque $y = c'$, ce qui donne $Ae^{mx} = a'$, ou $m = 0$ & $A = a'$, & de plus, $Ae^{nc'} + A'ce^{n'c'} = b'$, ce qui donne A', car n est déterminé & égal à $- \frac{f}{2c}$. On a ensuite, prenant toujours deux termes correspondans $Ae^{mx + ny} + A'ye^{n'x + n'y}$ égaux à zéro, lorsque $y = 0$, & lorsque $y = c'$, ce qui donne $A = 0$ & $A' = 0$; donc, les deux séries se réduisent aux deux premiers termes trouvés ci-dessus; mais dans les mêmes hypothèses, si on prend l'intégrale en termes finis $z = e^{-\frac{f}{2c}y}Fx + a'y + ye^{-\frac{f}{2c}y}F'x + a'y$,

on aura $Fx = a$, & $c' F' z + d' c' . e - \frac{f}{2c} c' = b'$, $F' z + d' c' = \frac{b}{c' e - \frac{f}{2c} c'}$, ce qui s'accorde avec la ſolution précédente.

Si j'ai $c = 0$, & que je ne prenne qu'une ſérie, une ſeule détermination ſuffira, cela n'a pas beſoin d'être expliqué en détail, mais ſi je prends les deux ſéries, alors j'aurai d'abord deux termes, $Ae^{mx} + A'e^{m'x} = 0$; ce qui donne $m = 0$, & $m' = 0$, & $A + A' = a'$; j'ai enſuite $Ae^{mx} e^{nc'} + A'e^{m'x} e'^{n'c'} = b'$; mais il faut ici prendre n, tel que m puiſſe être zéro, & enſuite n' tel que m' ſoit zéro; or il eſt évident que ces deux valeurs ſont égales: donc l'équation ſe réduit à un terme, & comme b eſt donné en n & en c, n ne peut être quelconque. Quant au reſte, il eſt aiſé de voir qu'on a d'abord $m = m'$ & $A + A' = 0$, & comme m & m' ne ſauroient être égaux ſans que les n ne le ſoient auſſi; on voit que la ſeconde détermination ne peut avoir lieu encore en général; mais il peut ſeulement arriver ici que m puiſſe avoir une valeur qui laiſſe n tout ce qu'on veut. Or, dans ce cas on trouvera que b eſt encore déterminé à une valeur particulière, mais qu'il reſte une ſérie en y purs, qui ne peut être déterminée, & dont la valeur totale, lorſque $y = 0$ ou c' entre dans les coëfficiens; alors on auroit le même réſultat en ne prenant qu'une détermination. Si on applique la méthode générale à l'intégrale finie qui répond alors à la ſérie, on trouvera un réſultat abſolument ſemblable.

Si au lieu de l'hypothèſe ci-deſſus, j'avois eu $c = 0$, il y auroit eu deux ſéries, & la ſolution auroit été la même que la ſolution générale ci-deſſus; mais cependant l'équation eſt la même qu la précédente, en changeant y en x, & réciproquement; pour éclaircir cette difficulté, on obſervera que la ſolution doit être la même ici que pour le cas

ci-dessus; si au lieu d'avoir $z = a'$ & $z = b'$, lorsque $y = 0$ ou $y = c'$; on auroit eu $z = a'$ & $z = b'$, lorsque $x = 0$ ou $x = e'$. Or dans ce cas, prenant la série unique, j'aurai $A e^{ny} + A' e^{n'y} = a'$, ce qui donne n & $n' = 0$, & $A + A' = a'$; mais il y a deux valeurs de m répondantes à n zéro; donc, cette première détermination convient à deux termes. On a de plus $A e^{me'} + A' e^{m'e'} = b'$, ce qui, à cause que m' n'est pas la même chose que m, fait qu'on peut déterminer A & A', b restant tout ce qu'on voudra.

On sera ensuite $A e^{ny} + A' e^{n'y} = 0$, d'où $n = n'$ & $A + A' = 0$, & de plus, $A e^{me'} - A e^{m'e'} = 0$, équation qui doit être résolue comme dans le cas général ci-dessus. Si dans la même hypothèse, je prends l'intégrale en termes finis dans le cas où elle est possible, je trouve qu'elle donne, comme celle en série, une solution de la même étendue que la solution générale ci-dessus, pour le cas où l'équation en m & n a deux facteurs rationnels.

Le dernier cas où l'on a a & c égaux à zéro, ne donne qu'une série, & n'a besoin que d'une détermination, mais dans le cas où n étant constant, m peut être supposé tout ce qu'on veut, c'est-à-dire, lorsque l'équation m & n se réduit à deux facteurs, l'un sans m & l'autre sans n, on a, en prenant la série ou l'intégrale en termes finis, également une fonction de y, mais la supposition de $z = b'$, lorsque $y = c'$ ne peut servir à déterminer, & n'est pas permise.

On voit dans ces différens cas que la solution en série, & par l'intégrale finie, donne les mêmes résultats pour la détermination des arbitraires. 2.° Que cette manière de les déterminer n'est pas toujours suffisante. 3.° Qu'il n'est pas indifférent dans tous les cas de supposer deux valeurs de z, répondantes à deux de x, ou de les supposer répondantes à deux valeurs de y. Ces deux points avoient mérité un peu

de discussion; mais il est aisé de voir qu'une seule détermination laisse indéterminée une fonction de y, laquelle ne peut l'être en donnant à z une valeur déterminée pour une valeur aussi déterminée de y; au lieu qu'elle l'est en donnant à z une valeur particulière pour une valeur de x. Ainsi, dans ce cas il faut une nouvelle détermination de cette nature; mais alors l'équation finale ne contient pas de fonctions arbitraires, même avec des conditions; au lieu qu'elle en contiendroit si on prenoit deux déterminations par rapport à x, ce qui vient de ce que l'on a dans un cas une équation entre deux fonctions semblables de deux quantités x & $x + a$ ou dans les séries une équation entre deux termes semblables en $e^{mx}, e^{mx'}$, au lieu que dans l'autre on n'a point de pareille équation parce que la première supposition détermine absolument tous les coëfficiens de la série en x, ou d'une fonction de x.

J'ai cru devoir entrer dans un plus grand détail sur cette équation, pour montrer comment, de cette méthode de séries, on pouvoit tirer des résultats & des déterminations d'arbitraires semblables à ce que donnent les solutions en termes finis. Je parlerai plus succinctement des ordres supérieurs.

Soit l'équation

$$\frac{a\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{b\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{c\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} + \frac{e\partial^3 z}{\partial y^3} + \frac{f\partial\partial z}{\partial x^2}$$
$$+ \frac{g\partial\partial z}{\partial x \partial y} + \frac{h\partial\partial z}{\partial y^2} + \frac{i\partial z}{\partial x} + \frac{k\partial z}{\partial y} + lz = 0.$$

J'aurai par la substitution de Ae^{mx+ny}, au lieu de z, 1.° A restant arbitraire, ainsi que m. 2.° n donné par une équation en m, $cn^3 + (cm + h)n^2 + (bm^2 + gm + k)n + am^3 + fm^2 + im + l = 0$.

On aura donc pour intégrale trois séries où les coëfficiens & les exposans de x seront arbitraires; mais où les coëfficiens des exposans en y seront successivement une des trois racines de l'équation ci-dessus.

Si on a $n = a'm + b'$ pour une des racines, au

lieu de la série correspondante, on aura une fonction $e^{b'y}.Fx + a'y$, & deux séries ; si on en a trois, au lieu des trois séries on aura une intégrale finie $z = 0$, $e^{b'y}$ $Fx + a'y + e^{b''y}F'x + a''y + e^{b'''y}F''.x + a'''y$.

S'il y a deux racines égales, on aura une série pour la racine inégale, & pour les deux autres racines deux séries où n aura la même valeur, une de ces séries étant multipliée par x.

Dans ce même cas, comme les racines sont toutes trois rationnelles, on a l'intégrale finie $z = e^{b'y}Fx + a'y$ $+ e^{b''y}F'x + a''y + e^{b''y}xF''x + a''y$.

S'il y a trois racines égales, on aura trois séries dans lesquelles on aura la même valeur en m; mais l'une sera multipliée par x^2, l'autre par x, & la troisième par un constant.

Si maintenant on passe ici la détermination des arbitraires, on trouvera, en supposant que pour $y = 0$, a' & b', on ait $z = c', e', f'$, d'abord trois termes correspondans, tels que $Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} = c'$; d'où je tire $m = m' = m'' = 0$, & $A + B + C = c'$. Que de plus, on ait $Ae^{na'} + Be^{n'a'} + Ce^{n''a'} = e'$, & $Ae^{nb'} + Be^{n'b'} + Ce^{n''b'} = f'$, où n, n', n'', sont les trois valeurs de n, répondantes à $m = 0$; on aura encore plus de trois termes tels que $A'e^{mx'} + B'e^{m'x}$ $+ C'e^{m''x} = 0$, ce qui donne $m = m' = m''$, & $A', + B', + C' = 0$; de plus, $A'e^{na'} + B'e^{n'a'}$ $+ C'e^{n''a'} = 0$, & $A'e^{nb'} + B'e^{n'b'} + C'e^{n''b'} = 0$; éliminant B' & C', cette équation devient $e^{na' + n'b'}$

$— e^{na^1 + n''b^1} — e^{n'a^1 + nb^1} + e^{n'a^1 + n''b^1} + e^{n''a^1 + nb^1}$
$— e^{n''a^1 + n'b^1} = 0$, équation d'où il me reſte à tirer les valeurs de m. Je ne m'occuperai point ici de cette recherche, mais je me contenterai d'obſerver que prenant pour premier terme de l'équation $e^{na^1 + n'b^1}$, ſi on fait $na^1 + n'b^1 = p$, & qu'on ait $e^p — e^{p'} — e^{p''} + e^{p'''} + e^{p^{\text{iv}}} — e^{p^{\text{v}}} = 0$; il eſt aiſé de voir que ſi $p' — p$ étant q, on a $p'' — p' = rq + s$, $p''' — p'' = r'q + s'$, &c. & que p'. rr' &c. ſoient des nombres commenſurables, & s, s', &c. des quantités ſans m, on aura, en les traitant comme dans le cas correſpondant du ſecond ordre, une infinité de valeurs de m, aſſujetties ſeulement à une certaine loi, & il y aura pluſieurs ſéries infinies de ces valeurs de m, ſelon que l'équation miſe ſous la forme d'une équation aux différences finies ſera d'un ordre plus ou moins élevé. Il paroîtroit, au premier coup-d'œil, que l'on pourroit également ſuppoſer que l'équation eſt de la forme ci-deſſus, quand même s, s' &c. contiendroient m, mais cela n'eſt pas vrai; en effet, les valeurs de s entrent dans les valeurs de m, comme conſtantes, & ſi elles contiennent m, comme elles ſont alors différentes pour chaque valeur de n, on n'a plus une infinité de valeurs de m pour une ſeule équation, mais une infinité d'équations différentes, & une ſeule de ces équations ſuffit pour repréſenter toutes les autres.

L'équation aux différences finies, à laquelle ſe rapporte la détermination de ces ſéries, me conduit à une remarque importante. On voit en effet qu'on peut ici à volonté la ſuppoſer de différens ordres, ſans qu'elle ceſſe cependant d'être la même.

Soit en général, par exemple,

$Ay + B(y + \Delta y) + C(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) = 0$,

dans l'hypothèſe de $\Delta x = a$, il eſt aiſé de voir que ſi au lieu de $\Delta x = a$, j'avois pris $\Delta x = \frac{1}{2}a$, j'aurois eu une

une équation du quatrième ordre, au lieu d'une du second; cependant l'intégrale doit être la même dans les deux cas, & répondre également à la fonction de x, qui appelant y' & y'', ce qu'elle devient lorsque x devient $x + a$ ou $x + 2a$ satisfait à l'équation $Ay + By'\ Cy'' = 0$. La contradiction qui paroît entre cette remarque & la théorie du Calcul intégral n'est qu'apparente; en effet, on voit que l'équation qui paroît du quatrième ordre, est, ainsi que celle du second, formée par la comparaison de trois équations, & qu'ainsi le nombre des équations qui ont produit la proposée étant la règle du nombre des arbitraires, il doit arriver que l'équation du quatrième ordre ait la même intégrale que celle du second. Deux des cinq équations $Z = 0$, $Z + \Delta Z = 0$, $Z + 2\Delta Z + \Delta\Delta Z = A$, &c. n'ayant point concouru à former la proposée, quoique y & ses quatre différences puissent s'y trouver.

La même chose ne peut avoir lieu pour les équations aux différences infiniment petites, parce que $y + 2\partial y + \partial\partial y$ ne peut y entrer sans blesser l'homogénéité de ces différences; ainsi, il faut, au lieu de ce terme, avoir $y\partial x^2 + 2\partial y\partial x + \partial\partial y$, ce qui ne peut se trouver que dans la comparaison de trois équations $Z, \partial Z, \partial\partial Z = 0$.

Maintenant il reste encore une contradiction entre l'observation que je viens de faire & ce que j'ai conclu d'après la théorie des équations de condition, que toute équation en x & y lorsque $\Delta x = Q$, avoit une solution complète; mais prenons d'abord l'équation $y + \Delta y = A$, qui n'est autre chose que l'équation $y = A'$, en mettant dans A, x au lieu de $x + a$, & qui n'est réellement qu'une seule équation, & ne peut être supposée produite par deux; supposons maintenant que multipliée par $e^{a'x}$ elle devienne une différentielle exacte, j'aurai l'équation intégrale $e^{a'x}y + e^{a'x}A' = N$ & $e^{-a'a} = 0$; or, cela ne peut arriver que a' ne soit

infini négatif. Donc, l'intégrale fera $y + A' = \frac{N}{e^{a'x}} = 0$, en général N reftant arbitraire.

Soit enfuite $2y + 2\Delta y + \Delta\Delta y = 0$, qui n'eft produite que par deux équations quoique du fecond ordre. En fuppofant $y = e^{a'x}$ j'ai $e^{2a'a} + 1 = 0$, ce qui me donne l'intégrale générale $y = Ne^{a'x} + N'e^{a'_{,}x}$, à caufe des deux valeurs de a', ici on a la valeur de y avec deux arbitraires; cependant, fi au lieu de la propofée on prend l'équation $2y + \Delta y = 0$, qui revient au même, en y faifant $\Delta x = 2a$, on aura fimplement $y = Ne^{a'x}$, a' étant donné par l'équation $e^{2a'a} + 1 = 0$.

Pour trouver la folution de cette difficulté, on obfervera que chaque valeur de $e^{a'}$ en donne pour a' une infinité, & qu'on peut, appelant ces valeurs A, A', A'', &c. au lieu de e^{Ax}, prendre $e^{Ax} + Ne^{A'x} + N''e^{A''}x$, &c. en effet, appelant ce terme entier V, on a ici $V + \Delta V = V.e^{a'x}$, comme fi on n'avoit eu qu'un terme; ainfi la valeur générale de y eft la même dans les deux expreffions ci-deffus, puifque toutes deux contiennent également tous les termes e^{Ax}, en mettant pour A les valeurs de a' qui naiffent de l'équation $e^{2aa'} + 1 = 0$. Ces deux exemples fuffifent pour montrer comment, dans les différens cas, la remarque que je viens de faire s'accorde avec la théorie générale. On voit de-là que lorfqu'on a une équation propofée, on fera très-bien de prendre au lieu de y & de fes différences y, y', y'', &c. & de juger par leur nombre de l'ordre de l'équation & de la complication des intégrales, parce qu'on leur trouvera fouvent par ce moyen une forme plus fimple que celle que donne la méthode générale.

On voit auffi que la méthode employée dans ce Mémoire

pour les équations des seconds & des troisièmes ordres sera générale pour un ordre quelconque, & qu'on trouvera par la même méthode & toutes les séries dont z égale la somme, & les intégrales en termes finis, dans les cas où les méthodes ordinaires peuvent les donner.

Si au lieu de n'avoir point de termes sans z, on avoit un terme ou constant, ou ne contenant que des puissances rationnelles & entières de x & y, multipliées par des fonctions $e^{fx + f'y}$, on auroit également z en la supposant égale à une pareille fonction avec des coëfficiens indéterminés, à laquelle on ajouteroit les mêmes séries que donne la méthode ci-dessus, en supposant le terme sans z égal à zéro.

Jusqu'ici je n'ai pris pour donner des exemples de la manière de déterminer les arbitraires que les cas où la valeur des exposans des séries se peut déterminer par une comparaison terme à terme. Mais cela n'est pas possible en général, & alors cette détermination devient plus compliquée, quoiqu'elle se fasse par des moyens semblables; je n'en traiterai point ici parce qu'elle n'est pas susceptible, en général, de résultats finis & dont on puisse faire usage, mais de résultats approchés.

ARTICLE VI.

Des méthodes d'approximation par les équations aux différences partielles.

J'ai, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1770, proposé pour réduire ces équations à des équations linéaires, une méthode analogue à celle que, dans les Commentaires sur Robins, M. Euler a donnée pour les équations aux différences ordinaires. Par cette méthode, qui consiste à faire

$$z = z' + z'' + z''' \dots\dots\dots\dots = z'''^{n},$$

si on ne doit négliger que z'', & supposant z'' du même degré de grandeur que z^2, z''' que z^3, &c. on aura d'abord, lorsqu'il ne manquera point de termes, une équation linéaire pour z',

puis faiſant évanouir z' de ce qui reſte de l'équation, on prendra une équation linéaire en z''; puis par la même méthode, une en z''', & ainſi de ſuite; & ſi on veut avoir immédiatement z, on fera $z = z' + z'' + z''' \ldots + z'''^{n}$, & on éliminera les z' de cette équation, après avoir différencié le nombre de fois néceſſaire.

Cette méthode ſuppoſe que la propoſée ait tous ſes termes ou qu'on ait pu la transformer en une autre qui les ait, ce qui ne peut pas toujours ſe faire ſans que la méthode d'approximation ceſſe d'être légitime.

Je vais propoſer ici une nouvelle méthode beaucoup plus ſimple & abſolument analogue à celle que je viens de donner pour les équations linéaires.

Soit d'abord une équation où je ſuppoſe que je puis négliger des termes de la grandeur de z^2, je fais.......

$$z = Ae^{mx + ny} + A'e^{m'x + n'y} + Be^{2mx + 2ny}$$
$$+ B'e^{(m + m'x) + (n + n'y}) + B''e^{2m'x + 2n'y} \ldots\ldots\ldots$$

& je ſubſtitue cette valeur dans l'équation propoſée, je ſuppoſe que la ſomme des termes multipliés par B ſoient de l'ordre de grandeur de z^2, ce qui m'autoriſe à rejeter après la ſubſtitution le terme qui eſt du troiſième degré en $e^{mx + ny}$ & $e^{m'x + n'y}$, j'aurai donc cinq équations de comparaiſon; & à cauſe de A qui diviſe le dernier terme n, n donné en m, & comme je n'aurai rien changé à la formule, ſi au lieu de $mx + ny$ & $m'x + n'y$, j'avois mis $mx + ny + b$, & $m'x + n'y + b'$, j'aurai les quantités b & b', qui reſteront arbitraires. Maintenant, la même choſe aura lieu pour un plus grand nombre de termes; & il eſt aiſé de voir que les équations en n & m ſeront abſolument ſemblables aux équations en n' & m'; d'où il ſuit qu'on peut, au lieu des deux termes que j'ai fait entrer dans la valeur de z, en ſuppoſer une infinité, pourvu que m & n aient entr'eux les relations données par l'équation, en ſorte que le premier

terme de la valeur de z, sera composé d'autant de séries que n aura de valeurs en m, où m sera tout ce qu'on voudra, & n successivement une des racines de l'équation en m & n.

Je n'entrerai point ici dans un plus grand détail sur cette méthode; les cas où il y a plusieurs valeurs égales de n en m; ceux où l'on peut, aux séries précédentes, substituer des fonctions arbitraires, se résolvent de la même manière que dans l'article précédent. Il en est de même du cas où les fonctions arbitraires se peuvent déterminer par la comparaison faite terme à terme. On remarquera ici, que comme pour le cas des différences ordinaires, le degré où monte l'équation en n, est supérieur à l'ordre de l'équation; ce qui vient de ce que ce n'est pas la vraie racine, mais une valeur approchée que cette expression représente.

Il est aisé de voir en suivant la méthode précédente, que l'on a z, z', z'', &c. par une même équation, excepté le dernier terme qui varie. Ainsi, ayant résolu la première, on aura toutes les autres en résolvant ce Problème. *Une équation* $Az + B\partial z + C\partial z$, &c. $+ V = 0$, *étant donnée & intégrée, lorsque* $V = 0$, *l'intégrer également lorsque* V *est une fonction de* x *& de* y.

Je ne m'arrêterai point à examiner ce Problème, dont M.rs Euler & d'Alembert se sont occupés, & sur lequel M.rs Monge & de la Place ont fait des recherches très-profondes, mais qui n'est pas encore résolu généralement, & même ne peut l'être que par la méthode des coëfficiens indéterminés, quoique *(article suivant)* on puisse réduire aux équations ordinaires la recherche des fonctions arbitraires.

ARTICLE VII.

De la solution en séries des Équations linéaires où les coëfficiens ne sont pas constans.

I. Soit

$$A\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + B\frac{\partial dz}{\partial y\partial x} + C\frac{ddz}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + F\frac{dz}{\partial y} + Gz + H = 0;$$

je ſuppoſe

$$z = A' + A''(FX + F'X') + B'\frac{\partial F}{\partial X'} + C'\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}, \text{ \&c.}$$
$$+ B''\frac{\partial F}{\partial X'} + C''\frac{\partial^2 F}{\partial X'}, \text{ \&c.}$$

$$A\frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + B\frac{\partial dA'}{\partial x dy} + C\frac{ddA'}{\partial y^2} \ldots + GA' + H = 0,$$

$$A\frac{\partial^2 A''}{\partial x^2} + B\frac{\partial dA''}{\partial x \partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots + GA'' = 0,$$

$$A\frac{\partial\partial B'}{\partial x^2} + B\frac{\partial dB'}{\partial y \partial x} + C\frac{ddB'}{\partial y^2} \ldots + GB' + V.$$

V étant fonction de A'', de quantités connues, & de $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, &c. & ainſi de ſuite pour tous ces coëfficiens.

II. Il ſuit de cette forme :

1.° Que tant A' que A'' ſeront donnés par des équations ſemblables à la propoſée, dont il ſuffira d'avoir une ſolution ſans fonctions arbitraires.

2.° Que ſi l'on ſuppoſoit la ſérie des fonctions, finie & arrêtée à un certain point, cela produiroit de nouvelles équations qui ſerviroient à déterminer les A', les B', & les X.

3.° Que l'équation en X ſera toujours du premier ordre de différences, d'un degré égal à l'ordre de la propoſée, ne dépendant ici que des A, B, C, & pour un autre ordre, ſeulement des coëfficiens des plus hautes différences, que les racines donneront les différentes valeurs de X, qui ne dépendront que d'équations $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{N\partial X}{\partial y}$, où N eſt une fonction algébrique.

4.° Que les B' peuvent auſſi être donnés indépendamment des B'', les C' indépendamment des C''; en ſorte qu'ils dépendroient auſſi d'une équation du premier ordre, dont il ſuffira d'avoir une ſolution particulière. Cette méthode s'applique aux équations linéaires, quel que ſoit le nombre des différences partielles & des variables, *mutatis mutandis*.

III. On verra ci-dessous, *n.° VIII*, qu'en donnant à la série une autre forme à laquelle on appliquera ce que je viens de dire, on aura encore plus simplement les coëfficiens, excepté les premiers de la série. Ceux-ci, quelqu'hypothèse qu'on fasse, doivent toujours dépendre d'une équation aux différences partielles, & il y aura même des cas où tous en dépendroient, & où les équations qui les donneroient sous une autre forme seroient illusoires. Cela a lieu à cause des séries indéfinies de transcendantes qui, comme je l'ai dit ailleurs, peuvent y entrer; le cas aussi où les équations qui donnent N, *n.° précédent*, ont des racines égales, rendroit nécessairement les équations des coëfficiens plus compliquées; & il n'est plus permis de supposer à FX & $F'X'$ le même coëfficient. Cette supposition peut cependant être regardée comme générale, parce que le cas de $A' = 0$ comprend ceux où elle ne paroîtroit pas légitime.

IV. Si on regarde comme indéfinie la série des fonctions, on verra que chaque coëfficient de la série est donné par une équation; en sorte que F & F' demeurent indéterminés: on pourra donc en général supposer F & F' ce qu'on voudra, & pourvu qu'on les suppose différentes l'une de l'autre, on aura une valeur de z en séries de la forme & de la généralité convenables, pourvu qu'on connoisse des valeurs sans fonctions arbitraires des A', A'' & des coëfficiens B, &c.

V. Donc si les coëfficiens de la proposée ne contiennent pas y, on pourra, en prenant deux fonctions $Fx + y$ & $F'x - y$, supposer tous les coëfficiens de x seulement, & par conséquent on aura z en série par la solution d'équations linéaires ordinaires.

VI. Dans ce cas, pour voir si la proposée est susceptible d'intégrale finie, on mettra dans l'intégrale sous le signe F, au lieu de $x + y$ & $x - y$, $x + y + X$, $x - y + X'$; X & X' étant des fonctions de x, & on verra *(article IV)* si les séries deviennent finies.

VII. Si H seule avoit contenu y, on auroit eu à chercher

d'abord une valeur de A' ſans arbitraire, & enſuite on auroit eu les autres coëfficiens comme dans le *numéro précédent.*

VIII. Si au lieu de la ſérie hypothétique ci-deſſus, on avoit pris la ſérie ſuivante:

$$z = A' + B' F X + C' \int F X \partial X + D' \int \partial X \int F X \partial X,$$
$$+ B'' F' X' + C'' \int F' X' \partial X + D'' \int \partial X' \int F' X' \partial X, \text{ \&c.}$$

On auroit eu en ſubſtituant

$$A \frac{\partial \partial A'}{\partial x^2} + B \frac{\partial d A'}{\partial x \partial y} + \ldots\ldots\ldots\ldots + H = 0,$$

comme ci-deſſus, mais la ſeconde équation auroit été linéaire & finie en D' & en D'', & auroit donné D' & D'' égaux à des fonctions de X, B', C', & de X' B'', C'', & ainſi de ſuite.

IX. On tireroit de-là le même réſultat que ci-deſſus (*n.° II*) pour les intégrales finies, mais ſi on les ſuppoſe en ſéries, B', C', X, B'', C'', X' reſteront tout ce qu'on voudra. Ainſi prenant X & X' à volonté, ainſi que B', C', B'' & C'', on aura une valeur de z en ſéries de la forme & de la généralité convenables.

X. Mais ſi on veut examiner ici le cas des ſéries qui s'arrêtent, on trouvera une double ſérie aſcendante & deſcendante dont il faudra que tous les coëfficiens ſe détruiſent, & de plus les coëfficiens en ſeront ſous une forme infinie, ce qui fait que les quantités X, X' (*n.° VI*) ci-deſſus ſont données par une équation infinie.

XI. Ce que je viens de dire pour l'équation du ſecond ordre, eſt général pour tous les ordres : maintenant je vais donner quelques exemples de l'application des réflexions ci-deſſus.

EXEMPLE I.

Soit $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1 + x}{1 + y} = 0$, je fais

$$z = Fx + y + P. \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \text{ \&c.}$$

& j'ai

& j'ai

$$(1 + y).(1 + \frac{\partial P}{\partial y}) = (1 + x).(1 + \frac{\partial P}{\partial x})$$

équation à laquelle ſatisfait la valeur particulière $P = xy$; j'ai enſuite l'équation

$$\frac{dQ}{dx}\ 1 + x - \frac{dQ}{dx}\ 1 + y = x^2 y - y^2 x,$$

équation à laquelle ſatisfait la valeur particulière de $Q\ \frac{x^2y^2}{2}$.

Continuant de la même manière, nous aurons

$$z = Fx + y + xy \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{x^2y^2}{2} \frac{\partial\partial F}{dx^2}, \text{\&c.}$$

je mets dans F au lieu de $x + y$, $x + y + V$, & j'ai au lieu de la ſérie ci-deſſus, la ſérie

$$Fx + y + \frac{\partial F}{dx} V + \frac{\partial\partial F}{\partial x^2} \frac{V^2}{2} + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial x} xy + \frac{\partial\partial F}{\partial x^2} xyV, \text{\&c.}$$
$$+ \frac{x^2y^2}{2} \frac{\partial\partial F}{\partial x^2}, \text{\&c.}$$

qui ſe réduit à $F(x + y)$, ſi on fait $V = -xy$; donc l'intégrale finie ſera $z = F(x + y + xy)$. Cet exemple eſt très-ſimple, & je ne l'ai choiſi que pour indiquer la marche de la méthode.

Exemple II.

Soit

$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} \frac{1}{(1 + 2x)^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1}{(1 + 2x)^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

je fais

$$z = Fx + y + P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial\partial F}{\partial x^2}, \text{\&c.}$$
$$F'x - y + P' \frac{\partial F'}{\partial x} + Q' \frac{\partial\partial F'}{\partial x^2}, \text{\&c.}$$

en faiſant égales à des conſtantes les quantités A' & A'' du *n.° I*, puiſque H manque, & puiſque les coëfficiens ſont ſans

y; on pourra, par le *n.° VII*, ſuppoſer auſſi les P & les Q ſans y.

Cherchant dans cette hypothèſe des valeurs particulières de P, Q, &c. P', Q', &c. on trouvera $P = x^2, Q = \frac{x^4}{2}$ & $P' = x^2, Q' = \frac{x^4}{2}$, &c. ainſi l'on aura

$$z = Fx + y + \frac{\partial F}{\partial x} x^2 + \frac{\partial\partial F}{\partial x^2} \frac{x^4}{2}, \text{ \&c.}$$

$$F'x + y + \frac{\partial F'}{\partial x} x^2 + \frac{\partial\partial F'}{\partial x^2} \frac{x^4}{2}, \text{ \&c.}$$

& mettant dans F & F', $x + y + V$, $x - y + V'$, on trouvera que la valeur de z devient $Fx + y + F'x - y$, en faiſant $V = -x^2$ & $V' = -x^2$; donc la valeur finie de z ſera $Fx + x^2 + y + F'x + x^2 - y$.

XII. Cette méthode eſt la même que celle dont M. Euler a fait tant de belles applications dans le *Volume III* de ſon *Calcul intégral*.

XIII. Il ſuit de la méthode précédente, que ſi on prend les équations linéaires de l'*article V*, & que pour un ordre n, on prenne n fonctions $Fx + y$, $F'x + ay$, $F''x + by$, &c. à volonté, on aura z égale à une fonction de la forme

$$e^{fx + gy} + e^{f'x + g'y} F(x + y) + e^{f''x + g''y} \frac{dF}{dx}, \text{ \&c.}$$

$$+ e^{f_{,}x + g_{,}y} F(x + ay) + e^{f_{,,}x + g_{,,}y} \frac{dF}{dx}, \text{ \&c.}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

laquelle contiendra auſſi dans certains cas des fonctions entières & rationnelles de x & de y dans ſes coëfficiens, & qu'on réduira par la méthode ci-deſſus à une forme finie toutes les fois qu'elle en ſera ſuſceptible.

XIV. Il y a une différence entre les équations linéaires ordinaires & celles aux différences partielles, qu'il eſt à propos de remarquer ici. Soit en effet une équation linéaire quelconque de la forme $BZ + C\partial Z + DdZ$, &c. $= 0$,

où les A, B, C, &c. ne contiennent pas d'arbitraires; ſoient Z', Z'', Z''', &c. des valeurs particulières de Z qui ſatisfont à l'équation, on aura en général $z = NZ' + N'Z'' + N''Z'''$, &c. & ainſi de ſuite indéfiniment; N, N', &c. étant des fonctions arbitraires qui ne varient pas avec Z.

XV. Dans les équations ordinaires ou aux différences finies même, cette forme étant celle que doivent avoir les arbitraires dans la ſolution en termes finis, toutes les fois qu'elle eſt poſſible, elle repréſente généralement la valeur de Z; mais il n'en eſt pas de même des équations aux différences partielles, où l'on ſait que ces arbitraires ſont ſuſceptibles d'entrer dans l'intégrale ſous une autre forme.

XVI. Soit priſe pour exemple l'équation $\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} x^2$, que M. Euler a réſolue *(tome III de ſon Calcul intégral)*; on a

$$Z = Ae^{nlx + \sqrt{(nn - 1)}y} + Be^{nlx - \sqrt{(nn - 1)}y}, \text{ \&c.}$$

en donnant à n toutes les valeurs poſſibles.

XVII. M. Euler trouve plus généralement encore

$$Z = Ae^{nlx + \sqrt{(nn - 1)}y}\left[1 + 2A'\sqrt{(n^2 - 1)}\,lx + A'(2n - 1)y\right]$$
$$+ Be^{nlx + \sqrt{(nn - 1)}y}\left[1 + 2B'\sqrt{(n^2 - 1)}\,lx + B'(2n - 1)y\right],$$

& ainſi de ſuite, n étant quelconque. Cette ſeconde forme renferme la première, en faiſant A' & B' égaux à zéro.

XVIII. Je ne puis cependant regarder cette ſeconde ſolution comme réellement plus générale que la première; en effet, la première contient deux ſéries de coëfficiens arbitraires, répondant aux deux fonctions arbitraires qui peuvent entrer dans les intégrales du ſecond ordre; & pour être ſûr que la ſeconde eſt plus générale que la première, il faudroit être ſûr qu'il n'y ait aucune ſomme poſſible d'une ſérie infinie de termes $e^{nlx \pm \sqrt{(nn - 1)}y}$ qui devienne égale à $\sqrt{(n^2 - 1)}\,lx \pm (2n - 1)y$.

XIX. On obſervera encore que la deuxième intégrale de M. Euler ne paroît pas plus renfermer toutes les intégrales poſſibles que la première ; en effet, les termes $\left(-lx+\frac{y^2}{2}\right)$ & xy, qui ne paroiſſent pas contenus dans l'intégrale ci-deſſus, doivent entrer dans la valeur de z. De plus, on trouvera que ſi l'on cherche à repréſenter la valeur de z ſous la forme

$$F\,lx+ay+P\,\frac{\partial F}{\partial(lx+ay)}+Q\,\frac{\partial\partial F}{\partial(lx+ay)^2},\&c.$$

$$F'\,lx-ay+P'\,\frac{\partial F'}{\partial(lx-ay)}+Q'\,\frac{\partial\partial F'}{\partial(lx-ay)^2},\&c.$$

on trouvera des valeurs des P, des Q, &c. par le *n.° 7*.

XX. Voilà donc pluſieurs manières de repréſenter la valeur de z, & il eſt impoſſible de s'aſſurer *à priori*, que celles qui ne renferment pas d'arbitraires variables, ſoient d'une généralité ſuffiſante, ce qui rend abſolument néceſſaire l'emploi de la méthode que j'ai indiquée dans l'*article II.* En effet, ſans cela on ne peut ſavoir ſi la première valeur ci-deſſus de z eſt ſuffiſante, s'il faut ne regarder que la deuxième comme aſſez générale, ou enfin s'il n'eſt pas néceſſaire d'y ajouter encore d'autres termes tels que ceux dont j'ai donné l'exemple.

ARTICLE VIII.

Réflexions générales.

Je vais maintenant finir ce Mémoire par trois obſervations; l'une que l'on jugera ſi une ſolution particulière d'une équation aux différences partielles peut ſervir à réſoudre un Problème donné, en examinant ſi $A=0$ étant cette ſolution, la propoſée n'eſt pas de la forme

$$A^m P+Q\partial A+R\,dA=0,\ m<1;$$

En effet, lorſque cela a lieu, ſoit $m=\frac{p}{q}$ $p<q$. Si on

fait $A = B^q$, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\text{en substituant, } B^r p + QB^{q-1}\partial B + RB^{q-1}dB \\ \text{divisant par } (B^r p) + QB^{q-r-1}\partial B + RB^{q-r-1}dB\end{array}\right\} = 0,$$

équation qui n'a $B = 0$ pour racine, qu'à cause de B^r; or, on sait que ces facteurs ne servent pas à résoudre les Problèmes.

La seconde observation est que le Problème des Tautochrones & tous ceux de cette espèce, se trouvent réduits facilement à des équations aux différences partielles: en effet, ils sont des cas particuliers de ce Problème général; *étant donné un nombre* m *d'équations aux différences ordinaires ou partielles entre* m + n *variables, & sachant de plus qu'une de ces variables doit être égale à une fonction arbitraire d'une fonction donnée d'autres variables; trouver l'équation aux différences partielles qui doit déterminer chacune des variables; on voit que le nombre des différences partielles & celui des variables, doivent être tels que les équations définitives soient possibles.*

Ma dernière observation sera sur la forme supposée ci-dessus aux intégrales des équations linéaires & où toutes les arbitraires sont supposées entrer d'une manière linéaire. Cette supposition est générale; en effet, si on appelle $\varphi, \varphi', \varphi''$, &c. ces arbitraires, nous aurons la proposée en comparant les équations

$$z = V\varphi + V'\varphi' + V''\varphi'' \dots\dots$$
$$z' = V_{,}\varphi + V'_{,}\varphi' + V''\varphi'' \dots\dots$$
$$z'' = V_{,,}\varphi + V'_{,,}\varphi' + V''\varphi'' \dots\dots$$

On voit qu'ici z, z', z'' ne sont pas supposées contenir chacun tous les φ, & que z', z'' représentent des valeurs de z répondantes à $x + dx$ & y, à x & à $y + dy$, &c. Si donc on veut faire disparoître les $\varphi, \varphi', \varphi''$, &c. on voit que l'on ne peut le faire, l'équation en z restant linéaire, à moins, ou que les φ ne soient indépendans les uns des autres, ou que s'ils sont dépendans les uns des autres, ils soient donnés entr'eux par une équation linéaire; donc, la supposition ci-dessus est générale, & il en sera de même pour toutes les espèces d'équations linéaires.

ARTICLE IX.

D'une eſpèce d'Équations aux différences finies.

I. Je ſuppoſe que j'aie une équation en z, x & y, les différences finies de z priſes par rapport à y & par rapport à x, & que les différences de x & de y ſoient conſtantes.

II. Il eſt aiſé de voir que cette ſuppoſition, non plus que celle de ∂x, ∂y, conſtans à la fois dans les équations partielles ordinaires, n'indiquent aucune équation en x & y. En effet, les équations aux différences partielles ſont dans ce cas de la forme

$$AZ + B\frac{\partial Z}{\partial x} + C\frac{\partial Z}{\partial y} + D\frac{\partial\partial Z}{\partial x^2} + E\frac{\partial\partial Z}{\partial y\partial x} + F\frac{\partial\partial Z}{\partial y^2}, \&c.$$

forme auſſi générale qu'elle puiſſe être, & où l'on fait abſtraction de l'hypothèſe que x & y ſoient ou ne ſoient pas conſtantes. De même ici on aura

$$AZ + BZ' + CZ_{,} + DZ'' + EZ'_{,} + FZ_{,,}, \&c. = 0,$$

où Z' eſt ce que devient z, en y mettant pour z $z + \Delta' z$ & pour x, $x + \Delta x$, ZZ, ce que devient Z en y faiſant $z = z + \Delta z$; & $y = y + \Delta y$, Z''; ce que devient Z en y mettant $z + 2\Delta' z + \Delta'\Delta' z$, au lieu de z, & $x + 2\Delta x$, au lieu de $x_{,}$; Z' ce que devient Z en y mettant $z + \Delta' z + \Delta_{,} z + \Delta'\Delta_{,} z$ au lieu de z, $x + \Delta x$ au lieu de x & $y + \Delta y$, au lieu de y, & ainſi de ſuite, où l'on voit que cette équation a lieu indépendamment de toute relation entre x & y.

III. Si on cherche une raiſon de la différence qu'il y a à cet égard entre les équations ordinaires & celles-ci, on obſervera que dans toutes ſi on ſuppoſe ∂x & ∂y, Δy & Δx conſtans à la fois, & qu'en cherchant à les intégrer, indépendamment de toute équation entre x & y qui naît de cette ſuppoſition, on trouve l'intégration poſſible; cette ſuppoſition des différentielles conſtantes ne changera rien dans ce cas à la nature de l'équation.

Cela posé, si l'équation n'est pas aux différences partielles, puisque l'on a dans le même temps $\partial\partial x = 0$ & $\partial\partial y = 0$, il en résulte $y = Nx + N'$; mais dans le cas des différences partielles, soit infiniment petites, soit finies, comme ∂x & ∂y, quoique tous deux constans, ne sont pas supposés avoir lieu dans la même hypothèse, il n'en résulte entre ces quantités aucune équation.

IV. Maintenant je vais chercher quelle doit être la forme de nos équations différentielles partielles aux différences finies. Je distingue d'abord en trois classes les quantités que la différenciation peut faire disparoître; 1.° les fonctions arbitraires; 2.° les fonctions transcendantes; 3.° les fonctions indéfinies.

V. On trouve pour les fonctions arbitraires, 1.° que pourvu que $e^{f\Delta x} = 1$ & $e^{f\Delta y} = 1$, toute fonction de e^{fx} & de $e^{f'y}$ assujettie aux loix que j'ai assignées dans les *Mémoires de 1771*, restera la même dans $Z = 0$, $\Delta' Z = 0$, $\Delta_{,} Z = 0$, $\Delta'\Delta' Z = 0$, $\Delta'\Delta_{,} Z = 0$, $\Delta^2 Z = 0$, &c. & qu'ainsi l'intégrale contiendra toujours un nombre de ces fonctions égal à celui des équations qui ont produit la proposée diminuée de l'unité.

2.° Soit $F ay + bx$, il est aisé de voir que si $am\Delta y + bn\Delta x$ est égal à zéro, m & n étant des nombres entiers, la fonction $F ay + bx$ restera la même dans $Z^{''''n}_{,,,,m}$, dans $Z^{''''pn}_{,,,,pm}$; & en général, soit $F ay + bx$, telle que $am\Delta y + bn\Delta x = ap\Delta y + bq\Delta x$, il arrivera que cette fonction sera la même dans $Z^{''''n}_{,,,,m}$ & dans $Z^{''''q}_{,,,,p}$.

VI. De-là on déduira les différentes fonctions qui peuvent se trouver dans une équation aux différences finies partielles, de l'espèce de celle dont nous nous occupons ici. Supposons, par exemple, que la proposée ne contienne que trois Z; savoir, Z, Z^{n}_{m}, Z^{q}_{p}, nous pourrons supposer que Z contienne $F ay + bx$; les coëfficiens de la fonction F étant des fonctions de e^{fx}, e^{fy}, tels que $e^{f\Delta x} = e^{f'\Delta y} = 1$.

En effet, Z^n_m, Z^q_p contiendront cette même fonction, & de plus Z^n_m contiendra $F ay + bx + am\Delta y + bn\Delta x$, & Z^q_p contiendra $F ay + bx + ap\Delta y + bq\Delta x$; donc, il faudra que l'on ait $a = b . \frac{(q - n)\Delta x}{m - p\Delta y}$, & alors on pourra éliminer $F ay + bx$; mais alors Z ne se trouve point réellement dans l'équation. Si on avoit eu seulement Z & Z^n_m, on auroit pu faire évanouir $F ay + bx$, pourvu que $a = -\frac{n\Delta x}{m\Delta y} b$. Si on avoit $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$, on pourroit, ayant Z, Z^n_m & Z^q_p faire évanouir $F ay + bx$, & $F' ay + bx$. Ainsi en général, toute équation formée par la comparaison de deux équations $Z^n_m = 0$, $Z^q_p = 0$, pourra contenir une fonction arbitraire de $ay + bx$, $a = b \frac{q - n\Delta x}{m - p\Delta y}$.

Toute équation qui sera formée par la comparaison de $Z = 0$, $Z^n_m = 0$, pourra contenir une fonction arbitraire de $ay + bx$, ou $a = -b\frac{n\Delta x}{m\Delta y}$; & si elle est formée par la comparaison des trois équations $Z = 0$, $Z^n_m = 0$, $Z^q_p = 0$, & que $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, elle pourra contenir deux fonctions arbitraires de $ax + by$ ou $a = -b\frac{n\Delta x}{m\Delta y}$.

En général, soit une série d'équations $Z^n_m = 0$, $Z^q_p = 0$, $Z^s_r = 0$, &c. au nombre de M, on prendra $F ax + by$, & on cherchera a & b avec cette condition que $am\Delta y + bn\Delta x$, $ap\Delta y + bq\Delta x$, $ar\Delta y + bs\Delta x$, &c. se réduisent à $M - 1$, quantités différentes dont il n'y en ait aucune qui n'en ait une autre qui lui soit égale. Dans ce cas, $F ax + by$ peut être arbitraire. Si ces quantités se réduisent à $M - 2$ avec lamême condition, on pourra faire disparoître deux de ces fonctions arbitraires, & ainsi de suite;

de ſuite; en ſorte que, ſoit une propoſée produite par la comparaiſon de Z, Z^n_m, Z^q_p, Z^s_r, &c. $= 0$, au nombre de M, & que les quantités 0, $am\Delta y + bn\Delta x$, &c. n'aient que M' valeurs différentes, toujours avec la même condition qu'il n'y en ait aucune qui ne ſe trouve dans deux équations, il pourra arriver qu'il ait diſparu $M - M'$ de ces fonctions.

VII. Maintenant pour juger du nombre & de la nature des $Z = 0$, $Z^n_m = 0$, &c. qui ont été combinées pour produire la propoſée, il ne faut, après avoir fait diſparoître les différences partielles, voir que les z, z^n_m, z^q_p, &c. qui reſteront dans la propoſée.

VIII. Paſſons maintenant aux fonctions tranſcendantes.

1.° Les fonctions $e^{ax^m + bx^{m-1}y \ldots\ldots\ldots\ldots + q}$, ſeront telles que le premier rang reſtera le même dans deux équations quelles qu'elles ſoient. Donc, la comparaiſon de deux équations rabaiſſera d'un degré toute fonction de cette eſpèce; donc, en général, toutes les fois qu'on aura $m + 1$ équations, on pourra faire évanouir une ou pluſieurs de ces fonctions, pourvu que la ſomme des degrés de leurs expoſans ſoit égale à m.

2.° Les fonctions arbitraires (*articles précédens*) qui ſe trouveront multiplier les fonctions tranſcendantes de cet article, & qui ſeront reſtées les mêmes, pourront diſparoître avec le rang ſupérieur. Donc, ſi une propoſée contient une fonction $e^{ax^m + bx^{m-1}y \ldots + q}$, multipliée par une arbitraire, & de plus qu'elle contienne $e^{a'x^{m-1} + b'x^{m-2}y \ldots + q'}$, cette ſeconde tranſcendante étant celle qui reſte après avoir fait évanouir le premier rang de la première; il eſt clair qu'elle peut entrer dans quelques termes de la propoſée, ayant une fonction arbitraire pour coëfficient, mais avec la condition qu'elle aura cette fonction arbitraire pour coëfficient de tous les termes où elle entrera dans l'équation qui

reſte après avoir éliminé le premier rang de la tranſcendante ci-deſſus.

3.° La fonction $F(ax + by)^{d'x^m + b'x^{m-1}y \ldots\ldots\ldots + q'}$. peut encore entrer dans l'intégrale, $Fax + by$ ne changeant pas de valeur. En effet, dans ce cas, on voit qu'on peut faire encore diſparoître ſucceſſivement tous les rangs de l'expoſant. C'eſt ainſi que dans les équations aux différences finies ordinaires, on peut faire diſparoître $e^{Fef^x ax^m}$ ... lorſque $e^{f\Delta x} = 1$: cette forme eſt renſermée dans celles que j'ai développées dans le Mémoire que j'ai donné ſur cet objet.

4.° On trouvera encore, ſi on prend une fonction $e^{a_, x + b_, y}$, telle que dans les différens Z elle devienne $e^{a_, y + b_, x + c}$, $c_,$ étant tel que $e^{c_,}$ ſoit un nombre rationnel. La comparaiſon des Z entr'eux pourra faire évanouir $A e^{a_, x + b_, y}$, A étant une des fonctions tranſcendantes de l'*article précédent* On pourra donc, le nombre des Z, Z^n_m, $Z^q_p \ldots = 0$, qui ont pu former une équation étant donné, déterminer la nature & le nombre des tranſcendantes que leur combinaiſon peut faire diſparoître.

IX. Quant aux produits indéfinis, on obſervera que ſi l'on a

$ax + by . ax + by + c . ax + by + c' . ax + by + c'' \ldots$ $ax + by + q$ dans Z, en ſorte que dans Z^n_m on ait $ax + by + c \ldots . ax + by + q . ax + by + q'$, il arrivera qu'appelant ce produit A, Z^n_m contiendra $A \frac{ax + by + q'}{aa + by}$; donc, la comparaiſon de ces deux équations fera diſparoître A; & ſi on prend un nombre quelconque de ces produits $A, A', A'' \ldots A_,, A_{,,}, A_{,,,}$, &c. il eſt clair que l'on pourra faire également diſparoître $\frac{A\ A\ A \ldots}{A_, A_{,,} A_{,,,}}$ le nombre de ces A étant indéfini. On voit qu'au lieu de

ces produits A, A', &c. on auroit pu en général prendre un produit $X, X', X'', X''' \ldots\ldots X_{,}$ indéfiniment, pourvu que dans Z^n_m il devienne $X', X'', X''' \ldots\ldots X_{,}\ X_{,,}$.

Comme le coëfficient de ce terme diſparoîtra avec lui, on voit qu'il pourra être une fonction arbitraire du *n.° 6* ci-deſſus, & contenir auſſi une des tranſcendantes.

Si maintenant on a dans Z une fonction B telle que dans Z^n_m elle devienne $B\,\frac{A.A'A''}{A_{,}A_{,,}A_{,,,}\ldots}$, les A étant de la même forme que ci-deſſus, on voit que comparant ces deux équations, on en aura une qui ne contiendra plus que des A. Ainſi le nombre & la nature des Z^n_m, Z^q_p, &c. étant donnés, on en déduira le nombre des produits que l'intégrale cherchée peut renfermer.

X. Il faut obſerver ici que ſi on ſuit l'ordre des différentiations, & qu'on ſuppoſe que l'on ait la propoſée ſous la forme

$$AZ + BZ' + CZ_{,} + DZ'', \text{ \&c.}$$

on ne peut ſuppoſer en général que ſi cette forme s'arrête, par exemple, à $QZ'''^{m} + Q'Z_{,}'''^{m-1} + Q_{,}Z_{,,,,m}$, elle ait été produite en différentiant une fonction

$$A'Z + B'Z' + PZ''''^{m-1} + P'Z_{,}'''^{m-2}, \text{ \&c.}$$

ainſi l'on ne peut regarder comme néceſſairement ſucceſſive dans ce ſens-là la diſparition des fonctions ou tranſcendantes, ou arbitraires. Mais cela ne change rien à la nature de ces fonctions, ni à la manière dont les fonctions arbitraires diſparoiſſent.

XI. Si j'ai une équation

$$aZ + bZ' + cZ_{,} \ldots\ldots\ldots = 0,$$

a, b, c, &c. étant des coëfficiens conſtans, & que je faſſe $Z = e^{fx+gy}$, j'aurai $a + be^{f\Delta x} + ce^{g\Delta y} \ldots = 0$, & par conſéquent une équation entre $e^{f\Delta x}$ & $e^{g\Delta y}$. Suppoſant donc $f\Delta x$ quelconque, j'aurai $g\Delta y$ ou g par une

équation du degré m, m étant l'ordre de l'équation, & par conséquent la valeur de Z sera égale à une série d'une infinité de termes

$$e^{fx+gy} + a_{,}e^{fx+g'y} + b_{,}e^{fx+g''y}, \&c.$$

où f est arbitraire, ainsi que les coëfficiens, & où g sont les différentes valeurs de g, répondantes aux différentes racines de l'équation en $e^{g\Delta y}$. Cette manière d'avoir en série la valeur de z, est, comme on voit, générale pour toutes les classes d'équations linéaires.

XII. Supposons maintenant que nous ayons fait

$$Z = Fmy + nx \,.\, e^{fx+gy} + V,$$

en sorte que

$$Z' = Fmy + nx + n\Delta x \times e^{fx+gy+f\Delta x} + V',$$

que

$$Z_{,} = Fmy + nx + m\Delta y \times e^{fx+gy+g\Delta y} + V_{,},$$

& ainsi de suite; il est clair que nous avons, si

$$n\Delta x = m\Delta y,\ e^{g\Delta y}Z' - e^{f\Delta x}Z_{,} = e^{g\Delta y}V' - e^{f\Delta x}V_{,},$$

où F a disparu, de même que e^{fx+gy}. Si V avoit été une constante, on auroit eu, en comparant avec le *numéro précédent*, $aZ_{,} + bZ_{,} = A$ ou $a = e^{g\Delta y}$, & $b = -e^{f\Delta x}$; & la solution trouvée dans le même article, auroit donné $Z = \frac{A}{a+b} + a_{,}e^{fx+gy} + b'e^{f'x+g'y}$, &c. & $ae^{f\Delta x} + be^{g\Delta y} = 0$; donc, $\frac{e^{f\Delta x}}{e^{f\Delta y}} = -\frac{b}{a}$; donc, repassant les nombres aux logarithmes $f\Delta x - g\Delta y = l - \frac{b}{a}$, soient f & g des valeurs particulières qui satisfassent à cette équation, &

que la valeur générale qui y satisfait soit $f + z$, $g + u$, nous aurons

$$f\Delta x - g\Delta y + z\Delta x - u\Delta y = l - \frac{b}{a};$$

mais $f\Delta x - g\Delta y = l - \frac{b}{a}$ par l'hypothèse; donc $z\Delta x = u\Delta y$; donc la valeur générale de Z sera

$$e^{fx + gy} \times (e^{my + nx} + a' e^{m'y + n'x} \ldots\ldots\ldots)$$

où les m & les n sont tels que $m\Delta y = n\Delta x$; donc cette série pourra être supposée égale à $Fmy + nx . e^{fx + gy}$. Si V n'avoit pas été une constante, on auroit eu toujours $aZ' + bZ_{,} = V$, & faisant disparoître les termes variables de V, une série

$$A(aZ' + bZ_{,}) + B(aZ' + bZ_{,})^{q}_{p} + C(aZ' + bZ_{,})^{s}_{r}, \&c. = 0;$$

& en faisant la substitution en séries

$$A(ae^{f\Delta x} + be^{g\Delta y})$$
$$+ B(ae^{f\Delta x} + be^{g\Delta y})e^{qf\Delta x + pg\Delta y}$$
$$+ C(ae^{f\Delta x} + be^{g\Delta y})e^{sf\Delta x + rg\Delta y}, \&c. = 0;$$

& par conséquent la solution en séries, donnera encore $e^{fx + gy} Fmy + nx$. Donc, en général, toute équation $ae^{f\Delta x} + be^{g\Delta y} = 0$, ou $ae^{qf\Delta x} + be^{g\Delta y} = 0$, qui résolvera l'équation en g, donnera une fonction arbitraire $(Fmy + nx)\, e^{fx + gy}$ ou $m\Delta y = n\Delta x$, ou bien $mp\Delta y = nq\Delta x$, au lieu d'une série infinie de termes $e^{fx + gy}$; donc, toutes les fois que l'équation en $e^{g\Delta y}$ & $e^{f\Delta x}$ n'aura que de pareilles racines, on aura l'intégrale proposée sous une forme finie; ce qui s'accorde exactement avec ce que nous avons dit ci-dessus pour les équations aux différences partielles infiniment petites.

XIII. Soit encore l'équation linéaire

$$aZ + bZ' + cZ_{,} + eZ'', \&c. = 0,$$

& que nous faſſions

$$z = (Ay^m + By^{m-1}x \ldots + Qx^m + A'y^{m-1} + B'y^{m-2}x \ldots + Q'x^{m-1} \ldots + Q_1)\, ef^{x+gy},$$

nous aurons 1.° pour déterminer ef & e^g, la même équation que ſi la quantité exponentielle avoit un coëfficient conſtant; 2.° nous aurons, appelant V le coëfficient de e^{fx+gy}, la même ſérie de termes $e^{nf\Delta x + mg\Delta y} \times \frac{\partial V}{\partial x} n\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} m\Delta y$; c'eſt-à-dire, la ſomme des termes de cette équation, multipliés ſucceſſivement par les expoſans de ef & e^g, c'eſt-à-dire cette équation ayant deux racines égales. 3.° Nous aurons les mêmes termes multipliés par $\frac{\partial\partial V}{2\partial x^2} n^2\Delta x^2 + \frac{\partial\partial V}{\partial x\partial y} \Delta y\Delta x mn + \frac{\partial\partial V}{2\partial y^2} m^2\Delta y^2$, c'eſt-à-dire l'équation conſidérée par rapport à ef & à e^g, ayant trois racines égales, & ainſi de ſuite, où il eſt eſſentiel d'obſerver que c'eſt par rapport à ef ou e^g, & non par rapport à f ou g, que les racines ſont égales. On voit que les équations dont je traite ici, ont un rapport exact pour cet objet avec les équations linéaires aux différences infiniment petites & finies ordinaires: on reconnoîtra par ce moyen les cas où la ſolution en ſéries devra contenir des fonctions en x & y non exponentielles.

XIV. Je n'ai point parlé ici du cas où l'équation en Z eſt intégrable ſucceſſivement, par rapport à x & à y, ce cas qui renferme celui où l'on a $Z + aZ' \ldots + qZ^n_m = 0$, aucun des termes Z^r_s qui précèdent Z^n_m ne contenant ni $r > n$, ni $s > m$; ce cas, dis-je, ſe réſout par le calcul des différences finies ordinaires; c'eſt celui où Z eſt égal au terme général d'une ſérie récurrente dont la fonction génératrice a pour dénominateur une fonction de x & de y. Or on voit que dans ce cas, regardant la ſérie comme ordonnée par rapport à x ſeulement; on trouvera en y l'expreſſion du terme général, c'eſt-à-dire du coëfficient de x^n, & on cherchera enſuite dans cette fonction de y, la valeur du coëfficient de $y^{n'}$, & on aura ainſi la valeur

du terme général cherché, c'eſt-à-dire du coëfficient de $x^n y^{n'}$. Voyez ſur ce ſujet un très-beau Mémoire de M. de la Place, inſéré dans le *Tome VI* des Savans Étrangers.

XV. Si l'on vouloit chercher une ſolution en ſéries ou approchée de ces équations, lorſqu'elles ne ſont pas linéaires, en ordonnant par rapport à Z, on feroit $Z = z + z' + z'' + z'''$, &c. z, z', z'', &c. étant des quantités ſuppoſées continuellement plus petites les unes que les autres; on auroit également ſucceſſivement égale à zéro, la ſomme des termes linéaires en z; la ſomme des termes linéaires en z', plus celle des termes en z du ſecond degré; la ſomme des termes linéaires en z''; des termes du troiſième degré en z & les produits en z & z'. Réſolvant la première, on aura z; ſubſtituant cette valeur, on aura z' par l'équation ſuivante. En effet cette équation ſera linéaire comme ci-deſſus, avec un terme qui ne contiendra que des fonctions exponentielles ou rationnelles entières ou fonctions arbitraires: ainſi on aura toujours moyen d'avoir z', en le ſuppoſant égal à une fonction ſemblable, plus la valeur qu'auroit eue z', ſi ce terme en x & y avoit été nul. Ce moyen très-ingénieux d'avoir des ſolutions ou approchées ou en ſéries, & le ſeul que je connoiſſe qui s'étende à tous les ſyſtèmes poſſibles d'équations différentielles, eſt dû à M. Euler; on le trouve dans ſes notes ſur Robins.

XVI. Il ne me reſte plus maintenant qu'un ſeul cas à examiner, celui où x & y étant, ainſi que Δx & Δy, des nombres entiers, Z doit être auſſi un nombre entier ou ſimplement un nombre non-tranſcendant. Ce cas peut être diviſé en deux cas différens, celui où l'on a l'intégrale en termes finis & celui où on ne l'a qu'en ſérie infinie. Dans le premier cas, nous obſerverons que tant les fonctions que les produits indéfinis ne feront aucune difficulté, parce qu'elles ſont données immédiatement en nombres algébriques. Mais pour les exponentielles, ſoit par exemple $e^{fx + gy}$, il faut obſerver qu'il eſt multiplié par une arbitraire qui eſt

fonction de $e^{f'x}$ & de $e^{g'y}$, ou par une fonction arbitraire de $e^{f'x}$, $e^{g'y}$ & de $(ay + bx)$; donc il faut que..... $e^{fx + Af'x + Bbx}$, $e^{gy + A'g'y + Bay}$ soit une quantité algébrique, quels que soient y & x, pourvu qu'ils soient des entiers; donc il faut que $e^{f + Af' + Bb}$ & $e^{g + A'g' + B'a}$, soient des nombres algébriques, ou que leur coëfficient soit zéro; ce qui, dans ce cas, donnera un moyen de chasser de la valeur de Z tous les termes contenant des exponentielles où cette condition n'aura pas lieu. Si on a la solution en série, comme alors f est arbitraire, il faudra chercher f tel que $e^{f + Af'}$ soit algébrique, c'est-à-dire $f + Af' = ln$, & chercher si, dans ce cas, $g + Ng'$ peut devenir ln'. Les autres termes ne pourront entrer dans la série & auront un coëfficient nul.

XVII. Jusqu'ici j'ai parlé des cas où Δx & Δy sont deux quantités constantes. Supposant maintenant qu'elles soient des fonctions de x & de y que j'appelle X & Y; on voit d'abord qu'on pourroit, en faisant le même raisonnement que pour les différences finies ordinaires, prendre l'équation en Z, x & y; si $X = \Delta x$ est fonction de x seulement & Y de y, on aura en différentiant, une équation en Z seul sans x ni y; on la résolvera par rapport à x' & y', deux quantités dont la différence est constante; & les équations $\Delta x = X$, $\Delta y = Y$, donneront x en x', y en y', & réciproquement. Si X & Y avoient été fonctions de x & de y en même temps, on élimineroit de même y & x de l'équation en Z; on auroit ensuite $\Delta x = X$, $\Delta y = Y$, d'où on tireroit x & y par des équations du second ordre, ne renfermant qu'une seule variable. Intégrant donc la proposée en Z, par rapport à x' & y', on aura x en x' & y en y' par des équations du second ordre.

XVIII. Si on vouloit dans ce cas, & semblablement dans

dans celui des différences finies ordinaires, ſuivre une méthode plus directe, on pourroit rechercher immédiatement quelles fonctions peuvent diſparoître pour les différentes valeurs de Δx & Δy. Je n'entrerai pas ici dans ce détail que je réſerve pour un autre temps.

XIX. Dans un Mémoire ſur la Théorie des Équations aux différences finies, j'ai obſervé que leur intégrale pouvoit contenir des termes ΣX, tels qu'aucune fonction de x en termes finis ne pût les repréſenter. Dans les équations que je traite ici, la même choſe a lieu; ſoit en effet une équation en x, y, Z, je puis avoir une intégrale finie par rapport à Z ſeulement, & que les coëfficiens de cette intégrale, ou le terme ſans Z, ſoient égaux à des fonctions de x & de y ſans Z, ou donnés par des équations ſéparables; en général ce cas a lieu lorſque le dernier terme eſt donné, par exemple (ce terme étant V) par une équation $AV + BV' + CV_{,}$ &c. $= 0$, A, B, C, &c. ne contenant pas Z. On peut regarder ce cas comme formant une autre claſſe que celle des équations dont les intégrales ſont abſolument en termes finis, & que celles dont les intégrales ne ſont abſolument exprimées que par des ſéries infinies par rapport à chacune des variables.

ARTICLE X.

D'une autre eſpèce d'équations aux différences finies.

I. La claſſe d'équations dont je vais m'occuper ici, eſt très-importante dans le calcul des équations aux différences partielles. J'ai fait voir ailleurs *(Mém. de 1771)*, que la détermination des fonctions arbitraires en dépendoit preſque uniquement. Le cas que nous examinerons principalement, eſt celui où nous avons une équation en x & Z, Z', Z'', Z''', &c. Z étant une fonction de x, Z' ce que devient Z, en mettant pour x, $x + a$, Z'' ce que devient Z, en mettant pour x, $x + b$, & ainſi de ſuite.

II. En ſuivant ici la même marche que dans l'*article précédent*, je trouve d'abord que l'on ne peut faire évanouir

de fonctions arbitraires que dans les cas suivans; 1.° si dans Fe^{fx}, $e^{f\Delta x} = 1$, les différentes valeurs de Δx, a, b, c, &c. sont telles que $ef^a = 1$, $ef^b = 1$, $ef^c = 1$, &c. ce qui donne ou $f = 0$ ou tous les a, b, c, &c. en progression arithmétique; 2.° cela a lieu encore lorsque la proposée est de la forme

$$(AZ + BZ') + A'(AZ + BZ')'' + B'(AZ + BZ')''', \text{\&c.}$$

En effet, il est clair que dans la fonction $AZ + BZ'$, il a pu disparoître une fonction arbitraire qui se trouvoit dans Z; mais pour ce second cas, il faut que la proposée contienne z, z', z'', z''', z^{IV}, &c. ces z étant pris pour

$$x, x + a, x + b, x + a + b, x + c, x + a + c, \text{\&c.}$$

& si, par exemple, la proposée contenoit des termes pris pour

$$x, x + a, x + b, x + a + b, x + nb, x + a + nb,$$
$$x + c, x + a + c, x + b + c, x + a + b + c,$$
$$x + nb + c, x + a + nb + c;$$

on voit que l'on auroit encore une arbitraire qui auroit pu disparoître par la même raison; mais ces derniers cas rentrent dans celui où l'on peut employer les solutions successives. Au reste, si l'on veut s'assurer du nombre d'arbitraires que chaque équation proposée contient réellement dans son intégrale, il sera aisé, par une méthode semblable à celle de l'*article II* ci-dessus. En effet, supposons z égal à une série de x, y, ou $ef^{x + gy}$ comme on voudra, on n'a qu'à supposer les coëfficiens égaux à des fonctions de ef^x, telles que ou ef^a, ou ef^b, ou ef^c, &c. $= 1$; & il y aura autant de fonctions arbitraires qu'il restera de coëfficiens indéterminés dans cette série.

III. Quant aux fonctions transcendantes, 1.° pour les transcendantes simples, il est aisé de voir que l'on pourra faire disparoître autant de ef^x qu'il y a de z moins un dans l'équation; 2.° & que pour les transcendantes de la forme $e^{gx^2 + g'x + g''}$, la comparaison de deux équations

quelconques peut faire diſparoître le premier rang; mais pour le ſecond, on voit que ſi a, b, c, &c. ne ſont pas commenſurables, les fonctions de ce ſecond rang ne ſeront pas les mêmes, ſi l'on fait $x = x + a$, que ſi l'on fait $x = x + b$. Soit donc $e^{gx^2 + g'x + g''}$, nous avons pour $x + a$, $e^{gx^2 + g'_{\prime}x + g''_{\prime}}$, & pour $x + b$, $e^{gx^2 + g'_{\prime\prime}x + g''_{\prime\prime}}$; donc, ſi l'on a trois équations qui aient dû produire la propoſée, & qu'on ſuppoſe que la valeur générale contienne $e^{gx^2 + g'x + x''}$, $e^{g'_{\prime}x + g_{\prime\prime}}$, $e^{g'_{\prime\prime}x + g''_{\prime\prime}}$, on ne pourra pas en général faire diſparoître ces trois tranſcendantes; & il faudra que a & b ſoient commenſurables entr'eux. 3.° Pour les tranſcendantes de la forme $e^{e^{gx}}$, il eſt aiſé de voir qu'il faut que la même quantité qui doit être rationnelle pour qu'on puiſſe faire diſparoître, par la comparaiſon de Z & de Z', une fonction de cette forme, la ſoit encore en mettant $x + b$ au lieu de x, c'eſt-à-dire, que a & b ſoient commenſurables. En général, toute fonction ou arbitraire ou tranſcendante, autre que e^{gx}, & les fonctions ſemblables, ni aucun produit indéfini, ne peut diſparoître que lorſque dans les a, b, c, &c. il y en a de commenſurables entr'eux, ou avec un ſeul, ou avec la ſomme de pluſieurs, &c. Dans tous les cas où cela aura lieu, les mêmes principes donneront le nombre des fonctions qui ont pu diſparoître. Si, par exemple, nous avons quatre équations qui aient concouru à produire la propoſée, l'une pour x, l'autre pour $x + a$, une troiſième pour $x + b$, & une quatrième pour $x + a + b$, on pourra faire diſparoître, ſoit $e^{gx^2 + g'x + g''}$, ſoit un produit indéfini. Soit en effet V ce produit, en y mettant $x + a$ pour x, il devient VB, B étant fini; en mettant $x + b$ pour x, il devient V'; & en mettant $x + a + b$ pour x, il devient $V'\ B'$; donc, &c. Suppoſant enſuite deux produits VU, & que faiſant $x + a$, U devienne U' & V, VB; que faiſant $x + b$, V devienne V'

& V, VB', lorſque x devient $x + a + b$. VU deviendra $U' V' B' B'$, B' & $B'_{,}$ étant ce que deviennent B & B'. Donc, la première équation contiendra $UV_{,}$, la ſeconde VU', la troiſième UV', & la quatrième $V' U' = \frac{VU' \times V'U}{UV}$; donc, on pourra faire évanouir ces produits, c'eſt-à-dire, que la propoſée pourra contenir dans ſon intégrale des produits qu'on peut faire diſparoître, ſoit en comparant l'équation pour x avec l'équation pour $x + a$, ſoit en comparant l'équation pour x avec l'équation pour $x + b$.

IV. Juſqu'ici nous n'avons examiné que l'hypothèſe où les différentes différentielles de x ſont toutes des quantités conſtantes; ſuppoſons maintenant qu'elles ſoient des fonctions de x, & examinons comment il arrivera que la comparaiſon de ces équations faſſe évanouir ou des tranſcendantes ou des arbitraires. On voit qu'on y parviendra en examinant ſucceſſivement toutes les combinaiſons deux à deux des équations qui ont pu produire la propoſée, en cherchant quelles fonctions leur comparaiſon a pu faire diſparoître. En effet, celles-là ſeules pourront entrer dans ces intégrales; ces fonctions connues, on cherchera, en les ſuppoſant dans l'intégrale, ſi elles n'y introduiſent pas plus de fonctions que la comparaiſon des équations n'en a pu faire diſparoître.

V. Quant aux quantités qui peuvent ſe trouver ſous le ſigne d'intégration, je renverrai abſolument à ce que j'ai dit, *article précédent, n.° 19*, ainſi qu'au *n.° 14* du même article, pour ce qui regarde les ſolutions approchées.

VI. J'ai donné, dans les *Mémoires de Turin, tome V*, la ſolution des équations linéaires pour ce cas, la valeur de l'inconnue y ſera exprimée en termes de la forme ef^x, comme dans les autres équations linéaires; & lorſque l'équation en ef aura deux valeurs égales, la valeur de y contiendra un terme xef^x, &c. comme dans toutes les équations linéaires aux différences finies.

ARTICLE XI.

Sur la nature des différentes espèces d'intégrales, & la manière de les trouver en séries ou par approximation.

I. Du Mémoire sur les Quadratures, inséré dans le Volume de 1771, il résulte qu'il n'est pas prouvé en général que toute équation $A\partial x + B\partial y = 0$, devienne une différentielle exacte étant multipliée par une fonction finie. La même chose aura lieu pour des ordres plus élevés; il faut donc diviser les équations différentielles en plusieurs classes, & c'est ce que nous allons faire dans cet article.

Des Équations du premier ordre.

1.° Soit une équation rationnelle $A\partial x + B\partial y$, il peut arriver, ou qu'un facteur fini F, donné par l'équation $F^n = V$, V étant rationnel & algébrique, & n un nombre rationnel, puisse rendre $A\partial x + B\partial y$ différentielle exacte; dans ce cas, on cherchera l'intégrale finie par la méthode exposée dans les *Mémoires de 1771*, & on la trouvera toutes les fois qu'elle sera possible.

II. Si cela ne peut arriver, on examinera si la proposée ne peut devenir une différentielle exacte; 1.° en la multipliant par $e^V V'$, V & V' étant algébriques & finis; 2.° en la multipliant par $\frac{X, + X',y + X'',y^2, \&c.}{X + X',y + X'',y^2, \&c.}$, la série n'étant finie que par rapport à y: on prouvera également dans ces deux cas que le nombre des équations surpassera toujours en général celui des coëfficiens; ce qui donne encore un troisième cas, celui où le facteur ne peut être regardé comme fini.

III. Dans le cas où le facteur seroit fini, & de la forme $e^V V'$, on cherchera si l'on peut avoir $\int e^V V' A\partial x + B\partial y$ en termes finis, sinon il formera une classe à part; mais s'il admet une intégrale en termes finis, alors il retombe dans le cas du *N.° I.er*

Dans le cas où le facteur est fini en y, & infini en x, on voit d'abord que l'on aura l'intégrale y sous une forme finie, en supposant les coëfficiens de x donnés. Maintenant

ces coëfficiens ſeront donnés par des équations différentielles, mais en plus grand nombre que les coëfficiens, en ſorte que s'ils peuvent être finis, on les trouvera en éliminant les équations différentielles; s'ils ne peuvent l'être, on aura néceſſairement le coëfficient qui reſtera infini par une équation différentielle; & cette équation ſera telle, que la ſuppoſant réſolue, l'arbitraire ne pourra entrer dans l'intégrale que comme ajoutée aux quantités logarithmiques, ou facteur de fonctions exponentielles, ce qui ſemble prouver que le facteur ſera de la forme $A, \frac{X, + X',y, \&c.}{X + X,y, \&c.}$, toutes ces fonctions, hors $A,$ étant finies, & même algébriques.

IV. Nous avons donc quatre eſpèces de fonctions différentes des tranſcendantes ordinaires, qu'on ne peut exprimer par ces tranſcendantes ſous une forme finie; & je cherche pour chacune, 1.° à les repréſenter par des ſéries, 2.° à les conſtruire géométriquement, 3.° à en connoître la nature algébrique.

V. Soit en général $\int A\partial x$, &c. telle que l'on ne puiſſe avoir $\int A\partial x$ en termes finis; nous aurons par les méthodes connues; 1.° $\int A\partial x$ en ſérie ordonnée, ſoit par rapport à x, ſoit par rapport à A. Soit en effet $z = \int A\partial x$, & qu'on cherche la valeur de z répondante à $x + \Delta x$, on aura $z + \Delta z = \int A\partial x + A\Delta x + \frac{\partial x}{2\partial x}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 A}{2.3.\partial x}\Delta x^3 +$ &c. Soit N la valeur de z, lorſque $a = 0$, que je ſuppoſe connue, & ſoit fait $\Delta x = -x$, j'aurai

$$N = \int A dx - Ax + \frac{\partial A}{2\partial x}x^2 - \frac{\partial^2 A}{2.3.\partial x^2}x^3, \&c.$$

donc,

$$\int A\partial x \text{ ou } z = N + Ax - \frac{\partial A}{2\partial x}x^2 + \frac{\partial^2 A}{2.3.\partial x^2}x^3, \&c.$$

& par la même raiſon, on aura

$$z = N + Ax + \frac{\partial A}{2\partial x}x^2 + \frac{\partial\partial A}{2.3.\partial x^2}x^3, \&c.$$

où dans les A, on a fait $x = 0$.

2.° On n'aura qu'à prendre une fonction z égale à la transcendante ou à l'irrationnelle, & supposer que $\frac{A\partial z + B\partial x}{C}$ soit une différentielle exacte, & qu'elle se trouve égale à la fonction proposée, en mettant pour ∂z sa valeur $X\partial x$ ou $zX\partial x$. Cela posé, on supposera que $A, B, C,$ remplissent ces conditions; ce qui donnera à l'infini des équations pour déterminer les coëfficiens de ces termes. Mais si on néglige, dans ces équations de comparaison, les termes au-delà d'un degré n, on aura, en ne négligeant que les mêmes termes dans $A, B, C,$ trois fonctions indéterminées de $\frac{n+1.n}{2}$ termes pour lesquels (hypothèse) il y a $\frac{n+1.n}{2}$ équations de comparaison, plus à cause de $\frac{AzX+B}{C}\partial x$ ou $\frac{AX+B}{C}\partial x$ égal à la fonction proposée $\frac{n+a\ldots n+a-1}{2}$ termes, a étant un nombre donné; on pourra donc toujours supposer que le nombre des coëfficiens surpasse celui des équations. On aura donc $\frac{A\partial z + B\partial x}{C}$ différentielle exacte & égale à la proposée, en négligeant les termes supérieurs. Soit ensuite $n' > n$, on auroit $\frac{(A + A')\partial z + (B + B')\partial x}{C + C'}$, qui seroit dans le même cas, les séries $A + A', B + B', C + C'$ allant jusqu'au degré $n' > n$, & ainsi de suite; & si la fonction proposée Z est telle que l'on ait $\frac{A\partial z + B\partial x}{C} = Z\partial x$ à très-peu près, la série sera convergente.

VI. Maintenant, pour construire géométriquement cette formule $\int Z\partial x$, on ne voit aucune difficulté. Supposant en effet que l'on ait tracé la courbe dont l'équation est $y = Z$, $\int Z\partial x$ est égal à l'aire de cette courbe.

VII. Si nous voulons maintenant examiner la nature de ces fonctions $\int A\partial x$, qu'on ne peut exprimer en logarithmes

d'une manière finie, nous trouverons qu'on doit les regarder, ainsi que les logarithmes, comme des quantités d'une nature particulière, déterminées lorsque x est déterminé, & qu'on pourra regarder les fonctions $\int A \partial x$ comme des quantités aussi données toutes les fois que l'on connoîtra une manière, pour ces quantités, comme pour les logarithmiques, d'avoir $\int A \partial x$ aussi près qu'on voudra pour chaque valeur de x, de même que l'on peut avoir lX.

Je vais indiquer un moyen de parvenir à ce but en général. Soit d'abord $\int A \partial x$, je suppose que sa valeur soit P, lorsque $x = a$; j'ai la valeur de $\int A \partial x$, lorsque $x = a + x^{\text{I}}$ égale à

$$P + A x^{\text{I}} + \frac{\partial A}{2 \partial x} x^{\text{I}.2} + \frac{\partial \partial A}{2.3.\partial x^2} x^{\text{I}\,2} \ldots\ldots$$

En supposant que dans A, $\frac{\partial A}{\partial x}$, &c. on a mis a au lieu de x.

Cela posé, on a un moyen de voir pour chaque valeur de a, quelle valeur petite on peut donner à x pour que $A x^{\text{I}}$ soit beaucoup plus grand que les termes suivans. Ensuite, supposant que nous ayons depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, $a = x^{\text{I}} + x^{\text{II}} + x^{\text{III}} + x^{\text{IV}} + x^{\text{V}}$, &c. ces x^{I} étant les petites valeurs pour lesquelles lorsque $x = x^{\text{I}}$, ou $x^{\text{I}} + x^{\text{II}}$, ou $x^{\text{I}} + x^{\text{II}} + x^{\text{III}} \ldots A^{\text{I}} x^{\text{I}}$, $A^{\text{II}} x^{\text{II}}$, $A^{\text{III}} x^{\text{III}}$, &c. est beaucoup plus grand que ces autres termes, nous aurons en général pour valeur approchée de $\int A \partial x$,

$$N + A^{\text{I}} x^{\text{I}} + A^{\text{II}} x^{\text{II}} + A^{\text{III}} x^{\text{III}}, \text{ \&c.}$$

N étant la valeur de $\int A \partial x$, lorsque $x = 0$, & A^{I}, A^{II}, A^{III}, &c. étant ce que devient $\int A \partial x$, lorsque, au lieu de x, on met x^{I}, $x^{\text{I}} + x^{\text{II}}$, $x^{\text{I}} + x^{\text{II}} + x^{\text{III}}$, &c. ou, ce qui seroit encore plus approché,

$$\int A dx = N + \frac{A^{\text{I}} x^{\text{I}}}{2} + \frac{A^{\text{II}} x^{\text{I}} + x^{\text{II}}}{2} + \frac{A^{\text{III}} x^{\text{II}} + x^{\text{III}}}{2}, \text{ \&c.} + \frac{A^{\text{III}\,m} x^{\text{III}\,m}}{2},$$

le nombre des x^{I} étant m, & ainsi de suite.

Mais si on prend pour a une valeur telle que l'on puisse, sans

ſans trop alonger le calcul, faire $x' = x'' = x''' = x''''$, &c. on aura pour première valeur approchée

$$\int A dx = N + \frac{A' x'}{2} + A'' x' \ldots\ldots + \frac{A'''''' x'}{2}.$$

Lorſque par ce moyen on ſera parvenu à une première valeur approchée, ſoit X cette valeur, on mettra dans X, au lieu de la tranſcendante, ou du radical, l'indéterminée z; on différenciera X, & on ajoutera à ∂X des termes en x & z, avec la condition de devenir égaux à $A \partial x - \partial X$, & d'être des différentielles exactes en négligeant les puiſſances ſupérieures.

On pourroit auſſi faire $\int A \partial x = X + V$; d'où $A \partial x - \partial X = \partial V$, & éliminant x, on auroit ∂V par une équation différentielle, & V tel qu'on en pourroit négliger les puiſſances; mais le moyen le plus ſimple ſeroit de continuer l'opération ci-deſſus, en ajoutant à la ſérie qui donne la valeur approchée de $\int A \partial x$ à chaque terme, les termes ſuivans,

$$\left(A_{1} - \frac{A' + A''}{2}\right) \frac{x'}{2}, \left(A_{11} - \frac{A'' + A'''}{2}\right) \frac{x''}{2}, \text{ \&c.}$$

où A_{1} A_{11}, &c. ſont les valeurs de A répondant à $x = \frac{x'}{2}$ à $x = x' + \frac{x''}{2}$, &c. Si on vouloit pouſſer plus loin l'approximation, on ajouteroit de nouveaux termes en ſuivant la même loi, qui eſt toujours facile à ſaiſir. En général, ſoit appelée $A^{(x)}$ la valeur de A répondant à x, $A^{(0)}$ la valeur de A répondant à $x = 0$, $A\left(\frac{x}{2}\right)$ la valeur de A répondant à $\frac{x}{2}$, on aura $\int A \partial x$ par la ſérie ſuivante,

$$[A^{(0)} + A^{(x)}] \times \frac{x}{2}$$

$$+ \left[2 A\left(\frac{x}{2}\right) - A^{(x)} - A^{(0)}\right] \frac{x}{4}$$

$$[2A^{(\frac{x}{4})} + 2A^{(\frac{x}{4})} - 2A^{(\frac{x}{2})} - A^{(x)} - A^{(0)}]\frac{x}{8}$$

$$+ [2A^{(\frac{x}{8})} + 2A^{(\frac{3x}{8})} + 2A^{(\frac{5x}{8})} + 2A^{(\frac{7x}{8})} - 2A^{(\frac{x}{4})}$$

$$- 2A^{(\frac{3x}{4})} - 2A^{(\frac{x}{2})} - A^{(x)} - A^{(0)}]\frac{x}{16}, \text{ \&c.}$$

ſérie dont la loi eſt très-ſimple. Cette ſérie ſera toujours convergente, & toutes les fois que la valeur de $\int A\,\partial x$ ſera une quantité finie, on la trouvera par ce moyen d'une manière auſſi approchée qu'on voudra.

Mais lorſque $\int A\,\partial x$ a une valeur infinie, alors la ſérie précedente ne peut plus la donner; & comme il y a d'ailleurs des cas où $\int A\partial x$ eſt très-grand & la ſérie trop peu convergente, on pourra alors éſſayer le moyen ſuivant.

On cherchera à partager A en deux parties $A' + A''$, en ſorte que $\int A'\partial x$ puiſſe être exprimé en termes finis, & que A'' ne ſoit pas fort grand, ou dans ce cas, comme $\int A''\partial x < A''x$, A'' étant ſuppoſé avoir ſa plus grande valeur poſſible, on aura facilement $\int A''\partial x$ par la méthode ci-deſſus, d'une manière ſuffiſamment approchée.

On voit qu'il ſeroit aiſé d'appliquer cette méthode au cas où on auroit une différentielle exacte de pluſieurs variables.

Si pour une certaine valeur de A, on connoît $\int A\partial x$ auſſi exactement qu'on voudra, on pourra regarder l'intégrale de $\int A\partial x$ comme connue; on pourra, ſi on a $\int Z\partial z$ à chercher, regarder ſi l'intégrale n'eſt pas une fonction finie de z, de logarithmes de fonctions de z & de fonctions de la forme $\int A\partial x$, & ainſi de ſuite; en ſorte que pour chaque eſpèce de fonction $\int A\partial x$ dont on aura calculé les valeurs approchées, il naîtra une claſſe de fonctions $Z\partial z$ qui ſeront intégrables en termes finis, en ſuppoſant les $\int A\partial x$ connues.

VIII. Il eſt bon d'examiner maintenant ſi on ne peut pas réduire les fonctions $\int A\partial x$ à des formes plus ſimples.

Soit 1.° A une fonction de & x de $lx + a$, ou e^x, & que cette fonction contienne des radicaux en x & $lx + a$; prenant que l'on ait

$$a + bx + cz + elx + a, \&c.\ \partial x,$$
$$+ a' + b'x + c'z + e'lx + a, \&c.\ \partial z,$$

divisé par

$$a'' + b''x + c''z + e''lx + a, \&c.$$

qui soit une différentielle exacte par rapport à x & z, & qui devienne égale à A lorsque l'on met pour z^m sa valeur $Az^{m-1} + Bz^{m-1}$, &c. Il est clair que nous aurons, pour que la fonction hypothétique ci-dessus soit une différentielle exacte, une équation du degré $n + n'$, si n est le degré du numérateur, & n' celui du dénominateur. Le nombre des variables est 3; donc celui des termes & des équations entre les coëfficiens sera $\frac{n + n' . n + n' + 1 . n + n' + 2}{1 . 2 . 3}$. Maintenant le nombre des conditions pour que cette même fonction hypothétique devienne égale à A, en mettant pour z & ∂z leurs valeurs, ne dépend que d'une équation du degré $m - 1$ en z, c'est-à-dire que l'on n'aura que $pn^2 + qn + r$, équations de conditions. Or le nombre des coëfficiens indéterminés est $2 . \frac{n . n + 1 . n + 2}{1 . 2 . 3} + \frac{n' + n' + 1 . n' + 2}{1 . 2 . 3}$; donc dans le nombre des équations de condition, le plus haut degré des indéterminées n, est $\frac{(n + n')^3}{6}$, & pour le nombre des indéterminées il est $\frac{2n^3}{6} + \frac{n'^3}{6}$; donc le rapport de ces deux nombres est comme $n^3 + 3n^2n' + 3nn'^2 + n'3$ à $2n^3 + n'^3$; donc si on prend n tel que $n^3 > 3n^2n' + 3nn'^2$, & qu'on fasse $n = an'$, a étant un nombre entier, nous aurons $a^3n'^3 > (3a^2 + 3a)n'^3$; donc faisant d'abord $a' > 3a^2 + 3a$,

enſuite faiſant que n' ſoit telle que $(a^3 - 3a^2 - 3a)$ $n'^3 > (p_, a^2 + q_, a + r_,) n'^2 + (p_,' a + q_,') n'$ $+ p_,''$, les p, q, r, étant des quantités déterminées (ce qui eſt toujours poſſible) on parviendra en général à faire en ſorte que le nombre des indéterminées ſurpaſſe celui des équations; mais on voit que cela ſuppoſe toujours que l'on puiſſe faire $n > n'$.

2.° Suppoſons que A contienne $l x + a$, & e^z, ou $l z + r$, z étant fonction algébrique de x & $l x + a$, & tout étant ſuppoſé rationnel (pour plus de ſimplicité) je prends une fonction

$a + bx + cl(x + a) + ez + fl(z + r) \partial x$
$+ a' + b'x + c'l(x + a) + e'z + f'(z + r)$ &c. ∂z

diviſée

$a'' + b''x + c''l(x + a) + e''z + f''l(z + r)$ &c.

& je ſuppoſe qu'elle ait les deux conditions, 1.° d'être une différentielle exacte par rapport à x & z; 2.° de devenir identique avec $A \partial x$ en y mettant pour ∂z ſa valeur; pour la première condition, j'ai à cauſe des quatre variables un nombre d'équations $\frac{n + n' . n + n' + 1 . n + n' + 2 . n + n' + 3}{1 . 2 . 3 . 4}$ entre les coëfficiens; & pour la ſeconde on aura, en mettant pour z & ∂z leurs valeurs en x & $l x + a$, un nombre de conditions $p_, n^3 + q_, n^2 + r_, n + s_,$, $p_,$, $q_,$, $r_,$, $s_,$, étant déterminés. Donc ſi on ſuppoſe que $\frac{n^4}{12} + \frac{n'^4}{24}$ $> \frac{(n + n')^4}{24}$, faiſant $n = an'$, on aura $a^4 n'^4 > 4a^3 n'^4$ $+ 6a^2 n'^4 + 6an'^4$; d'où $a^4 > 4a^3 + 6a^2 + 6a$; qu'enſuite on ſuppoſe que $(a^4 - 4a^3 - 6a^2 - 6a)$ $n'^4 > p_, a^3 + q_, a^2 \ldots n'^3 + p_,' a^2 \ldots n'^2$ &c. les p, q, r, &c. étant des quantités déterminées, ce qui eſt toujours poſſible, on aura le nombre des indéterminées plus grand que celui des équations, & ainſi de ſuite.

Ainſi par la méthode des intégrations par parties, on aura toujours en général & toutes les fois qu'on pourra ſuppoſer $n > n'$, $\int Z \partial x$ dépendant de l'intégration d'une fonction $\int Z' \partial x$ où Z' eſt fonction rationnelle de x & de $lx + a$, ou e^x.

IX. De cette manière de réduire les fonctions intégrales, il eſt aiſé de voir que toutes ſe réduiront en général aux intégrations de

$$1. \int l(x + a)^m X \partial x.$$

$$2. \int e^{nx} X \partial x.$$

$$3. \int \frac{X \partial x}{lx + a + X'}.$$

$$4. \int \frac{X \partial x}{l(x + a + X')^m}.$$

$$5. \int \frac{X \partial x}{e^x + X'}.$$

$$6. \int \frac{X \partial x}{(e^x + X')^m},$$

où l'on voit que la première forme ſe peut réduire auſſi en général, de manière que X ſoit toujours rationnel.

X. Je dis *en général* & non pas *toujours;* en effet, dans ce Mémoire, comme dans celui de 1771, je me ſuis borné à dire que l'on pourroit faire en ſorte que le nombre des indéterminées ſurpaſſât celui des équations, mais ce n'eſt pas toujours une raiſon pour que le Problème ſoit poſſible. En effet, pour en donner l'exemple le plus ſimple, ſi on avoit

$$ax + by + cz + e$$
$$a'x + b'y + c'z + e' = 0.$$

Ces deux équations ne pourroient avoir lieu en même temps toutes les fois que $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, & en général, le Problème n'eſt pas poſſible toutes les fois ou que le nombre des indéterminées peut, comme dans l'exemple précédent, ſe réduire à un moindre, ou le ſyſtème entier des équations, ſe partager en pluſieurs claſſes, dans une deſquelles le nombre des équations ſurpaſſe celui des indéterminées.

Il ſuit de-là que toutes les fois qu'il y aura un moyen de prouver que ſans nuire à la généralité d'une forme propoſée, le nombre des indéterminées devienne plus petit que celui des équations, il en faut conclure que ſi par une autre méthode, le nombre des coëfficiens indéterminés vient à ſurpaſſer celui des équations; cela n'eſt qu'illuſoire.

Dans les *Mémoires de 1771, page 693*, il faut que n puiſſe être ſuppoſé plus grand que n', j'ai déjà obſervé dans ce volume, que cela ne pourroit avoir lieu pour une fonction dont on ſauroit que l'intégrale finie devroit être logarithmique; on pourroit dire auſſi que cela ne peut être vrai en général, lorſque l'intégrale doit être partie logarithmique & partie algébrique; car ſéparant les deux parties, on verra que dans la première $n < n'$, & que dans la ſeconde z peut être ſuppoſé toujours au-deſſous du degré $m - 1$, ſans nuire à la généralité de la forme.

XI. La méthode que j'ai donnée pour avoir les intégrales toutes les fois qu'elles ſont en termes finis, c'eſt-à-dire, toutes les ſois que les quadratures ſe réduiſent à celles du cercle & de l'hyperbole, ſerviront également à trouver les quadratures qui dépendent des courbes d'un degré moindre.

Par exemple, ſoit $\int \frac{\sqrt[m]{(P')}}{Q}\, dx$, & que P' & Q contiennent une quantité z donnée par une équation du degré n; nous chercherons d'abord, faiſant $\sqrt[m]{(P')} = y$, $\frac{A\partial x + B\partial y}{C}$, différentielle exacte par rapport à x & à y, & ſe réduiſant à $y\partial x$, en mettant pour y^m ſa valeur, & A, B, C, étant des fonctions de x & y, enſuite ſi cela ne peut avoir lieu, nous chercherons $\sqrt[m]{(P')}\ \frac{A\partial x + B\partial z}{C}$ qui ſoit différentielle exacte de x & de z, & qui devienne $\frac{\sqrt[m]{(P')}}{Q}$, ∂x, en mettant au lieu de z^n ſa valeur; & continuant de traiter les radicaux qui entrent dans la valeur de z de la même

manière que $\sqrt[m]{(P')}$, on parviendra à réduire la recherche de $\int \frac{\sqrt[m]{(P')}}{Q} dx$ aux termes les plus ſimples dont elle ſoit ſuſceptible.

Mais comme en général il faut toujours avoir une manière approchée d'avoir $\int \frac{\sqrt[m]{(P')}}{Q} dx$, lorſque cette formule n'eſt pas ſuſceptible de réduction, comme on en a pour avoir des valeurs approchées de lA, il ſera moins important de s'arrêter à faire des recherches ſur les équations qui peuvent ſe réduire.

Ce qu'il y aura de plus important, c'eſt de ſavoir diſtinguer ſi une intégrale peut être algébrique ou non, & ſi elle peut être logarithmique, à cauſe de la grande habitude où l'on eſt de calculer ces quantités. Pour le premier cas, ſoit cherché, ſi $\int V\partial x$ eſt algébrique, on fera

$$\int V\partial x = A + Bz \ldots\ldots\ldots\ldots + Pz^{m-1},$$

m étant le degré de l'équation en z & x ordonnée par rapport à z. Différentiant cette formule & l'égalant à V miſe ſous la même forme, on aura A, B, C, &c. donnés par des équations linéaires, & il ſuffira de voir ſi A, B, C, &c. peuvent être ſuppoſés égaux à la forme d'une ſérie récurrente.

Je n'entrerai point ici dans de plus grands détails.

XII. Soit maintenant une équation $A\partial x + B\partial y = 0$, qui contienne des tranſcendantes ou des radicaux; ſoit z le radical ou la tranſcendante; j'ai donc $A'\partial z + B'\partial x + C'\partial y = 0$, dans un cas, & dans l'autre $A'\partial z + B'z\partial x + C'z\partial y = 0$; & il eſt aiſé de voir qu'il faut que multipliant la propoſée par un facteur V, & l'équation en z par un facteur V', qu'il faut, dis-je, que leur ſomme ſoit une différentielle exacte, V ayant une autre valeur que zéro, & V' que $\frac{1}{A'}$ ou $\frac{1}{A'z}$; ou bien il faudra que prenant $A''\partial x + B''\partial y + C''\partial z = 0$, & ſuppoſant que cette forme repréſente une équation poſſible, elle devienne $A\partial x + B\partial y = 0$, en mettant pour ∂z

dans le cas des transcendantes, & dans celui des radicaux pour z & ∂z leurs valeurs en x & y.

XIII. Maintenant il est aisé de voir, 1.° que supposant que A'' soit tout ce qu'on veut, on pourra toujours trouver des valeurs de B'' & de C'' qui satisferont à ce que $A''\partial x + B''\partial y + C''\partial z = 0$, soit une équation possible; on pourra donc supposer cette condition remplie, & A'' indéterminé. 2.° Que supposant A'' & B'' quelconque, on ne peut pas toujours trouver C'' en termes finis. De-là il suit que soit n le degré des A'', B'', C'', si la fonction est un radical, le nombre des équations de condition, pour que les équations $A\partial x + B\partial y = 0$, & $A''\partial x + B''\partial y + C''\partial z = 0$, aient lieu en même-temps, étant toujours égal à un nombre déterminé de fonctions de x, y, ne sera que de l'ordre n^2; or le nombre des coëfficiens indéterminés du terme A'' est de l'ordre n^3; donc il pourra en général y avoir plus de coëfficiens indéterminés dans la forme hypothétique, que d'équations de condition. 2.° Que si c'est une transcendante, le nombre des conditions sera du degré n^3, comme celui des coëfficiens indéterminés de A''; donc, on ne peut dire qu'en général le nombre des coëfficiens indéterminés surpasse celui des équations.

XIV. Soit $A\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} + B = 0$; que l'on fasse $\partial y = z\partial x$, on aura les deux équations $A\partial z + B\partial x = 0$, & $\partial y = z\partial x$; prenant $A''\partial x + B''\partial y + C''\partial z = 0$, équation possible, & supposant qu'en mettant au lieu de ∂y sa valeur, elle ait lieu en même-temps que $A\partial z + B\partial y$, on trouvera que le nombre des conditions est encore du degré n^3; donc, le nombre des équations de condition ne sera pas plus petit en général que celui des coëfficiens.

XV. Des numéros précédens il résulte donc que, soit l'équation $A\partial x + B\partial y = 0$, tout étant rationnel, ses intégrales peuvent être de quatre natures différentes.

Première classe. Elle peut avoir un facteur fini & rationnel, qui

qui la rende une différentielle exacte, & alors elle est toujours intégrable en termes finis.

Seconde classe. Elle peut avoir un facteur irrationnel fini, & alors elle est en général intégrable en termes finis (*Mém. de 1771*); mais il peut y avoir des exceptions, ce qui constitue une troisième classe.

Troisième classe. Celle où le facteur fini contenant un radical, on ne peut avoir l'intégrale en termes finis.

Quatrième classe. Celle où l'on ne peut avoir le facteur en termes finis.

XVI. Il résulte ensuite que soit $A\partial x + B\partial y = 0$, & que A ou B contiennent des radicaux, on aura:

Première classe. L'équation réductible en général, à l'équation rationnelle & finie,

$$A''\partial x + B''\partial y + C''\partial z = 0;$$

ce qui donne les mêmes subdivisions que les intégrales de l'équation rationnelle du numéro précédent.

Seconde classe. Les exceptions à la réduction générale à une forme rationnelle; les intégrales de cette seconde classe ne peuvent être intégrables en termes finis.

Nous aurons donc, 1.° des équations intégrables en termes finis; 2.° des équations réductibles à des quadratures dont l'élément est exprimé en termes finis; 3.° des équations qui ne sont pas même réductibles aux quadratures. J'ai donc des moyens de trouver les premières toutes les fois qu'elles sont possibles.

Je suis entré ci-dessus dans quelques détails sur la manière d'exprimer en séries, & d'avoir d'une manière approchée les deuxièmes que l'on sait construire pour la rectification ou la quadrature des courbes.

Il me reste maintenant à considérer celles de la troisième espèce sous les mêmes points de vue.

XVII. Soit donc une équation $A\partial x + B\partial y = 0$, que je veux réduire en série, & qui n'admet pas un facteur

en termes finis. Je cherche $A'\partial x + B'\partial y$ qui ſoit une différentielle exacte, telle qu'elle donne entre x & y une équation très-peu différente de la propoſée, je ſuppoſe enſuite $A'\partial x + B'\partial y + \partial z = 0$; & $A\partial x + B\partial y = 0$, ayant lieu en même temps, j'élimine y ou x, & j'ai z quantité très-petite, donnée par une équation en z, x, ou en z, y, qu'on peut toujours réſoudre.

Soit encore $A\partial x + B\partial y = 0$, & qu'on ſuppoſe que $A\partial x + B\partial y$ devienne une différentielle exacte étant multipliée par $\frac{P}{Q}$; ſoient P & Q des fonctions indéfinies & A & B du degré m; ſuppoſons enſuite qu'au-delà d'un degré n, les coëfficiens de P & Q deviennent très-petits, en ſorte que l'on puiſſe, ſi on pouſſe P & Q juſqu'au degré $n + n'$ négliger toutes les puiſſances au-deſſus de $n' + 2n + m$ dans l'équation de condition; donc dans ce cas, le nombre des équations de comparaiſon ſera . . . . $\frac{n' + 2n + m . n' + 2n + m + 1}{2}$; & celui des coëfficiens indéterminés ſera $n' + n . n' + n + 1$. Donc le nombre des coëfficiens indéterminés ſurpaſſera toujours celui des équations; donc en général toutes les fois que l'on aura une valeur de $\frac{P}{Q}$ qui rendra à très-peu près $A\partial x + B\partial y$ une différentielle exacte, c'eſt-à-dire une valeur de $\frac{P}{Q}$, telle que $\int \frac{(A\partial x + B\partial y)}{Q}$ donne une équation très-peu différente de la véritable valeur de l'intégrale de la propoſée; on aura par ce moyen des valeurs de cette intégrale de plus en plus approchées.

On pourra encore prendre au lieu de A, $A' + A''$ & $B' + B''$, & on trouvera de même que cherchant $\frac{P}{Q}$ par la condition que $\frac{(A' + A'') P\partial x + (B' + B'') P\partial y}{Q}$ ſoit une

différentielle exacte; on trouvera toujours P & Q, en supposant que A' & B' aient été pris tels que les coëfficiens de A'', B'' soient très-petits & puissent être négligés.

Enfin, en général, soit $A'\partial x + B'\partial y$ une fonction telle que $\int(\frac{P}{Q} A'\partial x + B'\partial y)$ soit une valeur approchée de $\int Z A\partial x + B\partial y$, nous aurons des valeurs toujours plus approchées en prenant.......................

$\frac{\int[P + P'.(A' + A'')\partial x + (B' + B'')\partial y]}{Q + Q'}$, qui doit approcher à l'infini de $\int Z(A\partial x + B\partial y)$.

XVIII. Nous avons donné ci-dessus une manière d'exprimer $\int A\partial x$ en série ordonnée par rapport à la différence de x, regardée comme finie; la même formule ne peut être employée ici, mais il sera aisé de trouver une série semblable par la méthode suivante.

Soit $A\partial x + B\partial y = 0$. Je mets pour x, $a + x'$, & pour y, $b + y'$; j'intègre ensuite par les séries & en ordonnant par rapport à x' & à y'. Cela fait, je restitue au lieu de a & de b, x & y; & au lieu de x', Δx & Δy au lieu de y', & la série qui en résulte sera l'équation en série en x, y, Δx & Δy, dont $A\Delta x$ & $B\Delta y$ sera le premier terme.

Il suit de-là que si l'on veut avoir une expression approchée de la valeur de y en x, donnée par la proposée, & en supposant que l'on connoisse une valeur particulière de y, répondant à une valeur donnée de x, on aura cette valeur approchée toutes les fois que pour aucune des valeurs de x, Δx étant supposé très-petit, Δy ne sera point fort grand. En effet, supposant que A', B' soient ce que devient A & B quand pour x & y on met a & b, que A'', B'' soient ce qu'ils deviennent, lorsque pour x on met $a + \Delta x$; & pour y, $b - \frac{B'}{A'}\Delta x$, A''', B''' ce qu'ils deviennent lorsque pour x on met $a + 2\Delta x$, & pour y, $b - \frac{B'}{A'}\Delta x$

$- \frac{B''}{A''} \Delta x \ldots$ & ainsi de suite; on aura, dis-je,

$$y = b - \left(\frac{B'}{A'} + \frac{B''}{A''} + \frac{B'''}{A'''}, \&c.\right) \Delta x;$$

& faisant $\Delta x = \frac{x}{n}$,

$$y = b - \left(\frac{B'}{A'} + \frac{B''}{A''} + \frac{B'''}{A'''}, \&c.\right) \frac{x}{n}$$

d'une manière d'autant plus approchée que n sera plus grand.

Ainsi pour avoir en général une solution approchée de l'équation $A\partial x + B\partial y = 0$, il faut prendre..... $\partial z = A' (A\partial x + B\partial y)$ tel que $A' (A\partial x + B\partial y) = \partial V + \partial V'$ où ∂V soit une fonction intégrale en termes finis, & $\partial V'$ tel qu'on puisse l'exprimer par les méthodes ci-dessus, ce qui est toujours possible en général, mais peut-être très-difficile à trouver pour chaque cas particulier.

XIX. En appliquant les mêmes raisonnemens aux équations différentielles du second ordre, on trouvera que l'on peut classer leurs intégrales de la manière suivante:

1.ere Deux facteurs finis.

2.e Un seul facteur fini.

3.e Aucun facteur fini.

Divisions de la première Classe.

1.ere Aucune intégrale finie.

2.e Une seule intégrale finie, d'où l'on ne pourra éliminer $\frac{\partial y}{\partial x}$.

3.e Une seule intégrale finie, avec la possibilité d'éliminer $\frac{\partial y}{\partial x}$.

4.e Deux intégrales finies, sans la possibilité d'éliminer $\frac{\partial y}{\partial x}$.

5.e Deux intégrales finies, avec la poſſibilité de l'élimination.

Diviſions de la ſeconde Claſſe.

1.ere Aucune intégrale finie.

2.e Une intégrale finie, ſans poſſibilité d'éliminer $\frac{\partial y}{\partial x}$.

3.e Une intégrale finie avec la poſſibilité d'éliminer.

D'où l'on voit que la cinquième diviſion de la première claſſe eſt la ſeule ſuſceptible d'une intégrale finie :

Que les troiſièmes diviſions des deux premières claſſes ſont les ſeules où l'on ait la propoſée réductible à l'intégration d'une équation $A\partial x + B\partial y = 0$, ou aux quadratures.

Enfin l'on pourroit diſtinguer tous les autres cas en trois, l'un où la propoſée peut ſe rappeler à deux équations finies de la forme $A\partial z + B\partial y + Cdx$, ou à une ſeule finie, ou ne peuvent ſe rappeler à aucune équation finie de cette forme.

On pourra faire la même choſe pour les équations du troiſième ordre.

Je n'entrerai ici dans aucun détail ſur ces objets, ce Mémoire n'étant déjà que fort long; je me ſuis borné ſeulement à montrer par cet expoſé, quel vaſte champ cette ſeule partie du Calcul intégral ouvre aux Analyſtes.

ARTICLE XII.

De l'intégration des fonctions à une ſeule variable dont la différence finie eſt conſtante.

M. Euler a traité de ces fonctions dans ſes Inſtitutions, & particulièrement dans les chapitres I.er & VI de ce Traité.

Des Fonctions rationnelles.

I. Puiſque l'on a l'intégrale de toute fonction rationnelle & entière *(Voyez M. Euler, chapitre I.er)*, toute fonction

rationnelle fractionnaire peut être mise sous la forme . . .
$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + p}{x^m + dx^{m-1} + b'x^{m-2} \ldots + p'}$; or on sait que cette fraction peut être mise sous la forme $\frac{A}{x+q} + \frac{B}{x+r} + \frac{C}{x+s}$, &c. lorsque toutes les racines du dénominateur sont inégales. Cherchant donc à intégrer $\frac{A}{x+q}$, j'ai

$$\Sigma \frac{A}{x+q} = \frac{A}{x+q-\Delta x} - \frac{A}{x+q-2\Delta x} + \frac{A}{x+q-2\Delta x}, \text{\&c.}$$

& ainsi de suite avec un reste $\pm \Sigma \frac{A}{x+q-n\Delta x}$, ou bien j'aurai $\Sigma \frac{A}{x+q} = \frac{A}{x+q} - \frac{A}{x+q+2\Delta x} + \frac{A}{x+q+2\Delta x}$ avec un reste $\pm \Sigma \frac{A}{x+q+n\Delta x}$; donc s'il n'y a point d'autre dénominateur de la forme $x + q \pm n\Delta x$, la fonction proposée ne sera pas intégrable en termes finis; s'il y en a, alors soit le dénominateur le plus grand $x + q + n\Delta x$, & $x + q - n'\Delta x$ le plus petit, l'intégrale ne pourra être que $\frac{A'}{x+q-n'\Delta x} + \frac{B'}{x+q-(n'-1)\Delta x} + \frac{C'}{x+q+(n'-2)\Delta x} \ldots + \frac{P'}{x+q+(n-1)\Delta x}$; la différenciant donc pour comparer avec la proposée $\frac{A}{x+q-n'\Delta x} + \frac{B}{x+q-(n'-1)\Delta x} \ldots + \frac{P}{x+q+n\Delta x}$; j'aurai $A = - A'$. $B = - A' - B'$, $B = B' - C'$. Ainsi il y aura $n + n' + 1$ équations entre ces coëfficiens, & seulement $n + n'$ coëfficiens indéterminés; donc dans ce cas il y aura toujours une condition pour que la proposée soit intégrable en termes finis.

II. En général, dans ce cas, on a l'intégrale égale à une série finie, plus ou moins un terme $\Sigma \frac{P}{x+q+n\Delta x}$ où P est égal à zéro toutes les fois qu'il existe une intégrale en termes finis.

Si l'on a une fonction dont le dénominateur ait des racines égales, alors on le peut suppoſer de la forme $\frac{A}{x+q}$ $+\frac{B}{(x+q)^2}$, &c. & l'on trouvera que

$$\Sigma \frac{B}{(x+q)^2} = \frac{B}{(x+q-\Delta x)^2} - \frac{B}{(x+q-2\Delta x)^2}, \text{ \&c.}$$

& la même concluſion que ci-deſſus. Donc on conclura en général que l'on n'aura une intégrale finie que lorſqu'il n'y aura aucune racine qui n'ait une autre racine ou pluſieurs autres racines différant d'elle d'un multiple de la différence finie, & qu'il faudra de plus autant de conditions entre les coëfficiens du numérateur, qu'il y aura de ſyſtèmes de ces racines tant égales qu'inégales.

On voit aſſez que lorſque ces conditions ſeront remplies, on aura l'intégrale finie, mais la concluſion que l'intégrale finie ſoit impoſſible, lorſque ces conditions manquent, peut paroître moins évidente.

III. Pour le prouver, conſidérons la fonction ſimple $\frac{A}{x+q}$, il eſt aiſé de voir que ſon intégrale ne contiendra ni radicaux ni logarithmes, ni exponentielles; donc elle ſera rationnelle, donc elle ſera de la forme

$$A + Bx + Cx^2, \text{\&c.} + \frac{A'}{x+a} + \frac{B'}{x+b} + \frac{C'}{x+c}, \text{ \&c.}$$

le nombre de ces fonctions étant fini; mais il eſt aiſé de voir qu'augmentant dans cette intégrale hypothétique x de la quantité Δx, & retranchant, elle ſera de la forme

$$G + Hx + \text{\&c.} + \frac{A'}{x+a+\Delta x} - \frac{A'}{x+a}, \text{ \&c.}$$

fonction indéfinie qui ne peut devenir $\frac{1}{x+q}$.

Je n'appelle ici, comme dans le reſte de ce Mémoire, fonctions en termes finis, que les fonctions algébriques, logarithmiques & exponentielles; parce que ce ſont les ſeules fonctions analytiques qui puiſſent être produites par les opé-

rations d'addition, de multiplication & d'élévation aux puissances.

De ce qu'une fonction ne sauroit être donnée en termes finis, il ne s'ensuit pas qu'elle ne puisse être l'objet des recherches analytiques; elles peuvent même avoir trois objets principaux, l'un de réduire ces fonctions en séries, l'autre d'en tirer des valeurs finies approchées; le dernier enfin, de les réduire à de certaines classes de fonctions, en sorte qu'une de ces fonctions étant supposée connue, elle donne toutes les autres.

Manière de réduire en série la fonction $\Sigma \frac{A}{x+q}$.

IV. M. Euler a donné une méthode de réduire ces fonctions en série; par ce moyen, on a

$$\Sigma \frac{1}{x+q} = lx+q + \frac{1}{2}\frac{1}{x+q} - \frac{a}{1.2.\overline{x+q}^2} + \frac{2b}{1.2.3.(x+q)^3}, \&c.$$

En effet, soit X la fonction donnée de x, & z l'intégrale cherchée, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\Delta x^3, \&c. = X;$$

donc,

$$dz = \frac{X\partial x}{\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\partial\partial z}{\partial x}\Delta x - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2}\Delta x^2, \&c.$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\partial z}{\partial x}\Delta x = X - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2}\Delta x^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 z}{\partial x^3}\Delta x^3$$

$$\partial z = \frac{X\partial x}{\Delta x} - \frac{1}{2}X + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x^2}\Delta x^2 \ldots;$$

& ainsi de suite.

On auroit encore eu de même, en employant le même théorème de M. d'Alembert,

$$X = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\partial y}{2\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial\partial\partial y}{6\partial x^3}\Delta x^3, \&c.$$

donc, faisant $\frac{\partial y}{\partial x} = z$, on aura

$$X = \Delta x z + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\frac{\Delta x^3}{6}, \&c.$$

&

& intégrant, on aura

$$a'z + b' \frac{\partial z}{\partial x} + c' \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = \frac{\int ef^x X \partial x}{ef^x},$$

& autant d'intégrales ſemblables que l'équation

$f + \frac{\Delta x}{2} f^2 + \frac{\Delta x^2}{6} f^3$, &c. a de racines, & c'eſt de-là qu'il faut tirer la valeur de z, & enſuite de y. Or, on a $\int ef^x X dx = ef^x \frac{X}{f} - \int \frac{ef^x \partial X}{f} = P \frac{ef^x}{f^2}$ $\frac{\partial X}{\partial x} \partial x - \int ef^x \frac{\partial X}{f^2 \partial x^2} \partial x$, &c.

Enfin on aura, par le commencement de cet article,

$$\Sigma \frac{1}{x+q} = -\frac{1}{x+q} + \frac{1}{x+q+\Delta x} - \frac{1}{x+q+2\Delta x} + \frac{1}{x+q+3\Delta x}, \text{\&c.}$$

& ainſi de ſuite à l'infini.

Méthode d'approximation.

V. Si Δx eſt une quantité très-petite dont on puiſſe négliger une certaine puiſſance, on aura z en réſolvant l'équation

$$X = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} \Delta x^2 \ldots \frac{1}{1.2.3.m} \frac{\partial^m z}{\partial x^m} \Delta x^m,$$

ou plutôt on prendra la ſérie de M. Euler, en négligeant la puiſſance au-deſſus de Δx^m.

Si Δx eſt une quantité finie ou très-grande, alors dans notre hypothèſe $\frac{1}{x+q+m\Delta x}$ devient auſſi petit qu'on veut, & peut être négligé.

Si $\frac{\Delta x}{x+q}$ eſt une petite quantité, les mêmes ſéries donneront une valeur approchée.

Des fonctions irrationnelles.

VI. Soit une fonction irrationnelle donnée, il eſt aiſé de voir que ſi elle eſt ſuſceptible d'une intégrale finie, cette

différentielle sera de la forme $A' + B'z' + C'z'^2 \ldots + P'z'^{m-1} - A - Bz - Cz^2 \ldots - Pz^{m-1}$, où A', B', C', &c. sont ce que deviennent les fonctions rationnelles A, B, C, lorsque pour x on y a mis $x + \Delta x$, & où z' est ce que devient z après la même substitution, z étant donnée par une équation du degré m. Maintenant la différentielle proposée étant donnée par une équation du degré n, & la forme ci-dessus produisant une équation du degré $2m$, il faudroit d'abord que $n = 2m$, & ensuite quand cela auroit lieu, que les coëfficiens fussent les mêmes. Or cette hypothèse donne un plus grand nombre d'équations que la forme hypothétique de l'intégrale ne fournit de coëfficiens indéterminés; d'où il est clair que l'intégrale ne peut être supposée finie en général, pas même en laissant un terme rationnel indéfini à intégrer.

VII. Si maintenant on cherche à la réduire en série, on l'aura en employant les deux mêmes manières que ci-dessus. Nous aurons donc deux formes d'intégrales en série, la première, celle de M. Euler, qui, si l'on cherche une valeur approchée, en donnera toujours une, si x est très-grand. En effet, dans ∂X on peut toujours prendre n tel que la plus haute puissance de x soit négative; ensuite nous aurons la seconde série, que nous pouvons mettre ici sous la forme X, étant la différence $- X + X' - X'' + X'''$, &c. où X', X'', X''', &c. sont ce que devient X en y mettant $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, &c. série qui sera convergente lorsque x est très-petit, $n\Delta x$ fort grand, & que le dénominateur des fonctions X', X'', &c. contiendra une puissance de Δx plus grande que le numérateur. Enfin, si nous examinons la série $X = \Delta x z + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x^2}{2}$, &c. nous aurons en général pour $\int e^{fx} X \partial x$, une fonction finie algébrique $e^{fx} A$, plus une fonction rationnelle en x, qui ne contiendra pas d'irrationnelle, & par conséquent, comme on peut trouver cette fonction finie, f étant quelconque, nous

aurons z égal à une fonction en série de fonctions finies de x multipliées par des coëfficiens qui sont toujours les mêmes, plus des fonctions $\frac{\int e f^x Z \partial x}{e f^x}$, Z étant rationnel.

VIII. Puisqu'en général nous avons, x étant très-grand, une série convergente, nous aurons y en général, lorsque nous aurons $\Delta y = X$. En effet, soit cherchée la valeur de y, lorsque $x = a$, quel que soit a; je suppose que $a + \Delta x$ soit une valeur de x, où x est très-grand. Cela posé, soit B la valeur approchée pour le cas où $x = b$; j'aurai la valeur approchée pour le cas où $x = a$, égale à B, moins ce que devient X, lorsque $x = b - \Delta x$, moins ce que devient X lorsque $x = b - 2\Delta x$, &c. Et enfin moins ce que devient X lorsque $x = a$. Si donc je veux construire l'équation $\Delta y = X$, je prends l'équation approchée $u = Z$ pendant un espace quelconque Δx, & je construis cette équation; je construis ensuite l'équation $Z = X$, & j'ai la valeur de y pour chaque valeur de x, en prenant la valeur correspondante de u dans l'équation $u = Z$, moins les valeurs de z correspondantes à $x = a$, $x = a + \Delta x$, $x = a + 2\Delta x \ldots\ldots$ jusqu'à la dernière. L'équation intégrale $u = Z$ contient ici; 1.° une fonction logarithmique dans bien des cas; 2.° une fonction de $e f^x$, f étant tel que $e^{f \Delta x} = 1$. Cette seconde fonction est arbitraire; donc, si nous voulons que lorsque $x = Q$, & par conséquent $u = P$, nous ayons $y = c$, cela déterminera la fonction de $e f^x$ pour ce point, & par conséquent pour tous ceux où x ne différera de a que de $n' \Delta x$, & tous les points intermédiaires resteront indéterminés, mais assujettis à la loi que la fonction de $e f^x$ ne change point de valeurs lorsque x devient $x + \Delta x$; ce qui est conforme à ce qui a lieu lorsqu'on a la vraie valeur de y en x. Quant à la fonction logarithmique, il est aisé de voir qu'elle ne doit pas se trouver dans la proposée, lorsqu'elle est intégrable en termes finis; & qu'ainsi elle indique ici une forme fausse: mais 1.° comme

lorſque les quantités ſous ce ſigne ſont réelles, la fonction logarithmique n'a qu'une valeur réelle, & que lorſque ces quantités ſont imaginaires, & que la fonction logarithmique devient un angle, le nombre infini des valeurs réelles ſe confond avec l'arbitraire, on peut regarder cette forme comme vraie. En effet, on aura toujours, par la conſtruction ci-deſſus, tous les points déterminés pour toute la ſérie des points différens de la quantité Δx, & le reſte indéterminé; & ſi l'on a la fonction en ef^x déterminée d'ailleurs, alors la valeur de l'arc qu'il faudra prendre ſe déterminera avec la conſtante, comme dans les équations aux différences ordinaires; & ſi x étoit un ſinus ou coſinus, il faudroit ſeulement obſerver qu'ici l'arc doit revenir le même, lorſque ſon ſinus redevient le même.

ARTICLE XIII.

Sur les Séries récurrentes.

Je me propoſe de donner dans cet article un moyen, lorſqu'une quantité quelconque eſt donnée par une équation, de ſavoir s'il n'y a point une valeur de cette quantité égale à une ſérie récurrente; c'eſt-à-dire ſi elle n'eſt pas ſuſceptible d'avoir une valeur algébrique & rationnelle.

On voit aſſez, par tout ce qui a été dit ci-deſſus, combien cette recherche peut être utile. En effet, puiſqu'on connoît les formes dont eſt ſuſceptible l'intégrale d'une équation différentielle, on pourra parvenir par la méthode de cet article, à diſtinguer pour chaque équation donnée, ſi elle eſt ſuſceptible ou non d'une intégrale finie; & comme on ſait trouver (*Mémoires de 1770, & tome IV des Mém. de Turin*) cette intégrale toutes les fois qu'elle eſt poſſible; on voit que l'on aura tout ce qu'on pourroit deſirer ſur la théorie de celles de ces équations qui ſont ſuſceptibles d'avoir des intégrales finies.

I. Si la ſérie récurrente, rationnelle & algébrique n'a qu'une variable x, & qu'elle ſoit de la forme

$$a + bx + cx^2 \ldots + (n-1)\, x^{n-1} + (n)\, x^n \ldots$$

Il eſt aiſé de voir que l'on aura

$$(n) + a' (n - 1) + b' (n - 2) \ldots .$$

Ce nombre de termes étant déterminé; donc, ſi on regarde (n) comme une variable, & n comme la quantité dont elle eſt fonction, on aura $(n) + a'' \Delta (n) + b'' \Delta^2 (n) \ldots$ $\Delta''' (n) = 0$, $\Delta n = 1$; faiſant donc $(n) = e^{fn}$, on aura $1 + \frac{a'}{ef} + \frac{b'}{e^2 f} + \frac{c'}{e^3 f} + \frac{d'}{e^4 f}$, &c. $= 0$, ou $e^{mf} + a' e^{(m-1)f} + b' e^{(m-2)f}$, &c. & tirant de cette équation les valeurs de e^f, & par conſéquent de f, que j'appelle f, f', f'', f''', &c. on aura $(n) = A e^{fn}$ $+ B e^{f'n} + C e^{f''n} \ldots$ Si f a deux valeurs égales, alors, au lieu de la forme précédente, il faut prendre (n) $= A e^{fn} + B n e^{fn} + C e^{fn} \ldots$ & ainſi de ſuite. A, B, C, &c. ſont des fonctions de e^{an}, telle que $e^a = 1$.

II. Si donc on a une ſérie en x récurrente, ſans ſavoir ſi elle eſt algébrique ou rationnelle, mais que ſeulement on ait ſon terme général par une équation dépendante d'un nombre fini & déterminé de termes précédens, & de fonction finies & déterminées de l'expoſant n du terme général, & qu'on demande ſi on peut ſavoir quand elle peut être algébrique & rationnelle, & quand elle ne le peut pas être, j'obſerve d'abord que toutes les fois qu'une équation eſt linéaire, quel que ſoit l'ordre de cette équation, on peut toujours ſuppoſer ſa racine égale à la ſomme de toutes les valeurs particulières qu'on lui a trouvées; ainſi il s'agit de trouver une valeur particulière pour connoître une forme indéfinie, mais générale de l'inconnue: il eſt donc aiſé de voir que ſi on fait dans l'équation du terme général

$$(n - 1) = (n) - \Delta (n). \ (n - 2) = (n) - 2 \Delta (n) - \Delta\Delta (n),$$

& qu'on mette pour (n), $e f^n$; on aura, ſi $e f^n$ réſout l'équation, la ſérie égale, au moins dans un cas particulier, à une ſérie récurrente, rationnelle & algébrique, & le nombre des

valeurs égales ou inégales de f, conduira à trouver la fonction rationnelle qui dans ce cas eſt la valeur de la ſérie.

III. Mais de ce que $e^{fn} = (n)$ ne réſout pas l'équation, doit-on en conclure que la propoſée n'a point de valeur rationnelle ou algébrique? En effet, on peut objecter que d'abord que $(n) = n^m + bn^{m-1} \ldots + p$ eſt une valeur qui convient à une ſérie rationnelle & algébrique, cependant $(n) = e^{fn}$ ne réſout pas cette équation; mais on voit auſſi que dans l'exemple propoſé, & dans tous ceux de cette eſpèce, la valeur de (n) n'eſt qu'un cas particulier de la valeur générale, & dans l'exemple choiſi, cette valeur eſt $Ae^{fn}(n^m + bn^{m-1} \ldots)$, où tous les coëfficiens ſont arbitraires, & on trouveroit $f = l1$, $e^f = 1$, & m racines égales. Ainſi, pour conclure de ce que la ſuppoſition de $(n) = e^{fn}$ ne réſout pas l'équation du terme général, & que ſa ſérie ne peut être algébrique rationnelle, il faut que l'équation du terme général ait toute la généralité poſſible. Cette généralité conſiſte à ce que les coëfficiens de la première forme générale donnée ci-deſſus ſoient reſtés arbitraires. La raiſon en eſt que dans ce cas où $(n) = Ae^{fn} + Bne^{fn}$, &c. la ſuppoſition de $(n) = Ae^{fn}$ ſeulement ne réſout l'équation que parce que je puis faire les B, &c. égaux à zéro, puiſqu'ils ſont arbitraires; autrement il faut que ces termes entrent dans la valeur de (n). Ainſi, toutes les fois que l'équation qui donne y en x, ſera telle que le terme géneral de la ſérie qui y convient, ait (dans le cas où la ſérie eſt algébrique & rationnelle) les coëfficiens des e^{fn} arbitraires, on trouvera la loi de cette ſérie rationnelle par la ſubſtitution de Ae'^{fn} au lieu de (n) dans le terme général.

IV. Conſidérons donc différentes formes d'équations en y, & d'abord les équations linéaires.

D'abord l'équation linéaire en y, $Ay + B = 0$, eſt dans ce cas.

2.° L'équation linéaire $Ay + B\partial y + C = 0$, eſt encore dans le même cas. En effet, ſoit X une fonction

algébrique & rationnelle qui eſt égale à y en donnant à l'arbitraire une certaine valeur, & X' ſa valeur générale, il eſt clair que la propoſée pourra être ſuppoſée de la forme

$$A'(y - X') + B'(\partial y - \partial X') = 0,$$

où A' & B' ſont des quantités qui ne deviennent pas infinies en faiſant $y - X' = 0$; faiſant donc $X' = X + P$, P étant une quantité qui devient zéro par la détermination des arbitraires qui rend la valeur de y rationnelle & entière, & ſoit $X = \frac{R}{Q}$; la propoſée devient de la forme

$$A''.(Qy - R - PQ) + B''(\partial . Qy - R - PQ).$$

Cela poſé, ſi dans la propoſée on met au lieu de y une ſérie dont on ſuppoſe le terme général exprimé en n; il eſt clair que ces arbitraires étant telles qu'elles répondent à $P = 0$; cette ſérie, quant à cette valeur particulière, ſera déterminée par l'équation $A''(Qy - R) + B''\partial.(Qy - R)$. Or les arbitraires du terme général ne peuvent être déterminées qu'autant que les coëfficiens de R entreroient dans l'équation de ce terme, & il eſt aiſé de voir qu'ici on peut ſuppoſer qu'ils n'y entrent point; donc toutes les fois que y eſt donné par une telle équation, & que Ae^{fn} ne réſout pas l'équation du terme général, y ne peut être une ſérie algébrique & rationnelle.

Si la quantité y eſt donnée par une équation linéaire d'un autre ordre, on ſuppoſera également que la propoſée eſt de la forme $A''.(Qy - R - PQ) + B.\partial.(Qy - R - PQ) + C''\partial^2.(Qy - R - PQ) + D''.\partial^3(Qy - R - PQ)$ &c. $= 0$, & que y rationnel répond à $PQ = 0$; donc l'équation de ces termes en général ne dépend point de la valeur des coëfficiens de R; d'où on peut conclure que toutes les fois que cette ſérie eſt poſſible, $(n) = Ae^{fn}$ réſout l'équation du terme général.

V. Soit par exemple l'équation

$$\partial y + 2x\partial y + x^2\partial y - (2 + x + y + 2xy + x^2y)\partial x = 0,$$

& qu'on cherche si y peut avoir une valeur algébrique & rationnelle, nous aurons pour (n) l'équation

$$n + 1\,(n+1) + 2n\,(n) + n - 1\,(n-1)$$
$$- (n) - 2\,(n-1) - (n-2);$$

faisant $(n) = A e^{fn}$, nous trouverons les deux équations

$$ne^{f} + 2n + ne^{-f} = 0,$$

&

$$e^{f} - 1 - 3e^{-f} - e^{-2f};$$

or l'équation $e^{f} = -1$ satisfait à ces deux équations; donc la valeur de y peut être une fonction dont le dénominateur soit $1 + x$; faisant donc $y = \frac{a + bx + cx^2 \ldots}{1 + x}$, on trouvera $a = -1$, les autres coëfficiens zéro; & $y = \frac{1}{1+x}$ sera la valeur algébrique & rationnelle de y tirée de la proposée. En effet, l'intégrale générale est. . . . $y + \frac{1}{1+x} + Ae^{x} = 0$; dont on tire une valeur rationnelle & algébrique de y pour les cas où l'arbitraire A est supposée nulle.

VI. Soit l'équation

$$\partial y . a + bx + cx^2 + ex^3 \ldots\ldots = A',$$

A' est une fonction entière, & que je cherche dans quels cas y doit être algébrique; en suivant la méthode ci-dessus, j'ai

$$n.(n)\,a + n - 1.(n-1)\,b. + n - 2.$$
$$(n-2)\,c + n - 3.(n-3)\,e \ldots = 0,$$
$$na + n - 1.\frac{b}{f} + n - 2\,\frac{c}{e^2 f} + n - 3\,\frac{e}{e^3 f} \ldots = 0.$$

Donc $a + \frac{b}{ef} + \frac{c}{e^2 f} + \frac{e}{e3f} \ldots\ldots\ldots = 0.$

& $b + \frac{2}{e^2 f} + \frac{3}{e^3 f} = 0,$

Donc ef doit être tel que sa valeur rende égale à zéro la

différence

différence de l'équation qui donne $\frac{1}{e^f}$; donc l'équation en $\frac{1}{e^f}$ ne doit avoir que des racines égales entr'elles; sans cela elle donneroit des valeurs de e^f qui ne pourroient satisfaire; donc, les valeurs de x, qui sont les mêmes que celles de e^f, doivent être telles que chacune en ait d'autres qui lui soient égales; donc, *si divisor, sit aliquis cui nullus alius sit æqualis, curva quadrari nequit;* règle, comme on sait, établie par Newton, & dont on a, par cette méthode, la démonstration directe. Mais cela peut ne pas suffire, & il faut encore dans ce cas voir si la détermination des premiers termes de la série n'implique pas contradiction. Par exemple, soit ici

$a + bx + cx^2 \ldots = 1 + 2x + x^2$, & $A = -(1 + x)$,

j'aurai pour déterminer les premiers coëfficiens de la série

$$a' \times 1 + 2x + x^2 \times 1 - 2x + 3x^2, \text{ \&c.}$$
$$= -(1 + x) + (A + Bx + Cx^2 \ldots) 1 + 2x + x^2,$$

La série en A, B, C, &c. étant finie; donc $a' = 1 - A$, à cause du coëfficient du premier terme; mais à quelque terme que l'on s'arrête, on verra qu'il faudroit que A, B, C, &c. fussent tous zéro, & dans ce cas on trouve à cause du second terme $-x$ qui reste seul dans le deuxième membre $0 = -1$, résultat absurde. Ainsi l'on voit que dans ce cas, après avoir trouvé que $e^{fn} = (n)$ résout l'équation du terme général, il faut encore s'assurer si la série récurrente qui en est née, & qui est une valeur de y est telle que ses premiers termes puissent être déterminés d'une manière convenable.

VII. Des exemples donnés ci-dessus, il résulte que si j'ai y donné en x par une équation linéaire d'un ordre quelconque, & que je cherche si y peut avoir une valeur rationnelle algébrique, il faut 1.° supposer à y une valeur en série infinie; 2.° faire, dans le terme général qui est donné par une équation finie en (n), $(n - 1)$, &c. & n, $(n) = A e^{fn}$, de déterminer e^f, de voir si

$$(n) = A'' n e^{fn}, \; (n) = A'' n^2 e^{fn} \ldots\ldots\ \text{\&c.}$$

& de même pour chaque valeur de e^f, ne ſont pas auſſi des ſolutions de l'équation du terme général; cela trouvé, on aura le dénominateur de la valeur de y. Pour avoir le numérateur, ſoit Q le dénominateur, on fera $y = \frac{P}{Q}$, & on mettra pour P une ſérie qui (hypothèſe) doit être finie. Soit donc px^m le dernier terme, on aura $p : a + bm + cm^2$, &c. $= 0$; donc, pour que la ſérie ſoit il faudra avoir $0 = a + bm + cm^2 \ldots\ldots m$ étant un entier; ainſi la queſtion ſera facile à réſoudre, & le numérateur aiſé à trouver toutes les fois qu'il ſera poſſible.

VIII. Si nous paſſons maintenant aux équations à plus de deux variables, & que nous cherchions, ſi ayant par exemple Z en x & y, Z eſt ſuſceptible d'une valeur rationnelle & algébrique; imaginons d'abord que nous avons $Z = a + bx + cx^2 + ex^3$, &c. & que a, b, c, &c. étant des fonctions de y, la ſérie eſt récurrente; comme ſi cela a lieu $\frac{\partial Z}{\partial y}$ a auſſi pour valeur la même ſérie récurrente, & ſuivant la même loi, nous chercherons ſi Z peut être fonction rationnelle & algébrique, par rapport à x; cela trouvé, nous chercherons l'expreſſion en y des coëfficiens du dénominateur ordonné par rapport à x, & nous verrons ſi ces coëfficiens peuvent être des fonctions algébriques.

IX. Soit, par exemple, l'équation $\partial x + (2 + x + y) \partial y = 0$, & que je cherche ſi cette équation a un facteur rationnel algébrique, j'aurai pour équation de condition

$$(2 + x + y) \frac{\partial F}{\partial x} + F - \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

en ſuppoſant que F ſoit une ſérie récurrente en x, & je ſubſtitue Ae^{f^m} pour le coëfficient de x^m, j'ai $A[2(m+1) \cdot e^{f^{m+1}} + (m+1) ye^{f^{m+1}} + me^{f^m} + e^{f^m} - me^{f^m} \partial f] - e^{f^m} \partial A = 0$; ce qui donne, en diviſant

par e^{fm}, $A(2e^f + ye^f + 1) - \frac{\partial A}{\partial y} = 0$, & mA $(2e^f + e^f y + 1 - \frac{\partial f}{\partial y}) = 0$; or, on voit que $e^f = -\frac{1}{1+y}$, ſatisfait à la ſeconde équation, & cette même valeur donne pour la première, $\frac{\partial A}{A\partial y} = -\frac{1}{1+y}$; donc $lA = -l1+y$, ou $A = \frac{N}{1+y}$, où N eſt une conſtante arbitraire.

On trouvera donc par ce moyen que le facteur F pourra être $\frac{N\frac{1}{1+y}}{1+\frac{1}{1+y}x} = \frac{N}{1+x+y}$, ce qui eſt conforme à la vérité.

Cette méthode pourra paroître trop embarraſſante & trop longue, & nous allons en chercher une autre plus ſimple.

X. Si nous conſidérons la valeur rationnelle de $y = a + bx + cx^2 + \partial x^3 \ldots\ldots\ldots$ lorſque la ſérie eſt récurrente $\frac{A}{1+dx} + \frac{B}{(1+dx)^2}$, &c. $+ \frac{C}{1+b'x} + \frac{D}{(1+b'x)^2}$, &c. $+ A' + B'x + C'x^2$, &c. dont le nombre eſt fini, il eſt clair que nous aurons le coëfficient de x^n, dans la ſérie, égal à $Ae^{l-dn} + B.$ $(n+1)e^{l-an} + C.n+2.n+1e^{l-an}$, & ainſi de ſuite pour les autres termes.

Conſidérons maintenant la valeur de $\frac{\partial y}{\partial z}$, il eſt clair que ſa valeur en ſérie ſera telle que le terme général ſoit $-Ae^{l-dn}.(n+1)e^{l-a'} + Bn+1.n+2e^{l-dn}.e^{l-a'}$, &c. & ainſi de ſuite. Mais ſi nous cherchons la valeur de y^2,

nous trouverons, 1.° qu'au terme

$$P.n + 1.n + 2.n + 3 \ldots n + me^{(l - a)n}$$

répond un terme

$$An + 1.n + 2.n + 3 \ldots n + 2me^{l - an}.$$

2.° Qu'il y répondra des termes inférieurs multipliés par des coëfficiens arbitraires, si dans la valeur de y il y a des termes inférieurs, ou que tous les coëfficiens A', B', &c. ne soient pas zéro; mais s'il n'y en a point, qu'il n'y répondra que des termes dont les coëfficiens seront donnés.

XI. On voit de-là que l'on ne pourra point en général supposer que l'on ait le terme général de $y = Ae^{fn}$, si celui de $y^2 = Ane^{fn} + Be^{fn}$, & ainsi de suite; mais soit m le degré d'un terme en y & ses différences, en mesurant le degré de ces différences par celui de leur dénominateur, si au lieu de y on y mettoit $\frac{1}{z}$, il faudra voir si on n'a point pour y un terme

$$An + 1.n + 2.n + 3 \ldots n + pe^{fn},$$

& pour le terme du degré m,

$$An + 1.n + 2.n + 3 \ldots n + p + m'e^{fn} \times e^{m'f}.$$

si m' est la somme des ordres des différences dans ce terme; ou plus simplement on supposera le terme général

$$An^p e^{fn} + Bn^{p-1} e^{fn} + Cn^{p-2} e^{fn}, \text{ \&c.}$$

où A doit rester arbitraire, & les autres être déterminés en A; ce qui donne un moyen d'avoir y toutes les fois qu'on en aura une valeur égale à une série récurrente.

XII. *Exemple.* Soit

$$(1 + x)y^2 + (2 + x)y + 1 = 0,$$

& qu'on cherche si on a y égal à une série récurrente, je suppose que y soit égal à une série où $An^m e^{fn}$ soit un des termes qui composent le terme général, & j'ai $An^{2m} e^{fn}$ $+ An^{2m} e^{fn-1} = 0$; donc $1 + ef = 0$; donc

$1 + x$ eſt un des dénominateurs de y, & eſt le ſeul dénominateur; donc $y = \frac{A}{1+x^m}$, m étant un nombre entier & $1 + xA^2 + (1+x)^m \cdot (2+x) A + (1+x)^{2m} = 0$, où A doit être entier, équation à laquelle $A = -(1+x)^{m-1}$ ſatisfait comme il eſt aiſé de le voir.

Il en ſera de même de tous les exemples qu'on voudra choiſir.

XIII. Maintenant, ſi on applique cette théorie aux fonctions de pluſieurs variables, c'eſt-à-dire, ſi on cherche les cas où Z eſt fonction rationnelle algébrique de x, y, z, &c. on obſervera d'abord, que ſoit une ſérie des variables x, y, z, & qui ait pour ſomme une fonction rationnelle ..... $\frac{a + bx + cy + ez, \&c.}{d + b'x + c'y + e'z, \&c.}$; ſi l'on multiplie cette ſérie par le dénominateur, il eſt clair que l'on aura le terme général par une équation $A\ (nmp) + B\ (m, p, m - 1) + C\ (n, m, p - 1) + D\ (m, p, n - 1)$ &c; (nmp) déſignant le coëfficient de $x^n y^m z^p$ dans la ſérie. Donc, ſi on regarde (m, n, p) comme une fonction de m, n & p, & par conſéquent $(m - 1\, p, n)$ comme $(nmp) - \Delta (m,n,p)$; $(m, p, n - 1)$ comme $(m, n, p) - \Delta' (m, n, p)$; $(mnp - 1)\ (n, m, p) - \Delta'' (n, m, p)$, &c. où $\Delta, \Delta', \Delta''$ déſignent des différences finies partielles, on aura (n, m, p) donné par une équation linéaire & partielle aux différences finies. Ainſi, d'après la nature des équations linéaires, mettant dans la propoſée au lieu de $(m\, n\, p)$, $e^{an + bm + cp}$; on aura une quantité diviſible par $e^{an + bm + cp}$, qui ne contiendra ni n, ni m, ni p, mais ſeulement e^a, e^b, e^c, & des coëfficiens donnés; or $(mnp) = Ae^{an + bm + cp}$ réſolvera l'équation du terme, tant que cette équation en e^a, e^b, e^c, aura lieu: ainſi prenant b & c à volonté, & e^a fonction de e^b & e^c,

on aura pour chaque valeur de b & c un nombre donné de valeurs de a, qui ajoutées enſemble & multipliées par des arbitraires, donneront ſous une forme infinie la valeur complète de (n, m, p): les coëfficiens ſeront alors des fonctions arbitraires de $e^{a'n + b'm + c'p}$, a', b', c', étant tels que $e^{a'} = 1$, $e^{b'} = 1$, $e^{c'} = 1$.

Cela poſé, ſi dans une équation dont le terme général eſt donné par une équation quelconque, on fait $(m\,n\,p) = e^{am + bn + cp}$, & qu'on ait

$$1 + \frac{A'}{e^a} + \frac{B'}{e^b} + \frac{C'}{e^c} + \frac{A''}{e^{a+b}} + \frac{B''}{e^{a+c}} + \frac{C''}{e^{b+c}} + \frac{D''}{e^{2a}} + \frac{E''}{e^{2b}} + \frac{F''}{e^{2c}} + \frac{A'''}{e^{a+b+c}} \text{ \&c.} = 0,$$ on aura l'équation du terme général

$$(n) + A\,(n - 1\,l, m\,l, p) + B\,(n\,l, m - 1\,l, n) + C\,(p - 1\,l, m, n) \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

& le dénominateur ſera

$$1 + A'x + B'y + C'z, \text{ \&c.}$$

On connoîtra donc le dénominateur toutes les fois qu'on aura l'équation en e^a, e^b, e^c.

XIV. Maintenant il ſe rencontre deux différences principales entre ces deux eſpèces d'équations, l'une que je ne puis immédiatement mettre la valeur $Ae^{an + bm + cp}$ dans l'équation du terme général, quand même cette équation eſt finie, à moins que ce terme ne ſoit de la forme du *numéro précédent;* or, c'eſt ce qui n'arrive point, comme il eſt aiſé de le voir lorſque l'équation en Z contient des différences de Z. La ſeconde, c'eſt que ſi $Ae^{an + bm + cp}$ eſt un des termes de l'expreſſion du terme général pour Z, c'eſt pour ∂Z, $Ae^{an + bm + cp}$ $a'm + b'nn + c'p + e'$ qu'il faut prendre, a', b', c', e', ſont des indéterminées; ce qui vient de ce que l'on ne peut pas diviſer la fonction rationnelle en

termes $\frac{A}{s}$, A étant conſtant. D'après ces deux obſervations il ſera facile d'appliquer à ces formules la méthode des *n.^os^* *X* & *XI.* Soit, par exemple, l'équation différentielle $\partial x + (2 + x + y)(\partial y)$, & que je cherche ſi elle a un facteur A rationnel, j'ai pour l'équation de condition

$$\frac{\partial A}{\partial x}(2 + x + y) - \frac{\partial A}{\partial y} + A = 0;$$

donc, faiſant le terme général égal à e^{am+bn}, celui de $\frac{\partial A}{\partial x}$ égal par conſéquent à $e^{am+bn}.cn + gm + f$, & celui de $\frac{\partial A}{\partial y}$ à $e^{am+bn}.c'n + g'm + f'$, j'aurai l'équation $e^{am+bn} - e^{am+bn}c'n + g'm + f'$ $+ 2e^{am+bn}.cn + gm + f + \frac{e^{am+bn}}{e^a}cn + gm + f$ $+ \frac{e^{am+bn}}{e^b}cn + gm + f - \frac{e^{am+bn}}{e^a}g - \frac{e^{am+bn}}{e^b}c = 0$, équation à laquelle je puis ſatisfaire, en prenant $1 + \frac{1}{e^a}$ $+ \frac{1}{e^b} = 0$; & faiſant $c, g, f; c', g', f'$ égaux à -1; donc A ſera $\frac{1}{1+x+y}$.

XVI. Soit l'équation

$$\partial x.\ M + Mx + (M-2)y$$
$$= \partial y.(M-2) + (M-2)x + My,$$

où M eſt un coëfficient conſtant. Si je lui ſuppoſe un facteur A, j'aurai l'équation

$$(M-2)A + [M + Mx + (M-2y)]\frac{\partial A}{\partial y}$$
$$+ (M-2)A + [(M-2) + (M-2x) + My]\frac{\partial A}{\partial x} = 0;$$

& après la ſubſtitution faite comme ci-deſſus, l'équation

$$(M-2).e^{an+bm} + M.e^{an+bm}(cn + gm + f)$$

$+ \frac{M e^{an+bn}}{e^a} . cn + gm + f + (M - 2) \frac{e^{an+bm}}{e^b}$
$cn + gm + f - M \frac{e^{an+bm}}{e^a} c - (M - 2) \frac{e^{an+bm}}{e^b}$
$g + M - 2 . e^{an+bn} + M - 2 . e^{an+bm} .$
$c'n + g'm + f' + (M - 2) \frac{e^{an+bm}}{e^a} c'n + g'm + f'.$
$+ M \frac{e^{an+bm}}{e^b} c'n + g'm + f - (M - 2)$
$\frac{e^{an+bm}}{e^a} c - M e^{an+bm} g' = 0$. Or, les deux équations

$$1 + \frac{1}{e^a} + \frac{1}{e^b} = 0 \ \& \ 1 + \frac{1}{e^a} - \frac{1}{e^b}$$

ſatisfont également à cette équation; donc, il faudra ſuppoſer
$A = \frac{R}{1 + x + y . x + x - y}$, & on trouve ici R conſtant
& l'intégrale
$l\, 1 + x + y + Ml\, 1 + x - y + N = 0.$

XVII. Si nous appliquons cette théorie aux équations aux différences finies, nous trouverons que ſoit Z une fonction de x, il n'y a qu'à chercher ce que devient z lorſque $x = x + b$; appelant cette fonction Z', il eſt facile de voir que ſi Z eſt de la forme $\frac{P}{Q}$, $Z' = \frac{P'}{Q'}$, & par conſéquent ſi faiſant dans l'équation $ZQ = A$, Z égal à une ſérie, égalant à zéro le coefficient général, & faiſant $(n) = cf^n$, j'ai une équation en c^f qui ſoit $A + \frac{B}{cf} + \frac{C}{cf^2}$, &c. $A + Bx + Cx^2 \ldots$ ſera la valeur du dénominateur Q; d'où je tire, en le faiſant égal à zéro, & prenant a valeur de x, $c^f = \frac{1}{a}$ & $c^{l \frac{1}{a} n}$, terme à ſubſtituer dans l'équation du terme général.

Soit

Soit maintenant Q' ce que devient Q' en y, mettant $x + b$ au lieu de x, il eſt clair que ſi e^{fn} eſt ſubſtitué dans l'équation du terme général, pour $Q'Z' = P'$, j'aurai

$$A' + \frac{B'}{ef'} + \frac{C'}{ef'^2} = 0,$$

& $A' + B'x + C'x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = Q'$; donc, faiſant $Q' = 0$ & a' la racine correſpondante à la racine a de $Q = 0$, j'aurai $e^{(l\frac{1}{a'})n}$ pour la quantité à ſubſtituer dans l'équation du terme général; or $a' = a - b$; donc le terme à ſubſtituer ſera $e^{l\frac{1}{a-b}n}$. Par exemple, ſoit l'équation $Z'(1 + x) - Z(1 + x) = A$, j'aurai, pour équation du terme général............

$1 + \frac{1}{ef'} - 1 - \frac{1}{ef} = 0$; ce qui donne $e^{f'} - e^f$ ou b, c'eſt-à-dire, la différence finie égale à zéro; ce qui implique contradiction. Si j'ai au contraire

$$Z'(2 + 3x + x^2) - Z(2 + 3x + x^2) = A$$

j'aurai $2 + \frac{3}{ef'} + \frac{1}{ef'^2} - 2 + \frac{3}{ef} + \frac{1}{ef^2} = 0$; or, à cauſe de $b = 1$, $e^{f'} = \frac{ef}{ef - 1}$; d'où l'on voit que $e^f + 1 = 0$ ſatisfait à l'équation; & que Z peut être ſuppoſé égal à $\frac{A}{1+x}$.

Soit encore $x^2 + 5x + 4 \cdot (\dot{Z} - Z)^1 = A$, j'aurai $4 + \frac{5}{ef} + \frac{1}{e^2f} - 4 + \frac{5}{ef^1} + \frac{1}{e^2f^1} = 0$; mais par l'hypothèſe, ſoit b la différence, j'ai

$\frac{1}{ef} = a$ & $\frac{1}{ef^1} = a - b$; donc $\frac{1}{ef^1} = \frac{1}{ef} - b$. Subſtituant dans l'équation ci-deſſus elle devient

$$4 + \frac{5}{ef} + \frac{1}{e^2f} - 4 - \frac{5}{ef} - \frac{1}{e^2f} + 5b + \frac{2b}{ef} - b^2;$$

donc, puiſque $b = 0$ ne donne qu'une ſolution illuſoire, j'ai

$$5 + \frac{2}{ef} - b = 0, \text{ ou } b = 5 + \frac{2}{ef} y;$$

donc, ſi $b = 3$, nous aurons $\frac{1}{ef} = -1$, & le dénominateur de Z ſera $1 + x$.

Suppoſant que b ſoit inconnu, le dénominateur ſera $x + \frac{5 - b}{2}$, & on trouvera que ce dénominateur ne peut convenir qu'en faiſant $b = \pm 3$.

Je ne pouſſerai pas plus loin ces recherches; cette méthode m'a paru d'une telle importance, dans l'analyſe, que j'ai cru devoir en préſenter ici l'eſquiſſe, toute imparfaite qu'elle eſt.

EXPÉRIENCES ET OBSERVATIONS Sur la végétation du Blé dans chacune des matières ſimples dont les terres labourables ſont ordinairement compoſées, & dans différens mélanges de ces matières, par leſquels on s'eſt rapproché de ceux qui conſtituent ces mêmes terres à labour.

Par M. TILLET.

IL eſt rare que certaines opérations de la Nature conſidérées en grand & auxquelles on ſe rend principalement attentif, lorſqu'elles ont des ſuites très-inégales, quoique par une loi immuable elles tendent toujours à la même fin, il eſt rare, dis-je, que ces opérations, ainſi conſidérées ſous une vaſte étendue, ne conduiſent pas à des réflexions particulières & au deſir de connoître, ou au moins d'entrevoir, la cauſe de cette inégalité dans leur ſuite qu'on a ſans ceſſe ſous les yeux. La différence ſenſible des ſubſtances ſur leſquelles s'exercent ces opérations, avertit bien quelquefois de l'inégalité des effets qui en doivent réſulter; mais il arrive ſouvent qu'on ſe trompe en tirant des concluſions trop générales & en ne réfléchiſſant pas que la différence des effets a plus ſa ſource dans une choſe acceſſoire aux matières d'où ils réſultent, que dans la différence bien réelle qui conſtitue ces matières.

Les expériences relatives à l'Agriculture que j'ai entrepriſes depuis quelques années, & pour l'examen deſquelles l'Académie voulut bien nommer des Commiſſaires au mois de Juin 1772, m'ont donné lieu de conſtater des faits dont je vais lui rendre compte. Lorſque je les aurai développés & réduits à quelques points principaux, on reconnoîtra, je crois, que la remarque par laquelle j'ai commencé ce Mémoire, n'eſt pas dénuée de fondement ſi on l'applique au ſujet intéreſſant dont il s'agit ici; & on jugera en particulier, d'après

ces mêmes faits, de toute la réserve qu'il convient de mettre dans la détermination de ce qui caractérise essentiellement un terrein fertile & propre sur-tout à produire du blé.

J'observois depuis long-temps que certaines terres qui sont un peu sablonneuses, comme celles de Châtillon près de Sézanne où j'ai une ferme assez étendue, produisent davantage, proportion gardée, dans les années pluvieuses, que d'autres terres de la Brie foncièrement meilleures: je sentois à la vérité que le produit plus foible de celles-ci, devoit provenir, non d'une quantité moins considérable de plantes, mais de l'état où elles se trouvoient par l'abondance des pluies, & parce que les blés étant versés en grande partie, ne donnoient qu'un grain maigre & retrait; au lieu que d'autres terres moins fortes, & où communément les blés ne sont pas beaucoup fournis, ne recevoient d'une humidité extraordinaire, que ce qu'il falloit pour que les pieds de blé y tallassent davantage, & que les tiges s'y multipliassent, sans être trop serrées cependant, & exposées à se coucher les unes sur les autres par des pluies fréquentes. Je sentois, je le répète, que la différence des produits venoit essentiellement de cette cause, & non d'une plus grande abondance de plantes dans les terres sablonneuses, que dans celles qui sont constamment meilleures & où le sable ne domine pas: mais j'étois toujours frappé du succès qui dans les premières résultoit d'une grande humidité, tandis qu'elle étoit nuisible à celles-ci: je commençois dès-lors à réfléchir combien par elle-même, & indépendamment des substances dont l'eau se charge dans les terres, elle avoit d'influence sur la végétation, & quel avantage elle pouvoit offrir seule, dans les terreins peu fertiles & où même toute autre ressource manquoit.

Je considérois d'un autre côté que si les terres fortes, c'est-à-dire celles où l'argile est abondante & dont le labour exige plusieurs chevaux, sont assez fertiles communément, elles le sont moins cependant que celles où l'argile se trouve dans une moindre proportion & telles qu'on les remarque aux environs de Bagneux & de Cachan près de Paris. Ce

coup-d'œil jeté en général ſur ces deux ſortes de terres labourables, m'avertiſſoit de l'utilité dont l'argile y étoit pour la production; mais il me donnoit lieu de remarquer en même-temps, que lorſqu'elle s'y trouve en trop grande quantité, non-ſeulement elle y rend la culture plus difficile & plus diſpendieuſe, mais elle nuit juſqu'à un certain point à la végétation. On verra dans le détail de mes expériences, les inconvéniens qui naiſſent d'un excès d'argile dans les terres, l'avantage qu'elle y occaſionne dans une certaine proportion & le rapport qu'il y a entre l'effet qu'elle produit dans les terres, & l'état où doivent être ces mêmes terres pour qu'un certain degré d'humidité néceſſaire aux plantes s'y conſerve aſſez conſtamment.

Il ne s'agiſſoit plus d'après ces obſervations, vagues à la vérité, mais fondées néanmoins ſur des faits conſidérés en grand & qu'on a tous les jours ſous les yeux, que de tenter quelques épreuves en petit & capables de conduire à d'autres plus conſidérables par les lumières qu'elles donneroient.

Mon projet a donc été de combiner de différentes façons les matières qui compoſent ordinairement les terres propres à la végétation, & principalement celles qu'on deſtine comme les meilleures à porter du froment; de comparer les produits que me fourniroient ces mélanges, en les abandonnant après y avoir ſemé du grain, à la marche ordinaire de la Nature, & en ne leur laiſſant d'autres ſecours pendant toute la durée de la végétation, que ceux qu'une terre labourable reçoit de la variété des ſaiſons.

Je ne me ſuis pas borné à ces combinaiſons de terres; j'ai deſiré de connoître quelle production me donneroit chacune des matières qui entroient dans les mélanges; je les ai employées ſeules & auſſi pures que des expériences de la nature de celles-ci, pouvoient le demander: il n'étoit pas queſtion en effet d'une homogénéité complète de chacune de ces matières pour l'objet que j'avois; il ſuffiſoit qu'elles euſſent tous les caractères qui les ſont ranger communément dans des claſſes bien diſtinctes.

La néceſſité de ſuivre journellement mes expériences &

de les mettre à l'abri, autant qu'il étoit poſſible, des petits accidens & du dérangement preſque inévitable que j'aurois éprouvé, en les faiſant en raſe campagne, me détermina à demander aux R. P. Chartreux la permiſſion de les faire dans quelqu'endroit renfermé de leur terrein: ces Religieux entrant dans les vues qui me conduiſoient, voulurent bien m'accorder la jouiſſance d'un jardin entouré de murs, où je pris pour ces expériences la partie du terrein qui me convenoit & qui ſe trouvoit dans l'expoſition la plus favorable.

Les pots de terre ordinaires où l'on élève des plantes ne m'ayant pas paru d'une grandeur & d'une forme tout-à-fait convenables pour une partie des épreuves que je projetois, j'en fis conſtruire vingt-quatre dont l'ouverture étoit d'un pied de diamètre, le fond de dix pouces, & la hauteur de ſept à huit pouces ſeulement. On verra par la manière dont ces pots étoient placés, que j'avois plus d'avantage à leur faire préſenter une ſurface aſſez grande, qu'à leur donner beaucoup de profondeur: ils furent tous deſtinés à contenir des terres que j'avois compoſées, ou quelques autres naturelles qui devoient leur être comparées, pour les produits que les unes & les autres donneroient. Quant aux matières pures qui entroient dans les mélanges, je les mis chacune dans des pots ordinaires & tels qu'ils me tombèrent ſous la main. Outre l'ordre dans lequel tous ces pots furent mis, & qui fut le même pendant trois ans, chacun d'eux portoit un numéro. Je fus certain par-là de ne rien confondre dans les obſervations que j'eus lieu de faire pendant tout l'accroiſſement des plantes, & à l'égard des productions que j'en recueillis.

Quelque avantageux qu'euſſent été par eux-mêmes les mélanges de terres que j'avois faits, quelque reſſource qu'il y eut eu dans les matières que j'avois employées, je n'aurois jamais réuſſi ſans doute dans mes expériences, ſi me bornant à ſemer du grain dans ces terres, j'avois laiſſé les pots qui les contenoient ſur la ſurface du terrein où ils étoient rangés, & où ils auroient été expoſés, dans le cours de neuf à dix

mois, ſoit à toute l'impreſſion des fortes gelées, ſoit à la ſéchereſſe que les grandes chaleurs occaſionnent. Je renſermai donc ces pots dans la terre, en obſervant de ne les y plonger que juſqu'à un travers de doigt de leur bord ſupérieur, afin que la terre du jardin, ne ſe mêlant point avec celle que les pots contenoient, je fuſſe certain que les plantes n'avoient aucune communication avec la première, & végétoient dans le ſeul eſpace que la grandeur du pot déterminoit. On voit que par cette diſpoſition les différentes terres de mes expériences rentroient dans l'ordre commun, & participoient, quoique iſolées réellement, à toutes les influences des ſaiſons que la terre du jardin recevoit.

Tous les pots qui les contenoient étoient rangés ſur trois lignes & à ſept ou huit pouces de diſtance l'un de l'autre; un ſentier de dix-huit pouces de largeur, ſéparoit ces lignes & donnoit la facilité d'en examiner en tout temps les produits.

Je commençai ces expériences au mois d'Octobre de l'année 1770: le blé que je ſemai ne fut pas abſolument le même pour toutes les épreuves de la première année: il importoit peu alors pour l'objet de mes recherches, que je m'occupaſſe ſpécialement de la ſemence; il ſuffiſoit que le grain que j'employois fût ſain & en état de bien germer; mais dans la ſuite j'eus l'attention, en répétant mes expériences ſur les terres, ſoit ſimples, ſoit compoſées, de leur rendre pour ſemence le grain même que j'en avois recueilli; & au mois d'Octobre 1773, chacune d'elles a reçu le blé qu'elle avoit donné par une triple reproduction.

La plupart des matières que j'employai étoient très-sèches par elles-mêmes, ou avoient été réduites à cet état, afin qu'après les avoir broyées ou miſes même en poudre, comme le fut l'argile, je fiſſe plus exactement le mélange des terres; & dans la vue auſſi qu'elles devinſſent aſſez meubles pour que le grain y éprouvât de toutes parts le contact des terres, & ne courût pas les riſques, ſoit de n'y pas germer, en tombant dans des vides où l'humidité ne ſe fût pas

maintenue, ſoit d'y languir par la même raiſon, après y avoir germé.

Cet état de ſéchereſſe dans lequel j'avois trouvé ou mis les matières que j'employai, m'obligea de les humecter, au moment où j'y ſemai le grain & après que je l'eus recouvert d'un pouce & demi ou environ, de la terre particulière à chaque pot: cette précaution une fois priſe, dans le deſir ſeul de hâter la germination du grain, puiſque les premières pluies auroient produit cet effet, je plaçai les pots dans leur ordre; je comprimai autour d'eux la terre dans laquelle, comme je l'ai dit, ils étoient plongés juſqu'au bourrelet qui termine leur évaſement, & je m'abſtins conſtamment de les arroſer, pendant tout le cours de la végétation, malgré les grandes ſéchereſſes qu'ils éprouvèrent quelquefois, & qui me firent craindre dans certains momens que les plantes n'y mouruſſent avant la maturité du grain.

Afin de ne pas fatiguer l'Académie par des répétitions dans leſquelles je tomberois néceſſairement, ſi avant que de lui rendre compte des réſultats de mes expériences, je lui donnois d'abord le détail tant des mélanges de terres que j'ai faits, que des matières ſimples que j'ai employées, pour paſſer enſuite aux produits que j'en ai tirés chaque année, je réunirai ſous un même coup-d'œil & la nature des terres dont j'ai fait uſage, & les productions qu'elles m'ont données pendant trois ans. Le fond de chaque expérience ſera connu par-là en même temps que les réſultats: ils ne ſeront accompagnés quelquefois que de réflexions ſuccinctes, que les circonſtances pourront faire naître & qui prépareront à des obſervations générales par leſquelles ce Mémoire ſera terminé.

J'ai choiſi le nombre de *huit* pour me ſervir de règle dans la proportion des mélanges que j'ai faits & pour fixer la quantité plus ou moins conſidérable des parties des matières différentes qui y ſont entrées: ces parties ont été déterminées par une meſure que j'ai établie d'après la contenance des pots dont on a vu plus haut les dimenſions, & chacun d'eux contenoit à peu-près huit de ces meſures. Ainſi la première de mes

I.ère Expérience.

de mes expériences a eu lieu ſur un mélange de $\frac{3}{8}$ d'argile de Gentilly, dont les Potiers de terre font le plus grand uſage, de $\frac{2}{8}$ de ſable de rivière, & de $\frac{3}{8}$ de retailles de pierre des environs de Paris, c'eſt-à-dire de celle que les ouvriers en ce genre, nomment *pierre dure*, qu'on emploie tous les jours pour les premières aſſiſes des bâtimens, & qui abonde, comme on le ſait, en coquillages détruits. J'ai obtenu un ſuccès complet en 1771, 1772 & 1773 dans cette première expérience: les blés y ont paſſé, pendant chacune de ces années, par tous les degrés de la végétation, ſans éprouver le moindre affoibliſſement, les tiges s'y ſont élevées avec vigueur, & ont donné de beaux épis, où le grain a acquis toute ſa maturité *(a)*.

(a) M. Baumé, Membre de cette Académie, publia en 1770 un Mémoire ſur les argiles, qui contient beaucoup de recherches & d'expériences Chimiques: il y a eu pour objet principal d'examiner, 1.° quels ſont les principes qui conſtituent les argiles; quels ſont, en ſecond lieu, les changemens qu'elles éprouvent, & enfin quels ſont les moyens de les rendre fertiles. La partie de ſon Mémoire où il étoit queſtion d'analyſer l'argile & de la conſidérer ſous des vues purement chimiques, eſt traitée avec beaucoup de ſagacité, & contient pluſieurs faits qui paroiſſent bien établis. Quant aux expériences & aux obſervations qui intéreſſoient proprement l'Agriculture, & qui étoient relatives à la troiſième queſtion qu'il avoit eu pour but de réſoudre, il ne lui a été poſſible que de propoſer des épreuves ſur les différentes argiles, & ſur les différens mélanges qu'on pourroit en faire avec d'autres terres pour les rendre plus favorables à l'accroiſſement des plantes.

En donnant aux recherches que j'ai faites en ce genre, plus d'extenſion & de variété que M. Baumé n'avoit eu deſſein d'abord d'en mettre dans la troiſième partie de ſon travail, je crois avoir rempli une partie de ſes vues, à l'égard de l'emploi de l'argile pour la végétation. Il verra ſans doute avec plaiſir que les expériences, dont ſes occupations ne lui permettoient pas de ſuivre le détail, quadrent en général avec les principes bien fondés, ſur les mélanges des terres qu'il a adoptés; que ces expériences cependant exigent quelquefois des modifications dans ces principes, relativement à la cauſe du ſuccès des mélanges, & qu'elles montrent d'ailleurs avec combien de réſerve on doit prononcer ſur ce qui procure principalement aux plantes l'aliment dont elles ont beſoin.

Quoique M. Macquer, dans un Mémoire curieux qu'il a donné ſur les argiles, *(Mém. de l'Acad. année 1758)* ne les ait conſidérées proprement que par rapport à leur fuſibilité avec les pierres calcaires; cependant il les y a examinées avec ſoin, quant à leur nature & à une multitude d'eſpèces dont ce ſavant Académicien a fait l'analyſe. Travail conſidérable & délicat en même-temps, que M.

II.e & III.e Expériences.

Le mélange pour la deuxième & la troisième expérience, lesquelles dans la suite seront désignées ordinairement par leur numéro, comme les expériences suivantes, a été le même que le précédent, à cela près qu'il y a été employé des retailles de la pierre connue sous le nom de *Saint-Leu*, au lieu de celles de la pierre dure qui font partie du mélange *n.° 1*. Le succès s'est soutenu aussi pendant les trois années, dans cette deuxième & troisième expérience, quoiqu'il y ait eu quelque différence en moins pour la quantité des épis, & non pour leur beauté; les touffes de blé n'y étoient pas tout-à-fait aussi fournies que dans la première; cependant il y a eu assez d'égalité en 1772 entre ces deux *numéros* & le *n.° 1;* ainsi on peut dire en général que ces deux sortes de mélanges sont à peu-près également bons.

IV.e & V.e Expériences.

Il n'entra dans le mélange dont il s'agit ici que $\frac{2}{8}$ d'argile, $\frac{3}{8}$ de retailles de pierre pareilles à celles des deux numéros précédens, & $\frac{3}{8}$ de sable. La réussite a été entière dans ces *n.os 4 & 5* pendant les trois années. Il paroît, par conséquent, qu'une quantité moins forte d'argile ne nuit point au progrès de la végétation; & cela devient avantageux parce qu'il n'est pas facile de la bien mêler avec les autres matières qu'on emploie pour imiter les terres à labour naturelles *(b)*.

Baumé a partagé avec lui. Peut-être les variétés qu'on y remarque mériteroient-elles quelqu'attention de la part des Agriculteurs, & contribueroient-elles à rendre plus ou moins avantageux les mélanges de terres dont les argiles feroient partie.

(b) M. Baumé rend compte, dans le Mémoire sur les argiles que j'ai déjà cité, de l'analyse qu'il a faite de deux espèces de terres labourables, dont la première étoit regardée comme une des meilleures du canton où il la prit, & la seconde comme inférieure à la précédente, & d'un foible produit. Cet examen des terres labourables, où l'argile se trouva en différentes proportions, a trait aux cinq premières expériences que je viens de rapporter, & demande une légère observation de ma part, après que j'aurai fait mention des deux résultats de M. Baumé. « J'ai pris, dit-il, une certaine quantité de terres labourables dans les environs de Paris, « & dans un terrein qui passe pour « être des meilleurs pour la végétation: Je l'ai fait sécher à l'air, afin « de me débarrasser de l'humidité; « j'en ai pesé une livre; je l'ai lavée «

VI.e Expérience.

Le ſuccès n'a pas été le même ici, quoique dans cette ſixième expérience, la différence ne conſiſtât uniquement, à l'égard du mélange, & comparaiſon faite avec les numéros précédens *1, 2* & *3,* qu'en ce que pour ce même *n.° 6,* il a été employé $\frac{2}{8}$ de ſablon d'Étampes, au lieu d'une pareille quantité de ſable de rivière qui eſt entrée dans le mélange des *n.os 1, 2* & *3*. Le blé a végété avec vigueur, il eſt vrai, en 1771, dans cette ſixième expérience; mais quoiqu'il y ait eu de beaux épis en 1772, la touffe de blé étoit peu fournie; elle a jauni & s'eſt deſſéchée plus promptement que les autres; & en 1773, ce *n.° 6* a totalement manqué; les

---

» dans une certaine quantité d'eau, » de la même manière qu'on lave les » argiles; j'ai fait couler avec l'eau la » portion de terre la plus fine; il eſt » reſté ſix onces de matières groſſières; » c'étoit du gravier ſemblable à celui » de rivière, mêlé de fragmens de » briques & de pierres calcaires; j'ai » ramaſſé la terre fine qui a été ſé- » parée par le lavage, je l'ai fait » ſécher & je l'ai fait digérer dans » du vinaigre diſtillé: j'ai ſéparé ce » vinaigre lorſqu'il a été ſaturé de » terre; j'ai repaſſé ſur le marc de » nouveau vinaigre: par ce moyen » j'ai ſéparé toute la terre calcaire: » j'ai précipité cette terre par de » l'alkali fixe; j'en ai obtenu quatre » onces; il eſt reſté enfin ſix onces » d'argile ſemblable aux argiles com- » munes.

» J'ai pareillement examiné, conti- » nue M. Baumé, la terre d'un » autre terrein, qui paſſe parmi les » Agriculteurs pour être moins bon » que le précédent, & qu'ils nomment » terrein *maigre;* j'ai trouvé que » chaque livre de cette terre ſéchée » contient quatre onces d'argile, ſix » onces de gravier, & ſix onces de terre calcaire ».

On voit par l'examen qu'a fait M. Baumé des matières qui entrent dans la compoſition d'une terre labourable qui eſt réputée bonne, qu'il s'y trouve $\frac{6}{16}$.es d'argile, & que dans celle qui eſt réputée maigre il n'y en a que $\frac{4}{16}$es. On ſeroit porté à croire, d'après ces analyſes, que la quantité plus ou moins conſidérable d'argile, dans les mélanges dont il s'agit ici, décideroit de la qualité plus ou moins avantageuſe qu'on y attache: mais il paroît par le ſuccès ſoutenu pendant trois ans de la quatrième & de la cinquième de mes expériences, où il n'entroit qu'un quart d'argile, ſuccès égal au moins à celui des trois premières, où j'avois employé $\frac{6}{16}$.es d'argile, c'eſt-à-dire la même quantité que M. Baumé en a trouvée dans une des meilleures terres labourables, il paroît, dis-je, qu'un terrein pourroit n'être pas conſidéré comme maigre & peu fertile, quoiqu'il ne contint qu'un quart d'argile, & qu'il y a encore bien des obſervations à faire ſur ce qui conſtitue eſſentiellement les excellentes terres à labour, avant que nous puiſſions indiquer des mélanges qui leur ſoient parfaitement aſſimilés.

plantes y ont péri. Nous verrons le *n.° 8* quadrer à peu-près avec celui-ci.

En faisant attention que le *n.° 6* & le *n.° 8* présentent le même résultat, & qu'il n'y a d'autre différence dans le mélange qui les concerne, & celui qui regarde les premiers numéros où la végétation a pleinement réussi pendant trois ans, que celle qui peut se trouver entre le sablon & le sable, en considérant, dis-je, par ce côté seul l'expérience dont il s'agit, ne pourroit-on pas soupçonner que le mélange trop intime du sablon avec l'argile a occasionné une liaison & une consistance entre ces deux matières, qui a mis obstacle au développement des parties les plus déliées des racines, & qui peut-être a rendu ces matières ainsi mêlées intimement, moins permeables à l'eau, après qu'elle les a eu d'abord réduites en une espèce de ciment? Nous avons vu qu'en 1771, le blé de ce *n.° 6* avoit été beau & vigoureux; que la végétation y avoit été moins belle en 1772; que dans cette même année, la touffe de blé y avoit jauni & s'y étoit desséchée avant la maturité parfaite du grain; nous avons remarqué sur-tout que les plantes y avoient totalement péri en 1773. N'y auroit-il pas lieu de croire, en se prêtant pour un moment à l'idée que je viens de présenter, que si le blé de ce *n.° 6* a d'abord réussi, s'il n'a pas eu le même succès l'année suivante, & si enfin il a péri la troisième année, c'est que le mélange du sablon & de l'argile est devenu plus complet avec le temps, par le secours des pluies, & à la faveur du remuement des terres composées de chaque pot, que j'ai fait au mois d'Octobre des années 1771 & 1772, avant que d'y semer le grain? Quelle que soit la cause qui a fait périr le blé dans les pots *n.° 6* & *n.° 8*, quoique le grain y eût d'abord germé en Octobre, & que les plantes s'y fussent ensuite développées, il est certain que des vingt-quatre pots principaux dont j'ai à donner le produit pendant trois ans, il n'y a que les deux dont je viens de parler où les plantes soient mortes en 1773; & cependant, à la nature près du

mélange, tout a été parfaitement égal dans la manière dont les expériences ont été faites à l'égard de ces vingt-quatre pots.

VII.e Expérience.

Il eſt d'uſage dans bien des pays d'employer la marne pour rendre les terres plus fertiles, & de renouveler cet engrais au bout d'un certain nombre d'années: j'ai eu pour objet dans la ſeptième expérience, d'examiner d'abord ſi une terre naturelle avec laquelle on mêle une certaine quantité de marne eſt plus favorable à la végétation que les terres compoſées que je pourrois employer; & d'obſerver enſuite s'il y avoit une grande différence entre le produit d'une terre naturelle à laquelle on n'ajouteroit aucun engrais, & celui de la même terre à laquelle on joindroit de la marne. J'ai fait en conſéquence tranſporter à Paris de la terre de Châtillon-ſur-Morin, village ſitué, comme je l'ai déjà dit, à deux lieues de Sezanne: des expériences ſur cette terre que j'avois priſe dans une des pièces dépendantes de la ferme que j'y ai, n'en étoient que plus propres à piquer ma curioſité. La marne eſt fort commune dans ce canton; & on y eſt beaucoup dans l'uſage de la répandre ſur les terres: la quantité qu'on y en met par arpent n'eſt pas abſolument fixe; le laboureur la détermine ſur ſon opinion, & en arbitrant que la partie de ſes terres qu'il juge la plus froide eſt celle qui en exige le plus. J'ai mêlé, pour la ſeptième expérience dont il s'agit, $\frac{7}{8}$ de la terre de Châtillon avec $\frac{1}{8}$ de la marne du même canton. La végétation a été aſſez belle, dans cette expérience, pendant trois années conſécutives; mais elle l'a été moins que dans les terres compoſées dont j'ai d'abord parlé: les touffes de blé étoient plus vigoureuſes & mieux fournies dans celles-ci que dans la terre marnée de Châtillon; & cette différence étoit ſenſible au ſimple coup-d'œil qui ſe portoit en même-temps, chaque année, ſur les produits diſtincts de ces expériences.

VIII.e Expérience.

J'ai déjà dit que la ſixième expérience quadroit avec celle-ci: le mélange des terres étoit le même pour l'une &

pour l'autre ; & les produits ont été à peu-près pareils chaque année; dans la dernière, sur-tout, les plantes du *n.° 6* & du *n.° 8* ont péri également : ainsi les réflexions que j'ai déjà faites sont applicables à l'expérience dont il s'agit ici.

IX.e Expérience.

Mon objet, dans la neuvième expérience, a été simplement d'employer de la terre labourable ordinaire, en y mêlant de la marne & du fumier. Les laboureurs sont persuadés que la marne seule produit à la vérité un bon effet, mais qu'il ne faut pas se borner à cet engrais pour rendre les terres fertiles, & qu'il est nécessaire d'y ajouter du fumier: j'ai donc joint à $\frac{6}{8}$ de la terre de Châtillon, dont j'ai déjà parlé, $\frac{1}{8}$ de marne & $\frac{1}{8}$ de fumier. Le blé de cette expérience a bien réussi en 1771 & 1772 ; mais le succès n'a pas été le même en 1773 ; le blé étoit maigre, & quelques épis étoient foibles: il n'en faudroit pas conclure cependant que le mélange dont il est question n'est pas avantageux, parce que le produit de la troisième année n'a pas répondu à celui des deux autres; quelques circonstances particulières qui m'ont échappé, peuvent avoir influé sur ce dernier résultat; & nous verrons qu'en général les produits de 1773, pour plusieurs des expériences que j'ai à rapporter, ont été moins beaux que ceux des années précédentes.

X.e Expérience.

Il convenoit, en employant la terre labourable de Châtillon, d'examiner quelles productions elle donneroit seule, & comme terre meuble simplement: je l'employai donc sans aucun engrais pour la dixième expérience. La touffe de blé y étoit belle & fournie suffisamment en 1771; le succès y fut le même l'année suivante ; le blé y étoit aussi beau en 1773, mais les tiges y étoient en moindre nombre qu'elles n'avoient été dans les deux années précédentes. On auroit lieu de présumer, à la première réflexion sur cette expérience, que la marne & le fumier réunis n'étoient pas propres à rendre la terre de Châtillon plus fertile qu'elle l'a été sans le secours de ces deux engrais, puisque le produit de la dixième expérience, dans les années 1771 & 1772, a été à peu-près

aussi beau que celui de la neuvième, pendant les deux mêmes années; & qu'en 1773, si la terre de Châtillon seule n'a pas fourni un aussi beau produit qu'elle l'avoit donné précédemment, il en a été ainsi de cette même terre, quoique la marne & le fumier que j'y avois joints pour la neuvième expérience, eussent dû en apparence produire un meilleur effet qu'il ne devoit résulter de la terre employée sans aucun engrais; mais ce seroit conclure trop tôt contre l'usage général & bien fondé sans doute de joindre la marne au fumier pour améliorer les terres labourables. Outre que la médiocrité du produit de ces deux expériences en 1773, pourroit être attribuée à quelque cause particulière que je n'ai point saisie, comme il est arrivé peut-être que par des circonstances dont également je n'ai pas été frappé, l'avantage que la neuvième auroit dû avoir naturellement sur la dixième, n'a pas été sensible dans les trois années, j'aurai quelques réflexions à faire dans la suite sur l'effet propre qu'il y a lieu de croire que la marne produit dans les terres, & sur celui qui résulte de l'emploi du fumier: peut-être sera-t-on moins surpris alors qu'une terre simple, mais rendue très-meuble se rapproche, pour le produit, d'une terre pareille à laquelle on a joint des engrais, parce qu'un des principaux avantages que reçoit celle-ci, se trouve procuré à la première, & y devient assez marqué quelquefois, pour qu'on ne distingue pas une terre amendée d'avec celle qui ne l'a pas été.

XIe Expérience.

L'argile n'a pas fait partie de la onzième expérience; je n'y ai employé, pour le mélange, que $\frac{4}{8}$ de retailles de pierres, $\frac{2}{8}$ de sable, & une quantité pareille de sablon. Le blé a réussi dans cette expérience en 1771; il étoit beau aussi l'année suivante, & la touffe en étoit bien fournie: le succès n'a pas été le même en 1773; quoiqu'il y eût de beaux épis, les pieds de blé n'étoient pas nombreux, & plusieurs d'entr'eux étoient bas & maigres. On voit ici le sablon faisant partie du mélange avec d'autres matières qui, en apparence, ne contribuent pas beaucoup à la végétation; mais on aura lieu de remarquer bientôt que le blé a parfai-

tement réussi dans chacune de ces matières employées séparément, & dans le sablon même le plus pur.

XII.e Expérience.

Les décombres de bâtimens sont composés ordinairement à Paris de pierres brisées, de vieux plâtres, de mortier détruit, de fragmens de briques, de tuiles, &c. J'ai employé pour la douzième expérience $\frac{5}{8}$ de cette sorte de décombres, & $\frac{3}{8}$ d'argile. Les épis que ce mélange a produits en 1771 étoient en général assez beaux; mais il y avoit des pieds de blé maigres & peu élevés. La production fut plus avantageuse l'année suivante; elle le fut moins en 1773; la touffe de blé que donna ce mélange étoit peu fournie, & dans le nombre des pieds foibles dont elle étoit composée, on n'en remarquoit que cinq ou six qui portassent d'assez beaux épis.

XIII.e Expérience.

J'employai pour cette expérience-ci $\frac{2}{8}$ d'argile, $\frac{4}{8}$ de sable & $\frac{2}{8}$ de marne. Le succès y fut complet en 1771. Je n'obtins pas le même avantage en 1772: quoique ce mélange m'ait donné de beaux épis cette année-là, cependant les pieds de blé n'y étoient pas abondans; & en général, ils y étoient foibles. Ce petit nombre de tiges & cet état de foiblesse étoit encore plus marqué en 1773.

XIV.e Expérience.

Il n'entroit dans le mélange relatif à la douzième expérience dont j'ai rendu compte, que de l'argile & des décombres dans la proportion de 3 à 5: j'ai fait usage de ces mêmes matières, mais en moindre quantité, pour la quatorzième expérience, & je les ai mêlées avec d'autres propres à rendre le composé différent. Sur $\frac{6}{24}$ d'argile j'en ai mis 8 de décombres, 4 de sablon & 6 de marne. Le produit de ce mélange a été assez beau en 1771; il a pleinement réussi en 1772; mais en 1773, il n'a pas été aussi avantageux: ce mélange a donné à la vérité en 1773, quelques épis assez beaux, & il y avoit un assez grand nombre de tiges, mais elles étoient basses & n'avoient pas la vigueur de celles que j'avois obtenues, l'année précédente, de cette terre composée.

À mesure que j'entre dans le détail de mes expériences, on doit s'apercevoir que l'année 1773 ne leur a pas été aussi

auſſi favorable en général que les deux précédentes, & que dès-lors il y a lieu de préſumer que des circonſtances particulières, telles qu'une ſéchereſſe trop long-temps ſoutenue, pour la manière dont je faiſois mes épreuves, ont pu influer autant ſur leurs produits, & y avoir occaſionné un affoibliſſement, que la nature même des mélanges qui les ont donnés. J'aurai ſujet d'étendre cette réflexion dans le réſultat général que je tirerai de mes expériences, & je ferai ſentir que mes blés ont dû ſouffrir néceſſairement de la ſécheresse qu'ils ont éprouvée au printemps de 1773; tandis que ceux qui ſont venus en pleine campagne ne s'en ſont preſque pas reſſentis.

XV.e Expérience.

On regarde ordinairement comme un terrein maigre & peu fertile, celui qui ne contient qu'une petite quantité de terre franche, & où le ſable, les cailloux, la craie & d'autres matières de cette eſpèce dominent. Je cherchai, pour la quinzième expérience, à faire un mélange qui eût du rapport avec un terrein de cette nature, & qu'on pût conſidérer en général comme offrant une foible reſſource pour la végétation: à $\frac{2}{8}$ d'une terre inculte du clos des Chartreux, qui par elle-même étoit très-bonne, comme on le verra bientôt, j'ajoutai $\frac{2}{8}$ de retailles de pierre, $\frac{2}{8}$ de ſable & autant de ſablon. Le blé qui vint dans ce mélange fut aſſez beau en 1771; il le fut encore davantage & plus abondant en 1772; mais les pieds de blé, quoiqu'aſſez nombreux, y étoient bas en 1773: il s'y trouva néanmoins quelques épis qui répondoient au produit plus avantageux des deux autres années.

XVI.e Expérience.

Mon deſſein, dans les expériences dont je rends compte, n'avoit pas été principalement d'examiner l'effet que le fumier produit dans les terres, & de combiner ſur cela des épreuves qui allaſſent à ce but d'une manière directe; mais en les variant de pluſieurs façons, j'ai cru devoir employer quelquefois le fumier, ſoit afin de me rapprocher par-là de l'uſage, & de prévenir les objections, ſoit pour obſerver ſi mes terres compoſées recevroient un avantage ſenſible de

cet engrais, étant comparées à d'autres abſolument pareilles, qui n'auroient pas eu ce ſecours. Il entra dans la ſeizième expérience $\frac{3}{8}$ d'argile & $\frac{2}{8}$ tant de ſable que de ſablon & de fumier. Cette épreuve réuſſit aſſez bien en 1771; le blé y étoit beau auſſi l'année ſuivante; mais la touffe qui le rendit n'étoit que médiocrement fournie; elle l'étoit encore moins en 1773; les épis qu'elle donna étoient néanmoins aſſez beaux.

XVII.ᵉ Expérience. Le même mélange de terre dont j'ai parlé plus haut, comme propre à repréſenter à peu-près un terrein maigre, m'a ſervi en grande partie pour la dix-ſeptième expérience. A $\frac{6}{8}$ de ce mélange, où l'on a vu qu'il n'entroit qu'un quart de terre inculte, & où le reſte étoit du ſable, du ſablon & des retailles de pierres, par égales portions, j'ajoutai $\frac{2}{8}$ d'argile: je pouvois ſuppoſer, par l'addition de cette matière, qu'elle ſuppléeroit à ce qu'il y avoit de moins propre à la végétation dans les autres parties du mélange qui avoit été aſſimilé à un terrein maigre & peu fertile. Je n'ai cependant pas trouvé une différence ſenſible, pendant les trois années, entre les produits de la quinzième expérience & ceux de celle-ci: ils ont été aſſez beaux dans l'une & l'autre de ces expériences en 1771; & ſi en 1772 le blé de la quinzième expérience étoit un peu plus vigoureux que celui de la dix-ſeptième, j'ai obſervé qu'en 1773 le blé de celle-ci étoit en meilleur état que celui de la quinzième.

XVIII.ᵉ Expérience. $\frac{2}{8}$ d'argile, une quantité pareille de marne, $\frac{3}{8}$ de ſable & $\frac{1}{8}$ de fumier, composèrent le mélange de la dix-huitième expérience. La production y fut médiocre la première année; elle y fut frappante par ſa beauté en 1772; mais l'année ſuivante le blé y étoit en mauvais état; on y remarquoit à la vérité quelques épis aſſez beaux, mais les pieds de blé y étoient foibles, & les tiges baſſes.

XIX.ᵉ Expérience. Lorſqu'on fouilla les terres pour établir les fondemens de la nouvelle Monnoie, on tira de quelques endroits, à dix-huit ou vingt pieds de profondeur, un ſable gras & limoneux que je me propoſai de comparer avec les autres terres

composées ou pures qui faisoient la matière de mes épreuves. J'employai d'abord pour la dix-neuvième expérience ce sable limonneux seul & sans aucun mélange ; le blé y a réussi pendant les trois années ; il y étoit très-beau, sur-tout en 1772, & le succès n'y étoit guère moins marqué l'année suivante.

XXe Expérience.

Ce même sable gras avec lequel je mêlai du fumier sur le pied de $\frac{2}{8}$ de celui-ci, & de $\frac{7}{8}$ du premier, me servit pour la vingtième expérience ; le blé y étoit beau & vigoureux au Printemps de 1771 ; on y voyoit en Été un assez grand nombre d'épis ; mais au mois de Juillet les tiges y éprouvèrent un desséchement trop prompt ; l'épi n'y mûrit qu'imparfaitement & ne donna qu'un grain glacé & retrait : il fut très-beau au contraire en 1772, & le succès n'y fut pas moins frappant l'année suivante, tant par l'abondance des tiges que par la qualité du grain.

XXIe Expérience.

Je rapprochai de cette expérience sur un sable gras & limonneux, qui étoit, selon toute apparence, un dépôt très-ancien de la rivière de Seine, j'en rapprochai, dis-je, l'expérience sur une terre inculte depuis long-temps, mais qui me parut bonne par elle-même : je la pris dans un endroit du clos des Chartreux qui avoit été couvert long-temps par de vieux arbres, & d'où ils avoient été arrachés depuis peu. Cette terre inculte m'avoit servi en partie pour la quinzième & la dix-septième expérience dont j'ai parlé. Je l'employai seule pour la vingt-unième, & je la rendis plus comparable par-là avec la dix-neuvième, où le sable limonneux étoit sans aucun mélange, ou étoit tel au moins que je l'avois trouvé. Le blé dans cette terre inculte fut beau & vigoureux en 1771 ; plus remarquable encore par sa force & sa beauté en 1772 ; & si la touffe de blé n'y a pas été aussi fournie en 1773 qu'elle l'avoit été les deux années précédentes, elle a donné néanmoins un assez grand nombre de tiges, & un grain bien nourri.

XXIIe Expérience.

Le mélange de terres relatif à la vingt-deuxième expérience fut composé de $\frac{3}{8}$ d'argile, d'une quantité pareille de

plâtras, & de $\frac{2}{8}$ de ſable. Le blé y réuſſit aſſez bien la première année; il y fut très-beau la ſeconde; mais la troiſième année il n'y eut qu'un petit nombre de pieds de blé, & que quelques épis aſſez beaux.

XXIII.e Expérience.

L'avantage que l'on croit avoir reconnu quelquefois dans les cendres des plantes brûlées ſur les terres labourables, & dans les ſels qui réſultent de cette combuſtion, m'engagea à les faire entrer dans quelques-unes de mes expériences, ſoit en les employant ſeules, ſoit en les mêlant avec d'autres matières d'une nature très-différente, auxquelles je préſumois que les cendres pouvoient convenir. J'en mêlai donc $\frac{2}{8}$ avec $\frac{3}{8}$ d'argile, & une égale quantité de ſable. Le blé que j'obtins par cette expérience réuſſit auſſi aſſez bien la première année; j'y eus un ſuccès complet en 1772. Il ne fut pas tel, à beaucoup près l'année ſuivante; la touffe de blé étoit peu fournie, les épis cependant qu'elle donna étoient aſſez beaux.

XXIV.e Expérience.

L'emploi des fumiers dans les terres labourables & dans d'autres terreins plus limités, où l'on veut favoriſer la végétation, eſt généralement adopté, & d'une utilité bien conſtante; mais l'avantage qu'on en retire eſt-il dû ſeulement à la nature du fumier, comme engrais proprement dit, comme fourniſſant à la terre des ſucs, des ſels, une ſubſtance analogue à celle des plantes, & par-là très-propre à les nourrir? N'y a-t-il pas lieu de croire que les fumiers produiſent auſſi un bon effet dans les terres, par une voie purement mécanique; c'eſt-à-dire en les ſoulevant, en empêchant qu'elles ne deviennent trop compactes, & en donnant lieu, par leur ſubdiviſion, aux racines les plus déliées d'une plante de ſe développer en auſſi grand nombre qu'elle eſt capable d'en fournir? Cette dernière propriété, qu'on peut attacher avec quelque vraiſemblance aux fumiers, ſur-tout quand ils ne ſont pas trop chargés des excrémens des animaux, & que les pailles y conſervent encore quelque conſiſtance, me fit naître l'idée de mêler $\frac{2}{8}$ de paille fraîche & hachée avec $\frac{3}{8}$ d'argile & autant de retailles de pierre. Je ſentois bien que par ce mélange, & ſur-tout par la trop

grande ténuité à laquelle j'étois forcé de réduire la paille, pour la faire entrer dans mon expérience, je n'allois pas tout-à-fait à mon but, & je me privois de l'avantage que des pailles un peu longues, entremêlées & mises au hasard par pelotons, eussent pu me procurer pour rendre l'argile moins compacte; mais il ne s'agissoit que d'une première tentative, peu concluante à la vérité, mais propre à me guider pour la mieux faire en grand. Je n'obtins qu'un succès médiocre dans cette expérience pendant trois années: le blé y étoit cependant assez beau en 1772; mais en 1771 & 1773 la végétation y fut foible, & je n'en retirai qu'un petit nombre d'épis. On verra dans les observations générales quelle peut avoir été la cause du peu de succès de cette épreuve.

Les expériences que je viens d'exposer sommairement, ne roulent pour la plupart, comme on a vu, que sur des mélanges de terres que j'ai combinées dans différentes proportions, & en tâchant de saisir un point par lequel quelqu'un de ces mélanges se rapprochât de ceux qui s'opèrent successivement dans la Nature, ou qui, formés depuis long-temps, constituent les bonnes terres labourables. Il convenoit que je fisse encore des épreuves sur chacune des matières qui entroient dans mes combinaisons, & qu'après en avoir tiré des productions particulières, j'examinasse celles qui étoient les plus favorables à la végétation. Quoique ces matières ne fussent pas pures & homogènes, elles étoient cependant, quant à l'objet simple de mes recherches, comme des élémens que je pouvois distinguer, relativement à la variété de mes opérations, & dont la nature étoit assez différente en elle-même pour qu'il en résultât aussi des composés très-différens. Ce fut donc de chacune de ces substances terreuses que j'essayai de tirer des productions, en les abandonnant, après y avoir semé du grain, & comme j'ai fait à l'égard des mélanges, à la marche ordinaire de la Nature, & aux intempéries des saisons.

XXV.e Expérience.

La première de mes expériences en ce genre, & la vingt-cinquième dans l'ordre des recherches dont je rends compte,

concerna de vieux plâtre que j'avois pris au hasard, & qui paroissoit être les débris de quelque corniche d'un appartement: le blé y a parfaitement réussi pendant trois ans, tant par l'abondance des tiges & leur vigueur que par la beauté des épis: plusieurs d'entr'eux avoient six pouces de longueur, & couramment ils y étoient de quatre à cinq. M.rs les Commissaires que l'Académie voulut bien nommer au mois de Juin 1772, pour constater l'état des blés qui résultoient de mes expériences, en firent leur rapport à la Compagnie, & peuvent lui rappeler encore actuellement que la touffe de blé fournie par le vieux plâtre seul étoit frappante par sa force; que le feuillage y étoit large & d'un vert très-foncé; que la plupart des tiges, vigoureuses en elles-mêmes, s'élevoient à plus de cinq pieds; & que les épis, tous en fleurs dans ce moment-là, présentoient le coup-d'œil de la plus belle végétation en ce genre.

XXVI.e Expérience.

J'employai pour la vingt-sixième expérience du sablon d'Étampes; il étoit pur, très-net, & tel qu'on l'auroit mis en usage pour former du verre. Les pieds de blé ne se trouvèrent pas tout-à-fait aussi abondans dans cette expérience-ci, en 1771, que dans la précédente; mais ce qu'il y en avoit réussit également. La production, en 1772, ne le céda en rien dans le sablon à celle que donna le vieux plâtre, cette même année, & que j'ai dit avoir été si frappante: mais en 1773, la touffe de blé que j'obtins du sablon étoit peu fournie; on n'y remarquoit que sept à huit épis assez beaux.

XXVII.e Expérience.

Le sable de rivière, tel qu'il entre dans la composition du mortier, fut la matière de la vingt-septième expérience. Le succès complet dont j'ai parlé plus haut à l'égard des produits que le vieux plâtre a donnés constamment pendant trois années, a été le même dans le blé que j'ai recueilli du sable de rivière; les plantes y étoient vigoureuses & abondantes; les épis longs & bien garnis.

XXVIII.e Expérience.

Le succès fut égal, & aussi constamment marqué pendant trois ans, dans une autre expérience pour laquelle j'employai des retailles de pierre de Saint-Leu réduites en

poudre, & dépouillées de tout ce qui leur étoit étranger.

XXIXe Expérience.

Les décombres d'un bâtiment qu'on démolit sont ordinairement composés de pierres en partie détruites, de briques ou de tuiles brisées, de mortier sans consistance, de plâtre pulvérisé, &c. Je pris dans des décombres de cette espèce les parties les moins grossières & réduites à l'état d'une terre ordinaire : j'y semai du grain pour la vingt-neuvième expérience ; il y réussit assez bien en 1771 & 1772 ; mais la production y fut peu abondante en 1773 : j'y recueillis néanmoins quelques épis très-beaux, parmi d'autres qui n'étoient que d'une longueur médiocre.

XXXe Expérience.

L'argile de Gentilly, dont les Potiers de terre font usage à Paris, fut celle que j'employai pour cette expérience-ci. J'ai dit au commencement de ce Mémoire la manière dont je préparai cette argile pour la rendre propre à recevoir la semence & à faciliter la germination du grain : le blé y devint assez beau en 1771, quoique les pieds n'y fussent pas nombreux ; il y périt en 1772 ; mais en 1773 la touffe de blé y étoit raisonnablement fournie, & elle donna de très-beaux épis.

XXXIe Expérience.

J'essayai, par celle-ci, de tirer quelque production de la cendre seule de bois neuf, humectée simplement au point qu'il le falloit pour que la semence y germât, & laquelle conservoit par conséquent la petite quantité de sel alkali qu'elle contenoit. Le blé, après y avoir germé, périt totalement en 1771. Je fus plus heureux dans ma tentative l'année suivante ; je n'eus pas, à la vérité, un grand nombre de tiges, mais plusieurs d'entr'elles étoient vigoureuses, & donnèrent des épis dont quelques-uns avoient quatre à cinq pouces de longueur. Je ne tirai pas en 1773 le même avantage de l'expérience sur les cendres ; outre qu'elles ne me fournirent qu'un très-petit nombre de pieds de blé, les tiges y étoient foibles, & les épis médiocres.

XXXIIe Expérience.

Le blé que je semai dans la marne seule, & qui étoit la matière de la trente-deuxième expérience, réussit très-bien en 1771 ; il étoit de la plus grande beauté en 1772 ; on

y remarquoit en effet des épis de ſix pouces de longueur. Le ſuccès de cette expérience ne fut pas auſſi frappant l'année ſuivante: quoique le blé y eût aſſez bien réuſſi, il n'avoit pas en 1773 cette vigueur dans les tiges, & cette beauté dans les épis qui caractériſoient celui que j'avois obtenu de la même marne l'année précédente.

XXXIII, XXXIV & XXXV.es Expériences.

Les dernières expériences que je viens de rapporter ne roulent, comme on a vu, que ſur chacune des matières qui avoient fait partie des terres compoſées dont j'ai d'abord parlé: je les ai répétées à l'égard de pluſieurs de ces matières, pendant trois ans, par des épreuves doubles, dans la vue, ou d'obtenir des réſultats pareils, ou d'examiner la cauſe des différences qui s'y rencontreroient. On peut ſe rappeler que le blé a très-bien réuſſi, dans la vingt-huitième expérience ſur les retailles de pierre ſeules, & que ce ſuccès y a été complet pendant trois ans: il ne s'eſt pas ainſi ſoutenu dans la trente-troiſième, trente-quatrième & trente-cinquième expérience, où je n'avois employé également que des retailles de pierre. Si dans la première de ces trois épreuves correſpondantes, le blé après n'avoir donné, il eſt vrai, qu'un produit médiocre en 1771, étoit en bien meilleur état en 1772, & a réuſſi encore mieux l'année ſuivante, j'ai obſervé que dans la trente-quatrième expérience la végétation a été plus foible que dans l'épreuve précédente: il eſt même arrivé, à l'égard de la trente-cinquième, que quoique le blé y eût réuſſi en 1772, il y manqua totalement en 1773. Mais je crois avoir reconnu la cauſe de ce dernier accident, laquelle peut avoir influé auſſi ſur l'inégalité de végétation dont je viens de parler. M'étant aperçu en effet que le blé ne levoit point, pendant que dans les autres pots les plantes s'étoient annoncées, je remuai à un ou deux pouces de profondeur la ſurface des retailles de pierre; je remarquai que le grain y avoit germé par-tout, mais que cette ſurface de deux pouces ou environ d'épaiſſeur, s'étant, pour ainſi dire, maſtiquée par le premier & unique arroſement qui lui avoit été d'abord néceſſaire, ou par les pluies ſubſéquentes, elle avoit

avoit empêché que les plantes ne ſortiſſent: les unes s'étoient repliées ſur elles-mêmes; d'autres s'étoient étendues horizontalement & étoient reſtées jaunes, faute d'avoir pu gagner l'air extérieur. Je préſume dès-lors que le peu de ſuccès de la répétition des expériences ſur les retailles de pierre peut avoir été occaſionné par la nature même de cette matière qui ſe durcit après avoir été mouillée, & devient aſſez compacte pour que le grain, lorſqu'il ſe développe, ne la pénètre que difficilement. Il étoit arrivé apparemment, par une de ces circonſtances heureuſes qu'on remarque quelquefois dans le cours d'un grand nombre d'expériences, qu'à l'égard de la vingt-huitième, dont on a vu le réſultat, le grain que je ſemai dans les retailles de pierre, ou ne s'y trouva qu'à une profondeur convenable, ou que ces mêmes retailles réduites à une moindre ténuité, donnèrent aux jeunes plantes des iſſues plus faciles pour percer la couche ſupérieure de ces retailles, puiſque j'ai eu pendant trois ans conſécutifs le plus grand ſuccès dans cette expérience.

XXXVI & XXXVII.es Expériences.

Quoiqu'il y ait eu auſſi beaucoup d'inégalité dans le produit des expériences que j'ai répétées ſur l'argile ſeule, néanmoins, pendant les trois années où je les répétai, par une double épreuve, les plantes n'y ont pas totalement péri, comme nous avons vu que cet accident eſt arrivé dans les retailles de pierre en 1773, & dans l'argile en 1772, ſuivant la trentième expérience; j'obtins même, dans la trente-ſixième, qui ne rouloit auſſi que ſur l'argile une touffe de blé vigoureuſe, garnie ſuffiſamment de tiges, & qui, dans le nombre des épis qu'elle portoit, en donna quelques-uns qui avoient ſix pouces de longueur. Le produit de la trente-ſeptième expérience, où l'argile ſeule étoit également employée, ne fut pas auſſi avantageux en 1772 & 1773 que le fut en 1772, celui de la trente-ſixième dont je viens de parler; cependant le blé, quoiqu'un peu inégal, s'y trouva aſſez beau dans les deux années où cette trente-ſeptième expérience eut ſeulement lieu.

L'obſervation que j'ai faite au ſujet des retailles de pierre

qui, en devenant trop compactes, gênent les grains dans leur germination, en font périr une partie, & s'opposent à l'accroissement des jeunes plantes qui ont pu vaincre les premiers obstacles, cette observation tombe également sur l'argile, qui par elle-même se durcit encore davantage que les retailles de pierre dans les grandes sécheresses. On ne peut venir à bout, en effet, de recueillir du grain dans de l'argile qui en a donné l'année précédente, qu'en la brisant de nouveau, en l'employant dans un état où en partie réduite en poudre, & en partie composée de petits morceaux d'inégale grosseur, elle est aisément pénétrée par l'eau: alors peu resserrée encore elle donne au grain logé dans ses interstices la facilité de germer; la jeune plante a même le temps de percer la couche qui la couvroit, & de jeter son premier feuillage avant que l'argile ait acquis un certain point de dureté que la plante n'auroit pas peut-être pu vaincre: ceci explique, je crois, pourquoi dans la trentième expérience dont j'ai fait mention plus haut, & où l'argile seule étoit employée, il ne germa qu'une partie des grains; pourquoi les plantes qu'ils produisirent étoient foibles au printemps de 1772; que leurs feuilles étoient étroites, & qu'elles périrent enfin avant que les tuyaux s'y fussent formés. Ces plantes, sans doute, n'avoient pas eu l'aisance, tant à la fin de 1771 qu'au commencement de l'année suivante, de développer leurs racines dans l'argile devenue trop compacte, & de s'y établir de manière qu'elles ne souffrissent au moins qu'en partie l'altération que les gelées & la sécheresse pouvoient y occasionner. Le succès complet que j'obtins dans l'argile en 1772, & par la trente-sixième expérience, ne laisse aucun doute sur les ressources que le blé y trouve pour son accroissement, comme dans les autres matières que j'ai employées; mais d'autres expériences prouvent en même-temps que l'argile par sa nature, lorsqu'on ne fait usage que d'elle seule pour en tirer des productions, a une disposition à se condenser, & une tenacité dans ses parties qui sont peu favorables à la végétation.

XXXVIII & XXXIX.es Expériences.

Outre l'expérience ſur les productions qu'on peut tirer du ſablon pur, que j'ai déjà rapportée, & qui a eu lieu ſur le même ſablon pendant trois ans; je fis encore uſage de cette matière pour une double épreuve en 1772 & 1773: le blé y réuſſit auſſi parfaitement la première de ces deux années & dans l'une de ces épreuves, que nous avons vu qu'il a réuſſi dans l'expérience du même genre dont j'ai parlé plus haut: il ne fut pas auſſi beau dans l'autre de ces deux épreuves, en 1772, comme j'ai remarqué qu'en 1773 il fut généralement inférieur à celui de l'année précédente. Un ſuccès frappant & au-delà de toute eſpérance, la même année, dans une double expérience; moins de ſuccès dans le même temps, & dans une épreuve correſpondante; une production plus foible, quoiqu'aſſez belle, l'année ſuivante, dans une triple expérience, me donneront lieu d'examiner, dans le réſumé que je ferai à la fin de ce Mémoire, d'où peut naître cette différence, & ſi la manière même dont les plantes prennent leur accroiſſement dans le ſablon ne laiſſe pas entrevoir la cauſe d'une pleine végétation dans certaines circonſtances, & de l'affoibliſſement des plantes dans d'autres.

XL.e Expérience.

J'employai encore les matières mélangées qui réſultent des décombres pour une deuxième épreuve: le blé y réuſſit aſſez bien en 1772; mais il y périt totalement l'année ſuivante, ſans que j'en aie aperçu la cauſe: on a vu que dans la première épreuve du même genre, dont j'ai rendu compte, cet accident n'eſt pas arrivé pendant trois années conſécutives: les productions que j'ai tirées des décombres, dans cette première épreuve, n'étoient pas à la vérité auſſi belles & auſſi abondantes que celles que j'ai obtenues des plâtras, du ſablon, du ſable, &c. mais la végétation s'y étoit conſtamment ſoutenue; & en 1773, particulièrement, j'y recueillis de très-beaux épis.

XLI, XLII, XLIII & XLIV.es Expériences.

On peut ſe rappeler que dans le grand nombre d'expériences ſur les matières mélangées dont j'ai donné le détail, la vingt-troiſième tendoit à examiner l'effet qui réſulteroit des cendres jointes à une certaine quantité d'argile & de

ſable. J'ai dit que le blé avoit été aſſez beau dans cette terre compoſée en 1771; qu'il y avoit réuſſi complètement l'année ſuivante, mais qu'en 1773, le ſuccès n'y avoit pas été, à beaucoup près, ſi marqué: on a vu encore que la curioſité ſeule m'ayant porté auſſi à tenter une expérience ſur les cendres de bois neuf uniquement, & à les employer ſans les avoir leſſivées, les plantes y moururent en 1771; que ne m'étant point rebuté de cet accident, je ſemai de nouveau du grain dans ces mêmes cendres; que le blé y réuſſit aſſez bien en 1772; qu'il y fut très-foible en 1773, mais qu'au moins il n'y périt pas. La perte totale des plantes en 1771 me porta d'abord à croire que cet accident ne ſeroit peut-être pas arrivé, ſi je n'avois fait uſage que de cendres leſſivées, ſur-tout en conſidérant que mon expérience réuſſit en 1772, qu'elle ne manqua point l'année ſuivante, & que j'étois fondé à regarder les cendres, pendant les deux dernières années, comme leſſivées juſqu'à un certain point, tant par le premier arroſement qui avoit été néceſſaire dans le moment où j'y ſemai le grain, que par les pluies auxquelles les cendres avoient été expoſées pendant dix mois ou environ que les plantes y avoient ſubſiſté pour leur entier accroiſſement. Ce fut par une ſuite de cette idée que je ſemai du grain en 1773, tant dans des cendres leſſivées que dans d'autres qui ne l'étoient pas: pluſieurs expériences de ce genre que je fis avec attention, & en les rapprochant les unes des autres, afin qu'elles fuſſent bien comparables, n'eurent aucun ſuccès: le grain germa, à la vérité, dans les cendres, ſoit chargées, ſoit dépouillées de leur ſel alkali; mais les plantes ne s'y montrèrent point; & à peine ai-je eu un pied d'orge dans un des pots qui contenoit des cendres leſſivées. Quoique je ne puiſſe pas compter exactement ſur ces dernières expériences, parce que j'y éprouvai des accidens qui coupèrent le fil de mes obſervations, & m'obligèrent de ſemer de l'orge au printemps, dans les mêmes cendres où j'avois mis d'abord du blé d'hiver, & enſuite du blé de mars; cependant j'ai remarqué, par un premier coup-d'œil, que les plantes ont

autant de peine à réuſſir dans les cendres leſſivées que dans celles qui ne le ſont pas; que la germination du grain un peu tardive, il eſt vrai, y a lieu comme dans les autres ſubſtances terreuſes; que les jeunes plantes qui s'élèvent des cendres ſont foibles & un peu rachitiques; que leurs premières feuilles ſont jaunes, flétries & paroiſſent ſouffrir, ſur-tout quand on les conſidère à côté d'autres plantes de la même eſpèce & du même âge, qui tirent d'une terre favorable toute la vigueur d'une pleine végétation. Ce n'eſt qu'après que les plantes qui ont pu réuſſir dans les cendres s'y ſont bien établies, & y ont multiplié leurs racines, qu'elles acquièrent un certain degré de force, qu'elles réſiſtent à la gelée, aux grandes chaleurs, à la ſécherefſe même, qu'elles donnent des tiges aſſez fortes, & fourniſſent des épis de quatre à cinq pouces de longueur, comme ceux que je recueillis des cendres en 1772. La difficulté qu'ont les plantes à y réuſſir, me donnera lieu d'examiner dans la ſuite de ce Mémoire, comment on pourroit préſumer qu'elles proſpèrent dans les autres matières que j'ai employées; quel avantage inhérent au principe de la végétation elles y trouvent, tandis que les cendres n'offrent qu'une partie de cette reſſource eſſentielle, & ſont de nature à la dérober aux plantes, loin de la leur procurer à meſure qu'elles en ont beſoin.

Après avoir donné le détail de mes expériences, tant ſur les terres compoſées, que ſur chacune des matières qui entroient dans leur mélange, je reviens à quelques-unes de ces expériences, ſoit comme plus dignes d'attention par elles-mêmes, par le ſuccès qu'elles ont eu, ſoit comme propres à faire naître des réflexions par l'inégalité de productions qu'on y a remarquée.

On a vu que dans la première de ces expériences, faite ſur $\frac{3}{8}$ d'argile, $\frac{3}{8}$ de retailles de pierre, & $\frac{2}{8}$ de ſable, le ſuccès avoit été complet pendant trois ans. On ſe rappelle encore que dans la quatrième & la cinquième expérience, où je n'avois employé que $\frac{2}{8}$ d'argile, $\frac{3}{8}$ de ſable, & une quantité pareille de retailles de pierre, les productions avoient

été également belles pendant trois années consécutives. Il résulte premièrement de ces trois expériences, qu'un quart d'argile, joint aux autres matières dont il y est parlé, est aussi avantageux que trois huitièmes mêlés avec ces mêmes matières : & il est bon, comme je l'ai déjà observé, qu'une moindre quantité d'argile produise dans les terres tout l'effet utile qu'on peut en espérer, par la raison qu'elle ne se mêle que difficilement avec les autres substances terreuses, pour une opération de l'espèce de celles dont il s'agit ici ; par la raison encore qu'elle tend trop par sa nature à les lier d'une manière intime, à empêcher qu'elles ne s'ameublissent parfaitement, & à leur donner une compacité que les plantes, dans certaines circonstances, ont de la peine à vaincre.

Il résulte en second lieu, du produit constant de ces mélanges, qu'ils paroissent aussi avantageux aux plantes que les bonnes terres ordinaires qui n'ont pas même porté de grain depuis long-temps, telles que la terre inculte du clos des Chartreux que j'ai employée dans la vingt-unième expérience, ou même que le sable limonneux tiré des fondations du nouvel hôtel des Monnoies, & dont j'ai fait usage pour la dix-neuvième & la vingtième expérience : il est remarquable encore que ces mélanges ont donné des productions plus belles que n'en rendent quelquefois des terres labourables ordinaires & en culture réglée, telles que la terre de Châtillon-sur-Morin, soit pure, soit jointe à de la marne & du fumier, laquelle, en l'un ou l'autre état, a été la matière de la neuvième & de la dixième expérience.

L'exposé que j'ai fait de la sixième & de la huitième expérience m'ayant donné lieu de remarquer que l'union du sablon d'Étampes avec l'argile n'étoit pas favorable aux plantes, parce qu'il résultoit de cette combinaison une matière dure que l'eau pénétroit difficilement, & qui, en gênant les plantes, les privoit encore d'une partie de l'humidité dont elles avoient besoin, je n'insisterai point sur l'inconvénient d'un pareil mélange qu'il est assez naturel de concevoir, & que l'expérience a confirmé. Il est vrai que le sablon ayant

été mêlé avec d'autres matières dont l'argile faifoit partie, dans la quatorzième & la feizième expérience, il n'a pas nui abfolument à la végétation, quoiqu'elle s'y foit moins foutenue dans une certaine force, qu'elle ne s'eft maintenue dans d'autres expériences dont j'ai parlé; mais ce même fablon produit un meilleur effet quand on le mêle avec d'autres matières qui approchent de fa nature, & qui, comme dans la onzième expérience, forment avec lui un compofé friable que l'eau pénètre aifément.

La marne jointe à une terre labourable ordinaire n'a pas produit un avantage fenfible, fuivant la feptième & la dixième expérience; le fumier uni à la marne, dans une terre de la même efpèce paroît y avoir été utile, fur-tout en 1772, fuivant la neuvième expérience; mais ce bon effet a difparu en 1773; le blé y étoit en affez mauvais état. Je n'ai garde, d'après ces premières épreuves & des obfervations faites fur d'auffi foibles mélanges, de regarder la marne, ou comme inutile lorfqu'on l'emploie feule dans les terres, ou comme d'une médiocre reffource, quand on l'y joint aux fumiers: toutes mes expériences tendent au contraire à prouver que la marne, par fa nature, peut améliorer un terrein fablonneux, & en général tous ceux où, par le défaut d'une quantité fuffifante d'argile & de matière calcaire, les parties terreufes font peu liées entr'elles, & perdent promptement l'humidité qu'elles reçoivent.

Quant à l'ufage où font les laboureurs de joindre le fumier à la marne, afin que celle-ci, difent-ils, produife l'effet qu'on en attend, il n'eft pas à préfumer, je crois, que cette utilité de la marne dépende foncièrement des engrais qu'on met dans les terres où elle a été répandue; elle a fon effet propre, mais qui doit devenir plus marqué quand les fumiers s'y trouvent réunis. Au furplus, un ufage univerfel, & depuis long-temps établi, paroît ne laiffer aucun doute fur l'utilité de ce mélange dans les terres: on fent d'ailleurs que favorable par lui-même à la végétation, il ne peut que rendre plus fertile un terrein où le fable eft très-abondant, tandis que

la partie argileuſe y eſt bien au-deſſous de la proportion convenable dans laquelle la contiennent les excellentes terres à labour, & les terres compoſées qui m'ont donné conſtamment de ſi beaux produits.

Le grain que j'ai ſemé dans les décombres de bâtimens joints, ſoit à l'argile ſeule, ſoit à d'autres matières, telles que le ſablon & la marne, n'y a réuſſi que juſqu'à un certain point, ſuivant la douzième & la quatorzième expérience, ou du moins, s'il y a eu un ſuccès complet en 1772, cet avantage ne s'y eſt pas également ſoutenu: on a vu même, par la vingt-neuvième expérience, que les décombres ſeuls n'ont pas été auſſi favorables à la végétation que d'autres ſubſtances terreuſes que j'ai employées pures: cependant ils paroiſſent produire un meilleur effet, lorſqu'on les mêle avec d'autres matières que lorſqu'on les emploie ſeuls. Mais comme ces décombres peuvent beaucoup varier, tant par la nature, que par la quantité des matériaux qui les compoſent, il ſeroit difficile de déterminer préciſément l'uſage qu'il conviendroit d'en faire, relativement aux eſpèces de terres ſur leſquelles on ſeroit à portée de les répandre. Il ſembleroit néanmoins que, de quelque manière qu'on les ſuppoſât compoſés, ils pourroient convenir aux terres trop abondantes en argile, par la raiſon qu'ils n'en contiennent pas eux-mêmes communément, & que les différentes matières qui s'y trouvent étant propres par leur nature à interrompre la trop grande liaiſon d'un terrein, elles peuvent le rendre plus pénétrable à l'eau, & contribuer en même-temps à le rendre meuble, à la faveur des labours multipliés.

On peut ſe rappeler que j'ai eu pour objet dans la quinzième expérience de faire un mélange qui eût quelque rapport avec une terre maigre & peu fertile: on peut ſe rappeler encore que dans la dix-ſeptième expérience j'ai employé en grande partie ce même mélange, mais en y ajoutant de l'argile, pour examiner ſi elle le rendroit plus avantageux. Ces deux expériences ont aſſez bien réuſſi: la végétation étoit belle, ſur-tout dans la quinzième, en 1772. L'argile qui,

qui, dans la dix-ſeptième, faiſoit partie du mélange, ne m'a pas paru produire plus d'avantages: peut-être le ſablon qui y étoit entré pour $\frac{3}{16}$ a-t-il nui un peu à l'expérience, comme nous avons remarqué qu'étant joint à l'argile dans d'autres épreuves, il n'a pas produit un bon effet.

En vain l'on eſpéreroit ſans doute de tirer d'un terrein ſablonneux, abondant en pierres, & où la terre végétale ne feroit qu'en petite quantité, des productions auſſi belles que celles que j'ai recueillies en 1772, dans la quinzième expérience, qui rouloit, comme on a vu, ſur un mélange de terre de la même nature, & qui pouvoit être aſſimilé à un ſol peu fertile; mais il y a ici une obſervation eſſentielle à faire ſur ce qui me paroîtroit être la cauſe d'un réſultat ſi différent.

Les terres réputées maigres, & qui ne s'annoncent que trop comme telles au premier coup-d'œil, ces terres conſidérées en grand, & dans les vues générales de l'Agriculture, ſeront toujours d'un foible rapport par elles-mêmes, & indépendamment des engrais dont on peut ſe ſervir pour les améliorer, parce qu'elles ne ſont pas de nature à conſerver long-temps l'humidité néceſſaire aux plantes: lorſque le ſable en effet y eſt trop abondant, elles ſont ſuſceptibles d'une grande chaleur; l'eau s'y évapore promptement, & les racines y languiſſent au Printemps & en Été, à moins que des pluies fréquentes ne réparent dans ces ſaiſons les pertes trop rapides que ces terres éprouvent. Il n'en eſt pas ainſi dans mes expériences particulières; j'obvie, autant qu'il eſt poſſible, à cet inconvénient d'une ſécheresſe ſi funeſte aux plantes, quelle que ſoit la matière où elles croiſſent, en plongeant dans la terre, & dans une terre qui recèle toujours une certaine moiteur, les pots où mes plantes s'élèvent: ils conſervent par-là, en effet, une grande partie de l'humidité qu'ils reçoivent par les pluies, & ils profitent en outre, à travers leurs parois, de celle que contient la terre dont ils ſont environnés.

En conſidérant que du plâtre, du ſable, des retailles de

pierres m'ont donné chacun ſéparément des productions vigoureuſes pendant trois ans, & qu'il n'y auroit jamais lieu d'attendre un pareil avantage d'un vaſte terrein qui ne ſeroit composé que de quelqu'une de ces matières, ou dans lequel elles ſe trouveroient mêlées, il ſeroit difficile, je crois, d'aſſigner une autre cauſe de la grande différence des produits, que celle dont je viens de parler: elle ſe préſente naturellement dans un des points de mes expériences, qui d'abord n'annonce rien de bien eſſentiel en ſoi, & qui cependant paroît être le principe de leurs ſuccès, puiſque mes plantes, à la grande ſécheresſe près dont je les y ai garanties, n'y ont pas trouvé plus de reſſources, pour la force qu'elles y ont acquiſe chaque année, que ne leur en auroit fourni un vaſte terrein ſablonneux, ou composé preſqu'entièrement de craie, comme la Champagne, dans certains endroits, en offre de très-étendus.

Quoique les fumiers ſoient avantageux en général dans l'Agriculture pour rendre la végétation plus forte, l'utilité n'en eſt pas cependant durable; & ſi une terre eſt privée d'engrais pendant pluſieurs années, après en avoir reçu aſſez abondamment, on s'en aperçoit bientôt, à moins que des labours multipliés & profonds, ſi la nature du ſol le permet, ne ſuppléent à l'avantage que procurent les fumiers, joints aux labours ordinaires.

Le fumier eſt entré dans pluſieurs des expériences que j'ai faites: il a produit un bon effet dans la neuvième en 1771 & 1772: je n'en ai tiré aucun avantage, pour cette même expérience, en 1773. Il en a été ainſi, à peu-près, pour la ſeizième. Je n'ai auſſi obtenu que de foibles productions en 1773, dans la dix-huitième expérience, où le fumier faiſoit partie du mélange, quoiqu'elles y euſſent été très-belles l'année précédente: il eſt vrai que dans la vingtième expérience où j'avois mêlé une certaine quantité d'engrais avec le ſable gras dont j'ai déjà parlé, j'obtins une forte végétation en 1771, & j'eus le ſuccès le plus complet en 1772 & 1773; mais ce ſable limoneux étoit par ſa nature

favorable à la végétation, comme on a vu dans la dix-neuvième expérience où je l'employai seul; & si le fumier l'a rendu encore plus fertile, sur-tout en 1773, année où cet engrais n'a paru d'aucune utilité dans d'autres matières, après y avoir produit son effet pendant deux ans, au moins doit-on faire entrer pour beaucoup dans le succès, le fond avantageux auquel le fumier étoit appliqué, & la combinaison plus heureuse qui, apparemment, en est résultée.

Je suis bien éloigné certainement de vouloir, d'après ces expériences, tirer des inductions positives sur le peu de durée de l'effet des fumiers dans les terres cultivées en grand, sur les avantages plus ou moins considérables qu'ils y procurent, & sur la nature des terres où ces avantages s'annoncent le mieux: je n'entrerai pas même dans la question de savoir si les labours multipliés, & la meilleure préparation des terres, en ce point seul, est capable de suppléer aux engrais avec la culture ordinaire, quoique les expériences dont je rends compte, & d'autres épreuves antérieures, pussent me conduire à toucher cette question, & à faire sentir toutes les ressources qu'il y a pour la végétation dans un terrein bien cultivé, & indépendamment du secours des engrais. Un coup-d'œil attentif sur les belles productions que j'ai eues constamment dans quelques-uns des mélanges qu'on a vus, & que j'ai obtenues séparément dans plusieurs des matières qui faisoient partie de ces mélanges, avertira sans doute de ces ressources frappantes; on les remarquera sur-tout avec surprise dans les produits que j'ai tirés du sablon pur: j'en parlerai bientôt, en expliquant la manière dont le blé a établi ses racines dans le sablon, & a gagné d'un côté ce qui lui étoit refusé d'un autre, par une matière si peu propre en apparence à la végétation: j'écarterai donc ces points particuliers de discussion qui m'éloigneroient de mon but, & demanderoient pour être approfondis des tentatives en grand, une longue suite d'épreuves & des combinaisons qu'un terrein de la même nature ne comporteroit pas. Qu'il me soit permis seulement d'insister un peu sur une réflexion que j'ai faite

au ſujet de la vingt-quatrième expérience, où j'employai $\frac{2}{8}$ de paille fraîche & hachée avec $\frac{3}{8}$ d'argile & autant de retailles de pierre. J'ai inſinué qu'on pourroit préſumer avec quelque fondement que le bon effet qui réſulte de l'emploi des fumiers eſt dû en partie à la ſubdiviſion, au ſoulèvement des parties terreuſes qu'ils occaſionnent par leur mélange avec elles: j'ai obſervé que par ce ſecours, purement mécanique, les plantes développent plus facilement leurs racines & en acquièrent de plus fortes; qu'une multitude de ramifications très-déliées ſont la ſuite de ce développement, & que la vigueur des plantes eſt proportionnée à la multiplication des ſuçoirs qu'elles ont pu produire. On verra cet avantage bien marqué dans les racines des plantes vigoureuſes que le ſablon a fournies, & que je comparerai à d'autres racines qui ont pouſſé dans un terrein ordinaire.

Il eſt certain que les fumiers, par leur ſubſtance, ſont très-propres à la nourriture des plantes, & que leurs ſucs ſeuls, dont une terre eſt imbibée, ſont ſouvent la cauſe des plus belles productions: on remarque en effet tous les jours qu'elles deviennent frappantes dans les petits eſpaces limités des terres labourables où l'on a dépoſé le fumier par monceaux, & où il a ſéjourné pendant quelque temps avant que d'être répandu ſur le terrein: ne laiſſât-on aucune des parties les plus groſſières de l'engrais ſur les endroits dont je parle, les plantes qu'ils produiſent ſe reſſentent du ſéjour des fumiers, & n'éprouvent ſans doute cet avantage qu'à raiſon des ſucs qu'ils ont dépoſés.

Ainſi, en convenant que les engrais, par les principes qui les conſtituent proprement, par l'état dans lequel on les emploie, & où ces principes peuvent être plus ou moins abondans, en convenant, dis-je, que les engrais, par eux-mêmes ſont favorables à la végétation, il y a lieu de penſer qu'ils contribuent d'ailleurs à rendre les terres moins compactes, & à faciliter aux plantes l'extenſion de leurs racines. On a vu dans le compte que j'ai rendu de la vingt-quatrième expérience, qui étoit dirigée, autant que mes foibles eſſais

le permettoient, vers le point particulier de physique dont il s'agit, que cette expérience n'a pas réussi, du moins pendant la première & la dernière des trois années où je l'ai faite. En réfléchissant sur le peu de succès que j'ai eu par le mélange de la paille hachée avec de l'argile & des retailles de pierre, on présumera avec beaucoup de fondement que si je n'ai pas réussi, c'est que les pailles, dans l'état de ténuité où elles étoient, loin d'avoir produit l'effet auquel elles paroissoient tendre, ont occasionné dans le mélange une liaison à laquelle je n'avois pas pensé. Je ne m'aperçus bien de cette liaison, & de la dureté qu'acquéroit par-là le mélange qu'au mois d'Octobre de l'année 1771 : je ne le réduisis alors qu'avec peine à l'état d'une terre broyée grossièrement. & tel qu'il convenoit pour que le mélange ainsi préparé reçût une nouvelle semence. Cet effet nuisible à la végétation, ne résulteroit pas sans doute de l'union de la paille simple avec une terre ordinaire où l'argile ne domineroit pas: on sent même qu'il en devroit naître un tout opposé, d'après l'idée que j'ai présentée, si ces pailles en nature de fumier, & divisées comme elles sont toujours par morceaux assez gros, se trouvoient entremêlées avec une terre forte & où l'argile abonderoit: ces petits amas de pailles, convertis en fumier, sont capables en effet d'interrompre alors la trop grande liaison des terres; d'empêcher qu'elles ne soient battues par les pluies, & d'y ménager des interstices, où ces mêmes pluies s'insinuent; tandis que cet avantage, si essentiel aux plantes, n'a lieu que superficiellement dans une terre compacte, & où les eaux ne trouvant pas jour à la pénétrer s'écoulent sans utilité sur la surface du terrein *(a)*.

(a) M. Duhamel, qui a donné dans ses Élémens d'Agriculture, *Tome I.er page 225*, un précis instructif d'une multitude d'expériences & d'observations en ce genre, qu'il avoit publiées successivement, remarque au sujet de l'utilité bien reconnue des fumiers, « qu'on ne sait point s'ils agissent en retenant l'humidité qui est absolu- « ment nécessaire pour la végétation, « ou en rendant plus légères les terres « trop compactes, pour mettre les ra- « cines en état de s'étendre, ou en ex- « citant par les substances grasses & « huileuses qu'ils contiennent une sorte « de fermentation dans l'intérieur de «

Il eſt donc aſſez naturel de penſer que l'emploi du fumier dans les terres eſt doublement avantageux. Si les Agriculteurs & même preſque tous les Auteurs qui ont écrit ſur cette matière n'ont pas été frappés juſqu'ici de l'utilité particulière que je crois pouvoir y attacher, c'eſt uniquement parce qu'ils ne ſe ſont rendus attentifs qu'à celle qui eſt inhérente à la nature même des engrais; par la raiſon encore que ces deux avantages ſont toujours réunis, & que des expériences ſur un terrein où il n'entroit point de fumier, & où le ſuccès cependant s'eſt long-temps ſoutenu, ne pouvoient conduire qu'indirectement les Agriculteurs à les bien diſtinguer *(b)*.

» la terre; fermentation qui aide à cette » eſpèce de digeſtion, par laquelle ſe » prépare dans la terre le ſuc nourri- » cier des plantes; ou enfin ſi quelque » partie des fumiers, ſoit huile, ou ſel » volatil, paſſe comme aliment dans les plantes ».

Il paroîtroit aſſez certain, d'après le bon effet que les fumiers produiſent dans les terres, lors même qu'ils n'ont ſéjourné ſimplement qu'à leur ſurface, & que les ſucs qu'ils contenoient ont ſeuls pénétré dans les terres, à quelques pouces de profondeur; il paroîtroit, dis-je, qu'on ſeroit fondé à conclure qu'ils y agiſſent par leur vertu propre, & en procurant aux plantes, ou un aliment particulier, ou un ſecours pour mieux tirer des terres celui qu'elles en reçoivent.

En admettant l'avantage qui réſulte des fumiers par eux-mêmes, lorſqu'on les mêle avec les terres, on pourroit encore, par une ſuite d'un des meilleurs principes d'Agriculture, qui eſt l'ameubliſſement du ſol, conſidérer les fumiers comme opérant, ainſi que je l'ai dit, par une voie mécanique, & tenant les terres fortes, pendant quelque temps un peu plus ſoulevées qu'elles ne le ſeroient ſans cette interpoſition des engrais.

Ainſi les principes reçus en Agriculture, & l'expérience même ſe réuniroient pour faire regarder les fumiers comme utiles à pluſieurs égards, quoiqu'il pût y avoir un côté par lequel cette utilité fût plus marquée. Et ceci donne lieu d'obſerver qu'il y a ſouvent dans les agens qui concourent aux opérations de la Nature, un avantage plus étendu que celui qu'on entrevoit; & que le point utile qui nous frappe, ou n'eſt pas quelquefois le principal en ſoi, ou n'auroit pas l'effet avantageux que nous remarquons, ſi d'autres moins apparens ne concouroient pas à la production de cet effet. Tout eſt lié admirablement dans la Nature, tout s'y prête un ſecours mutuel; & nous ſaiſirions mieux ſans doute les vérités qui s'y trouvent unies, ſi nous les conſidérions moins d'une manière iſolée, & relativement aux premières idées, quoiqu'aſſez juſtes en elles-mêmes, qui ſe préſentent aux eſprits attentifs.

(b) Lorſqu'on marche dans une terre labourable, nouvellement enſemencée, & où il a été répandu une quantité ſuffiſante de fumier, avant que le dernier labour, ou la derniere préparation à la herſe y ait été donnée, on s'aperçoit que le pied plonge ſouvent dans cette terre, & qu'elle eſt beaucoup plus ſoulevée que ne l'eſt

J'ai fait obſerver, en rendant compte des productions que j'ai tirées du ſablon pendant trois ans, & par des expériences répétées, qu'il y avoit eu de l'inégalité dans la force des produits. Si le ſuccès, dans quelques-unes de ces épreuves a été beaucoup au-delà de ce que je pouvois attendre, il n'en a pas été ainſi dans quelques autres. Cependant tout étoit égal, en apparence, tant dans la matière des expériences que dans la façon de les exécuter. Les différens pots que j'y avois employés contenoient la même eſpèce de ſablon; ils avoient reçu une ſemence pareille, & je les avois renfermés tous dans la terre, à quelque diſtance les uns des autres, & à un travers de doigt près des bords ſupérieurs de ces pots, afin que la terre du jardin, ſe trouvant un peu au-deſſous, ne ſe mélât pas avec le ſablon. S'il n'y a eu aucune différence dans les précautions qu'il étoit naturel que je priſſe pour des expériences correſpondantes, & qu'il y en ait eu cependant dans la quantité & la force des productions, on doit préſumer que tout n'a pas été égal dans les ſecours que les plantes ont tirés, pour leur accroiſſement, de la terre qui environnoit les pots, & dans la facilité de recevoir ces ſecours, que la poroſité plus ou moins grande des pots pouvoit inégalement leur procurer.

Les blés que produiſent les meilleures terres labourables ne jettent qu'une quantité peu conſidérable de racines; de cinq ou ſix d'entr'elles qui ſont aſſez fortes, il en part d'autres plus menues, longues de trois à quatre pouces, & garnies elles-mêmes de ramifications très-légères: le chevelu de la racine des blés n'eſt pas abondant en général; mais il ſuffit

---

une autre terre préparée au même point, mais qui n'a pas reçu d'engrais. C'eſt préciſément cet état d'un terrein ſoulevé, à quelques pouces de profondeur, qui a des ſuites avantageuſes pour la végétation, & qu'on tâche d'obtenir par les labours multipliés; & ce dernier moyen y mène certainement; mais ſon effet n'eſt pas auſſi durable que celui qui naît de l'emploi des fumiers: par cette dernière voie il réſulte moins d'inconvéniens pour le grain, des fortes mottes de terre qui échappent toujours au ſoc de la charrue, & on ſuſpend bien plus long-temps l'affaiſſement des terres.

en cet état, dans les meilleures terres, pour la production parfaite du grain.

La marche de la Nature n'eſt plus la même, lorſque les plantes doivent paſſer par tous les degrés de leur accroiſſement dans une matière où elles ne trouvent preſque point de reſſource pour leur nourriture, & où l'humidité ſupplée ſeule aux ſecours qu'un terrein moins ingrat fourniroit: les plantes alors jettent d'abondantes racines; les ramifications ſe multiplient; elles ſe développent en tout ſens; & il ſemble que leur nombre augmente à meſure qu'il y a de l'humidité à ſaiſir, & qu'elles en trouvent la facilité, par le peu de liaiſon de la matière dans laquelle la plante croît.

L'obſervation que je fais ici, a une application bien naturelle dans les productions que j'ai obtenues du ſablon, & ſur-tout dans le produit qu'il m'a donné en 1772. Je ne m'arrèterai pas à conſidérer que les pieds de blé provenus de cette expérience, portoient des tiges plus vigoureuſes & plus élevées qu'elles ne le ſont communément; des épis de cinq à ſix pouces de longueur, & bien fournis de grains qui acquirent toute leur maturité: mon principal objet, dans ce moment-ci, eſt de faire remarquer que les racines du blé produit par le ſablon, étoient tout autrement garnies de ramifications qu'on ne les voit dans les blés ſortis des terres labourables; elles étoient étendues dans toute la maſſe du ſablon, & formoient une touffe de chevelu très-fin qui répondoit, pour ſon volume, à la capacité du pot où avoient été élevées les plantes dont ces racines dépendoient. Ce qui mérite encore quelque attention, dans cette prodigieuſe multiplication des racines, qui étoit dûe principalement à l'état de moiteur que conſervoient les pots, dans mes expériences, comme environnés toujours d'une terre humide, c'eſt que les parois intérieures de celui qui contenoit le ſablon étoient tapiſſées d'une eſpèce de toile fine & croiſée en tout ſens, qui n'étoit autre choſe qu'un tiſſu de racines très-déliées: en ſe croiſant ainſi les unes ſur les autres, elles avoient renfermé dans leurs interſtices des particules de ſablon; & le tiſſu qui en

en étoit résulté avoit toute la souplesse d'une toile ordinaire & une certaine consistance qu'il a encore aujourd'hui, quoique très-desséché. Il falloit en effet que ces racines qui, en partant du pied des plantes, se prolongeoient sans cesse, pour profiter de l'humidité toujours nouvelle des parois intérieures du vase où elles étoient maintenues, se collassent enfin à ces mêmes parois, ne pouvant pas aller au-delà, qu'elles s'y étendissent continuellement & s'y entremêlassent en faisant entrer dans leur texture irrégulière les particules de sablon qu'elles rencontreroient. Ce fait, bien constant, & sur lequel on jugera qu'il étoit à propos que j'insistasse, explique comment, dans une matière aussi peu propre par elle-même que le sablon pour la production des plantes, elles y trouvent cependant des ressources; elles profitent du peu de liaison des parties pour s'y insinuer en tout sens, & s'y établissent de manière à ne rien perdre de l'humidité, de la moiteur simple quelquefois qui les fait subsister *(c)*.

(c) Je répète, en 1774, toutes les expériences que j'ai rapportées, & j'y en ajoute d'autres dont je rendrai compte à la suite de ce travail. Parmi ces dernières, il en est quelques-unes qui prouvent au moins autant que celles où je n'ai employé que le sable & le sablon, combien l'humidité seule, & indépendamment de toute matière terreuse, influe sur la végétation. Au moment où l'on imprime ce Mémoire, je recueille du blé de mars qui n'a crû cependant que dans du verre pilé & réduit à la ténuité assez inégale d'une terre ordinaire. Quoique les plantes qui m'ont donné ce blé se soient trouvées très-foibles, & n'aient produit que des épis un peu courts, ce qui peut avoir été occasionné par toute autre cause que la nature de la matière où elles ont été élevées, puisque j'ai remarqué le même affoiblissement de plantes dans d'autres matières beaucoup plus favorables à la végétation, cependant les grains que le verre pilé m'a fournis sont parvenus à leur maturité, & pourront sans doute se reproduire eux-mêmes dans la matière si ingrate où je les ai recueillis: plusieurs de ces grains, en effet, que j'ai semés dans une terre ordinaire, y ont déjà germé, & produit au-dehors leurs premières feuilles; ce qui suffit sans doute pour déterminer l'effet essentiel de la végétation. Je dois faire observer encore que la principale maladie du froment, dont j'ai désigné les suites pernicieuses sous le nom de *carie*, s'est manifestée dans le blé de mars que j'ai recueilli du verre pilé. J'avois déjà prouvé par une multitude d'expériences que cette maladie contagieuse étoit absolument indépendante du sol où le blé croissoit, & qu'inhérente à la plante même, elle se perpétuoit principalement par la poudre pestilentielle que les grains corrompus contenoient. Voilà dans les

Jusqu'ici on voit évidemment que les plantes produites par le sablon ne le cèdent en rien à celles que fournissent les meilleures terres, & que ce succès est dû à la multiplication des racines dans une matière conservée en un certain état d'humidité, ou au moins de fraîcheur, & favorable par sa nature même à leur développement : mais on ne saisit pas d'abord la cause de l'inégalité bien marquée de production, dans des expériences correspondantes, où tout paroît égal, pour les précautions qu'elles exigeoient.

Il est certain que les pots relatifs à ces expériences étant peu éloignés l'un de l'autre ont reçu, pendant l'espace de neuf à dix mois, le même bénéfice des pluies, & que l'humidité fournie au sablon de ce côté-là, ou la diminution de cet avantage, par les sécheresses accidentelles, ont dû s'y trouver les mêmes dans le cours de la végétation : mais l'humidité que les pluies procuroient au sablon n'étoit pas la seule, & peut-être la principale dont il profitât dans mes expériences : celle que contenoit la terre dont les pots étoient environnés leur devenoit utile, n'eût-ce été que pour entretenir les parois des pots dans une fraîcheur constante, & suppléer à l'évaporation de l'eau que le sablon recevoit par le secours des pluies.

S'il est certain que par cette précaution nécessaire, j'ai obtenu de très-belles plantes du sablon pur, il ne l'est pas de même que j'aie placé les pots de mes expériences correspondantes dans des endroits susceptibles du même degré

grains *cariés* que le verre pilé m'a donnés, parmi d'autres qui étoient sains, une nouvelle raison d'attribuer la cause de cet accident à toute autre chose que la nature du terrein, puisque la matière la moins capable de communiquer quelque vice aux plantes, telle que le verre, en a produit cependant qui étoient attaquées de la plus funeste des maladies auxquelles le froment soit sujet.

Des fragmens de brique broyés grossièrement, dans lesquels j'ai semé aussi du blé de mars m'ont fourni les mêmes résultats que le verre pilé, quoique cette première matière mette peut-être plus d'obstacles que le verre à l'accroissement des plantes, par la raison que les molécules de l'argile cuite & ensuite broyée absorbent l'eau facilement, en recèlent une partie, & privent par-là les racines des plantes d'une espèce de *contact aqueux* dont je parlerai bientôt.

d'humidité, & capables par leur diſpoſition de la conſerver auſſi longtemps, & au même point les uns que les autres. D'ailleurs, les parois & le fond de ces pots ont pu ſe trouver plus ou moins perméables à l'eau que contenoit la terre dont ils étoient environnés: ceux de ces vaſes, aſſez mal cuits ordinairement, à travers deſquels elle a plus facilement tranſſudé, ſont devenus pour le ſablon, tant une ſorte de canal bien diſtribué pour l'entretenir humide, qu'un moyen auſſi également réparti pour l'écoulement de l'eau ſurabondante que le ſablon avoit pu recevoir. Ainſi l'on pourroit je crois expliquer par l'humidité inégale que les pots de mes expériences recevoient extérieurement l'inégalité de productions que le ſablon y a données.

Quelle qu'en ſoit la cauſe, qu'il eſt moins utile que curieux d'approfondir, on obſervera ſans doute, en réfléchiſſant ſur les plantes vigoureuſes que j'ai recueillies du ſablon, combien l'eau ſeule, & appliquée aux racines par un léger contact, & ſans interruption, contribue eſſentiellement à la végétation: on ira plus loin peut-être, en ſoupçonnant qu'un des plus grands avantages des bonnes terres labourables eſt de ſe maintenir toujours, par la nature des parties qui les compoſent, dans un certain degré d'humidité, en même-temps que ces parties n'empêchent point, par une trop grande liaiſon entre elles, que les racines des pieds de blé ne s'y ramifient, autant que cette plante l'exige, & qu'elles n'y jouiſſent de l'humidité que les excellentes terres conſervent.

Je n'ignore pas que le fond de l'obſervation que je viens de faire n'a pas, à certains égards, le mérite de la nouveauté, & qu'on emploie depuis long-temps l'eau pure, des éponges ou des étoffes humectées, & des vaſes de terre très-poreux, pour s'aſſurer de la germination des grains, & la ſuivre à découvert; pour faire éclore les plus belles fleurs, pour élever des plantes & même des arbriſſeaux. Il y a près de vingt ans que j'ai obtenu moi-même, de la mouſſe pure & ſimplement humectée, des blés de la plus grande beauté, & que j'ai fait régner dans une partie des blés produits par cette

mouſſe la maladie contagieuſe à laquelle ils ſont ſujets, ſans que leur vigueur en ait paru d'ailleurs affoiblie: mais il étoit queſtion dans le cours de mes expériences de rapprocher les terres, ſoit naturelles, ſoit compoſées à deſſein, qui ſont les plus favorables à la végétation, de celles qui ſont regardées comme les moins propres à l'entretenir; de comparer les produits qu'elles auroient rendus, & d'examiner la marche de la Nature dans des ſubſtances terreuſes où elle tend toujours à ſon but, en variant les moyens qui l'y conduiſent. Or, c'eſt ce qui n'avoit pas encore été conſidéré expreſſément: on n'avoit pas remarqué, comme je crois l'avoir fait avec aſſez de fondement, que l'avantage des meilleures terres eſt moins peut-être dans la nature des parties qui les conſtituent, & à la qualité deſquelles on attribue communément la fertilité, que dans la propriété qu'elles ont par un heureux mélange, de conſerver long-temps l'humidité ſi eſſentielle aux plantes, & de ne point oppoſer d'obſtacles à l'extenſion de leurs racines.

Dans les articles de ce Mémoire où il eſt queſtion de l'emploi des cendres pures, on a vu le peu de ſuccès que j'en ai tiré. Quoique des recherches ſur la cauſe à laquelle on peut l'attribuer ne conduiſent pas à une utilité bien marquée, j'ai cru cependant devoir en faire quelques-unes, ne fût-ce que pour mieux ſentir l'effet des moyens par leſquels j'ai réuſſi dans certaines circonſtances, en découvrant que dans d'autres ces moyens m'ont été, pour ainſi dire, dérobés.

Il eſt certain qu'en 1772, j'ai recueilli de très-beau blé des cendres ſeules: la touffe qu'elles ont donnée étoit peu fournie, il eſt vrai; mais pluſieurs tiges y étoient vigoureuſes, & portoient des épis de quatre à cinq pouces de hauteur: ainſi il n'eſt pas douteux que la végétation ne puiſſe avoir lieu dans cette matière, quoique beaucoup plus difficilement que dans les autres dont je me ſuis ſervi.

J'ai inſiſté, dans l'article qui concerne les produits donnés par le ſablon, ſur l'influence eſſentielle qu'avoit l'humidité dans la formation des plantes en général, & ſur la part

qu'elle avoit eue principalement dans les productions que j'ai tirées du ſablon ſeul: ce ſecours, ſi néceſſaire aux végétaux, s'eſt rencontré ſans doute dans les cendres dont j'ai fait uſage; mais les molécules de matière deſtinées à ſe charger des particules aqueuſes ne ſe trouvent-elles pas conſtituées dans les cendres de toute une autre manière qu'elles ne le ſont dans les ſubſtances terreuſes, dans le ſablon, &c? Plus diſpoſées que celles de ces dernières ſubſtances à recevoir l'humidité, parce qu'elles ont été criblées de toutes parts par le feu, n'ont-elles pas la propriété d'abſorber l'eau en grande quantité, & de la recéler ſi intimément qu'elles n'annoncent à leur ſurface qu'une légère humidité? Cette qualité abſorbante des cendres, conſidérée d'un certain côté, & la liaiſon aſſez forte qu'elles acquièrent, à meſure qu'elles s'affaiſſent, en ſe deſſéchant, n'auroient-elles pas nui aux productions que j'ai eſſayé d'en obtenir? Perſonne n'ignore qu'une meſure déterminée de cendres sèches abſorbe une plus grande quantité d'eau, qu'une pareille meſure de ſablon, lorſqu'on veut donner à ces deux matières le même degré apparent d'humidité. J'ai deſiré de connoître, par une expérience en petit, où pouvoit aller la différence de la quantité d'eau qu'elles exigeroient pour avoir la moiteur que conſervent toujours les terres labourables à un ou deux pieds de profondeur. On ſent bien que cette expérience ne conduiſoit pas à une certaine préciſion; mais elle ſuffiſoit pour le raiſonnement que j'avois à établir, & qui va ſuivre l'expoſé ſimple de l'expérience que je fis.

Après avoir paſſé à un tamis très-fin des cendres sèches de bois neuf, & du ſablon d'Étampes, je remplis de l'une & l'autre de ces matières une meſure qui contient douze pouces cubes: je ne les comprimai point dans la meſure; je me contentai de frapper pluſieurs coups ſur une table avec la meſure même, pendant que j'y verſois les cendres ou le ſablon, afin que ces matières, très-différentes pour le poids, y priſſent par ces ſecouſſes tout l'affaiſſement dont elles étoient ſuſceptibles: lorſqu'elles ſe furent entaſſées au

point où elles le pouvoient par ce seul moyen, & que la mesure, malgré les secousses, resta toujours comble, je la raclai avec soin, & je pesai les cendres & le sablon qu'elle avoit contenus. Les douze pouces cubes de cendres obtenus par ce moyen, pesoient cinq onces, cinq gros, soixante-deux grains; & le même nombre de pouces cubes, en sablon, étoit du poids d'un marc, trois onces, deux gros, cinquante grains. Je mis chacune de ces matières dans une capsule de verre, & après avoir pesé une quantité d'eau bien déterminée, j'en versai d'abord peu à peu sur le sablon, en le remuant avec une petite cuillier d'argent, & en tâchant de faire prendre à la masse totale le degré d'humidité, la moiteur à peu-près qui étoit nécessaire pour que je pusse la pelotonner; six gros & demi d'eau suffirent pour cet effet, tandis que je ne l'obtins, à l'égard des cendres, qu'en y versant deux onces, quatre gros & demi d'eau: elles en absorbèrent par conséquent trois fois autant, & même au-delà, que le sablon en avoit reçu, sans qu'à l'extérieur elles parussent plus humectées; & c'est le point particulier où il falloit que je vinsse pour l'observation que j'ai à présenter. S'il est naturel de penser que les racines des plantes pompent l'humidité de la terre, par le contact des parties de celle-ci qui s'y appliquent & environnent de toutes parts les ramifications dont les racines principales sont garnies, on doit croire que les substances terreuses dont les molécules recèlent le moins les particules aqueuses & en sont principalement chargées à l'extérieur, sont les plus propres à communiquer l'humidité qu'elles reçoivent, puisque leurs molécules sont disposées à s'en dépouiller par la simple juxtaposition d'une substance moins poreuse qu'elles, & organisée d'ailleurs d'une manière admirable pour saisir cette humidité: or les molécules des cendres sont de nature à concentrer en elles l'eau dont on les a abreuvées, & à ne l'annoncer à l'extérieur qu'autant qu'elles en ont été saturées: en supposant donc que dans une mesure égale de cendres & de sablon, on verse & on entretienne une quantité d'eau pareille & suffisante en

elle-même pour élever des plantes, l'humidité que leurs racines trouveront dans le ſablon, & dont elles ne perdront rien, ſuffira pour leur accroiſſement, tandis qu'elles ſouffriront dans les cendres & y périront infailliblement, faute d'un ſecours, au milieu duquel elles ſeront, mais qu'elles n'auront pas la facilité de ſaiſir.

On ſe rappelle ſans doute que les terres, ſoit pures, ſoit mélangées, dont j'ai fait uſage, n'ont été entretenues dans l'humidité qui leur étoit néceſſaire que par l'eau des pluies, & par celle que leur procuroit la terre dans laquelle les pots étoient plongés: ſi la quantité qu'elles en ont reçue, par ces deux canaux ſeuls, a ſuffi, du moins à l'égard de la plupart de mes épreuves, pour que la végétation y ait réuſſi, il ne paroît pas, d'après l'expérience dont je viens de donner le détail, qu'elle ait dû ſuffire aux cendres, pour qu'elles fourniſſent aux plantes l'aliment dont elles avoient beſoin: nous avons vu en effet qu'une quantité d'eau triple de celle qui avoit donné au ſablon un certain degré de moiteur, avoit été néceſſaire pour mettre les cendres au même point d'humidité, ou à peu-près. Il y a plus encore; lorſqu'on sème du grain dans des cendres auxquelles on a prodigué l'eau, afin qu'après l'écoulement de celle qui eſt ſurabondante, il en reſte ſuffiſamment pour amollir le grain & produire la germination, on remarque que la couche de cendres qui recouvre le grain, en s'affaiſſant comme elle doit naturellement le faire, paſſe bientôt à un certain état de ſéchereſſe, ou, pour mieux dire, de diminution d'humidité que les terres ordinaires n'éprouvent point, ou qu'on n'y obſerve que beaucoup plus tard: cette couche & la partie même des cendres qui environne le grain, quoique foncièrement humides, ne le ſont pas aſſez, par la raiſon que j'ai expoſée plus haut, pour en amollir l'écorce, pour rendre laiteuſe la farine qu'il contient, & faciliter la ſortie du germe. Auſſi obſerve-t-on qu'une grande partie des grains qu'on sème dans les cendres, y ſont ſujets à avorter, & que ceux qui y réuſſiſſent ne percent que très-tard la couche qui les

recouvre. Ces effets ſont tout autrement ſenſibles, quand on ſuit une expérience de la nature de celle-ci à côté d'une autre où l'on emploie de la terre ordinaire, & où la Nature, libre dans ſa marche, avertit, par oppoſition, de ce qui l'arrête dans une ſubſtance terreuſe dont on a de la peine à tirer des productions.

On reconnoît actuellement que les détails dans leſquels je viens d'entrer devenoient néceſſaires, pour que de l'examen de pluſieurs de mes expériences, où j'ai réuſſi, & de celles où je n'ai eu que peu de ſuccès, je puſſe tirer la lumière qu'elles ſe prêtent mutuellement. Si en effet l'explication que j'ai donnée de la cauſe du défaut de productions dans les cendres, ou au moins du petit nombre de plantes que j'y ai quelquefois recueillies, ſi cette explication paroît plauſible, il en réſultera que cette cauſe n'a pas exiſté dans les expériences où les plantes ont réuſſi. En diſant que la végétation, ou a été au contraire très-foible, ou même n'a pas eu lieu dans les cendres, j'en ai donné pour raiſon, non préciſément un défaut d'humidité en elles, & quant à leur maſſe totale, mais la propriété nuiſible qu'ont leurs molécules de recéler l'eau intimément, & de priver par-là les racines d'une eſpèce de *contact aqueux*, ſi je peux m'exprimer ainſi, qui eſt néceſſaire à ces mêmes racines pour recevoir & tranſmettre au corps de la plante les particules d'eau qu'elles ſont à portée de pomper.

Dès-lors on ſent que toute ſubſtance terreuſe qui n'a pas cette qualité abſorbante, ou qui ne l'a que juſqu'à un certain degré, eſt propre pour la végétation: dès-lors on eſt moins étonné du ſuccès des plantes dans le ſablon pur, parce que tout ingrat qu'il ſemble pour leur production, il a, par rapport à elles, le grand avantage de ne leur rien ſouſtraire de l'humidité qu'il a reçue: on remarque de nouveau que les parties propres des meilleures terres labourables étant conſidérées ſeules, ne contribuent peut-être pas autant à la nourriture des plantes qu'on l'a cru juſqu'ici; que leur qualité excellente pourroit conſiſter eſſentiellement, comme je l'ai

déjà

déjà fait entrevoir, dans un mélange de matières terreuſes ſi bien proportionné, que l'eau s'y imbibe avec aſſez de facilité, qu'elle n'y éprouve pas une évaporation trop prompte, & qu'elle s'y communique ſans réſerve aux racines des plantes: dès-lors enfin on reconnoît que les particules d'eau, multipliées à l'infini dans les terres, jouent le plus grand rôle dans la production des plantes, abſtraction faite de l'utilité dont elles leur ſont en qualité de ſimples véhicules pour les ſubſtances dont elles ſe chargent, & qu'elles doivent être regardées, en quelque ſorte, comme l'ame & le fond ſans ceſſe renouvelé de la végétation *(d)*.

Il faudroit ſans doute bien d'autres expériences que celles dont je viens de rendre compte, & ſur-tout des épreuves en grand qui ſe ſoutinſſent dans leurs réſultats, pour qu'on pût en tirer des concluſions dont l'Agriculture profitât: auſſi n'en préſenterai-je aucune dans ce moment-ci, & mon deſſein n'eſt-il, en mettant ces premiers eſſais ſous les yeux de l'Académie, que de poſer quelques faits, à la lumière deſquels je continuerai mes recherches, & je me ferai un devoir de les ſoumettre à ſon jugement. On ſera peut-être étonné, au premier coup d'œil, des belles productions que les plâtras,

(d) D'après cette réflexion, qui naît, pour ainſi dire, de chacun des faits que j'expoſe, d'après des expériences encore que je fais avec ſuccès depuis pluſieurs années, pour recueillir tous les ans du froment dans une même terre, ſans y employer aucun engrais, & en me bornant à l'attention de l'ameublir dans l'eſpace court de ſix ſemaines ou deux mois, il ſera difficile, je crois, de regarder comme auſſi néceſſaire qu'on le ſuppoſe communément, le repos qu'on donne aux terres, ſous prétexte qu'elles s'épuiſeroient ſi l'on y ſemoit du blé tous les ans. Il y a toute apparence, & M. Duhamel en a fait auſſi l'obſervation, que le peu de temps qu'il y auroit entre le moment de la récolte & celui des ſemailles a écarté l'idée de tirer tous les ans du froment d'une même terre. Les hommes, bientôt épuiſés dans leurs productions paſſagères, ont meſuré les grandes opérations de la Nature ſur le prompt affoibliſſement de celles qui leur ſont propres: loin de remarquer, qu'à l'égard du point particulier dont il s'agit ici, la Nature a une marche ſoutenue, des reſſources conſtantes, un fonds inépuiſable, ils ont réduit en principe d'Agriculture ce repos des terres auquel la difficulté du travail, dans de grandes exploitations, le ſoin d'ameublir les terres par des labours multipliés & donnés par intervalles, la durée des ſemailles, l'intempérie des ſaiſons, la néceſſité ſeule obligeoit.

le ſable, le ſablon, la pierre pulvériſée & l'argile ſeule m'ont données: je crois cependant qu'on ſe rendra à la vérité de ces faits, d'après des expériences qui ont été expoſées, pendant trois ans, aux yeux d'un grand nombre de perſonnes, & que la curioſité leur a fait ſuivre avec la même attention que j'y donnois: d'ailleurs, le témoignage de M.rs les Commiſſaires de l'Académie ne laiſſe aucun doute ſur la beauté de ces productions; ils en rendirent compte à la Compagnie au mois de Juin de l'année 1772. Mais il ſera difficile qu'en convenant de ce ſuccès frappant des plantes dans des ſubſtances terreuſes qui ne le promettent nullement, on ne ſente point qu'il ne ſeroit pas, à beaucoup près le même dans de vaſtes terreins qui ne ſeroient compoſés chacun que d'une ſeule de ces matières terreuſes, & qui n'auroient pas plus de ſecours étrangers à la nature du ſol que je n'en ai fourni aux petites portions de ces matières qui ont été ſéparément la baſe de mes expériences: j'ai déjà reconnu moi-même qu'on attendroit en vain une récolte avantageuſe d'un ſol qui ne ſeroit proprement que de l'argile ou du ſablon; il ſuffiroit même que l'une ou l'autre y dominât exceſſivement pour que la végétation y fût foible & y manquât même ſouvent par l'intempérie des ſaiſons. Lors donc que j'ai fait des expériences de ce genre, mon deſſein n'a pas été de tirer des conſéquences du particulier au général, quelque ſavorables que fuſſent en apparence les inductions où mes épreuves pouvoient conduire; j'ai eu pour but de ſonder, en quelque ſorte, la Nature, en cherchant, par des mélanges de terres, celui qui conſtitue les meilleurs fonds pour la production des grains; & d'exciter par-là, ſi je pouvois y parvenir, de riches propriétaires à tenter, dans des circonſtances favorables, des combinaiſons de terres, qui ſéparément, ou ſeroient ſtériles, ou ne rendroient pas au Cultivateur le fruit de ſon travail.

Il étoit naturel que des expériences ſur ces mélanges m'engageaſſent à en faire d'autres, ne fût-ce que par un ſimple motif de curioſité, ſur chacune des matières qui y entroient:

je n'en ai que mieux ſenti, je crois, la cauſe du dépériſſement des plantes dans un terrein ſablonneux, ou compoſé de pierres calcaires: s'il y a des circonſtances favorables, mais rares, où les plantes peuvent réuſſir juſqu'à un certain point dans ces ſortes de terreins, il eſt certain en général, qu'elles y languiſſent dans l'état ordinaire des ſaiſons, & que la plupart même y meurent en naiſſant. Si un effet tout oppoſé arrive dans des échantillons de ces mêmes terreins, échantillons bien mieux dépouillés de toute matière étrangère que ne le ſont les terres calcaires ou ſablonneuſes, il faut en conclure que le ſuccès des expériences, dans ces échantillons, eſt dû à quelque avantage qui leur étoit particulier dans mes épreuves, & dont de vaſtes terreins de la même nature qu'eux ſe trouveroient privés; or nous n'en voyons point d'autre qu'un certain degré d'humidité, inégal, il eſt vrai, mais conſtant pendant toute l'année dont ces échantillons ont joui, étant environnés d'une terre de jardin ordinaire, où cette humidité régnoit & ſe communiquoit à eux, à travers les parois des pots qui les contenoient. Quand on refuſeroit de croire qu'ils ont été proprement pénétrés de cette humidité extérieure, au moins eſt-il certain qu'elle les entretenoit dans la moiteur plus ou moins forte que les pluies, les roſées & les brouillards leur procuroient par intervalles, & qu'elle ſuppléoit en partie à l'évaporation qu'ils devoient éprouver dans les temps de ſéchereſſe & de chaleur. Il paroît donc que le défaut de fertilité des terres ſablonneuſes, compoſées de craie, ou abondantes en d'autres pierres calcaires, vient principalement de la perte aſſez prompte qu'elles font de l'humidité qui leur eſt communiquée, de la grande chaleur dont les ſables ſont ſuſceptibles, de l'évaporation de l'eau qu'elle y accélère, & du deſſéchement des plantes qui en eſt toujours la ſuite *(e)*.

(e) Rien ne prouve plus combien l'humidité ſeule, & ſur-tout celle qui ſe communiquoit aux pots de mes expériences par la terre dont ils étoient environnés, rien, dis-je, ne prouve plus clairement juſqu'à quel point cette humidité influoit ſur la végétation des plantes qui croiſſoient dans ces pots

L'utilité essentielle que j'attribue ici à la terre humide dans laquelle tous les pots employés pour mes expériences étoient plongés, paroîtroit n'avoir pas dû s'annonçer, ou au moins n'avoir pas dû être aussi marquée, par rapport à l'argile pure, qu'elle l'a été à l'égard des plâtras & du sable. L'argile, on le sait, se retire beaucoup en se desséchant: au premier coup d'œil qu'on jetoit, en Été, sur l'ensemble de mes expériences, il étoit facile de distinguer celles où l'argile étoit seule employée; sa retraite étoit telle qu'on eût passé le doigt entre les parois du pot & la petite masse d'argile qui s'y trouvoit contenue: l'effet étoit le même dans les mélanges dont l'argile faisoit partie; mais il étoit proportionné à la quantité de cette dernière matière qui étoit entrée dans le mélange: dès-lors on observe avec raison que l'argile, laissant ainsi un vide entre elle & les parois du vase, n'a

que ce qui est arrivé à l'égard de l'un d'entre eux, & qu'il est avantageux, en quelque manière, que je n'aie pas pas prévu. Le desir de mettre sous les yeux de l'Académie assemblée un échantillon des épreuves les plus décisives dont je lui avois rendu compte par écrit, me détermina au mois de Juin 1774, à faire transporter au Louvre un des pots qui ne contenoit uniquement que des retailles de pierre, & qui portoit cependant une des plus belles touffes de blé que j'eusse obtenues dans mes expériences. Les épis y étoient nombreux, en pleine fleur, & promettoient un grain bien nourri. Ce pot ne fut hors de la terre qui l'environnoit que pendant vingt-quatre heures: j'eus l'attention, lorsqu'on le remit dans l'endroit du jardin où il avoit été d'abord placé, de faire arroser autour de lui la terre dans laquelle il étoit plongé. Malgré cette précaution je m'aperçus bientôt que la touffe de blé commençoit à languir; les tiges jaunirent en peu de temps, les épis se desséchèrent, & je n'ai tiré de cette touffe de blé si vigoureuse d'abord, qu'un grain maigre, retrait & réduit en partie à la simple écorce. Si les pots voisins de celui-là, où les plantes ne s'annonçoient pas avec autant de vigueur, ont néanmoins donné du grain qui est parvenu graduellement à sa parfaite maturité, il faut en conclure que les différentes matières qu'ils contenoient s'y sont entretenues dans un certain degré d'humidité, à la faveur de la terre dont ils étoient entourés: il faut encore regarder comme certain que l'humidité qu'ils recevoient par-là leur étoit nécessaire, puisqu'il a suffi que le pot dont je viens de parler ait été exposé à l'air, mais à l'ombre, pendant vingt-quatre heures, pour que les plantes y aient éprouvé un dépérissement sensible, pour que leurs racines aient beaucoup souffert du desséchement momentané des parois extérieures du pot, & n'aient pas trouvé assez de ressources dans le peu de moiteur que les retailles de pierre avoient pu conserver.

pas dû profiter de l'humidité que la terre leur communiquoit; qu'elle l'a perdue dans une saison où il étoit le plus nécessaire que cette humidité extérieure suppléât à celle que l'argile avoit par elle-même, & que les grandes chaleurs dissipoient.

J'avoue que j'étois moi-même surpris que les plantes y subsistassent, malgré l'état de dureté & de sécheresse que j'y remarquois à l'extérieur, lorsque le secours des pluies avoit manqué à l'argile pendant quelque temps. Quoique frappé aussi, dans ces jours de sécheresse, de la vigueur des plantes que les sables produisoient, malgré l'état d'aridité où ils étoient à leur surface, je sentois qu'à la profondeur de deux ou trois pouces, la fraîcheur devoit y régner, & que les sables, toujours appliqués aux parois de leur vase, ne perdoient rien de l'humidité que ces parois recevoient.

Mais il faut faire attention que l'argile étant de nature à se resserrer fortement, elle est propre par-là à conserver assez long-temps l'humidité qu'elle a acquise; que des plantes, une fois établies en elle, & pourvues de toutes les racines qu'elles ont pu y jeter, subsistent du peu d'aliment qui s'y trouve concentré: peut-être, dans ces momens de disette, ne prennent-elles pas d'accroissement, & ne reçoivent-elles par leurs racines qu'autant qu'elles perdent par la transpiration: elles s'y épuiseroient sans doute, si la sécheresse passoit un certain terme; mais l'argile se ramollit bientôt, par le retour des pluies; & les plantes y prenant une nouvelle vigueur, parviennent à leur accroissement complet. Quoique l'argile, dans mes expériences, ait fait retraite en tout sens, elle n'a quitté, comme on le sent bien, que le tour intérieur du vase qui la contenoit; & appliquée toujours au fond du vase, elle s'y est entretenue dans une certaine fraîcheur dont la masse totale a dû se ressentir.

LA facilité que j'ai eue de faire dans un endroit renfermé, & à l'abri de tout dérangement, les expériences dont je viens de donner le détail, m'a conduit naturellement à

profiter d'une partie du terrein que j'avois à ma diſpoſition pour y répéter quelques-unes des expériences que j'ai faites il y a plus de vingt ans, ſur la cauſe de la principale maladie des grains, que j'ai déſignée ſous le nom de *carie,* & ſur les moyens de la prévenir.

On ſait qu'un des principaux caractères de cette redoutable maladie, conſiſte dans la converſion qui ſe fait de la partie farineuſe du grain en une poudre graſſe, noirâtre, d'une odeur fétide & peſtilentielle pour les blés les plus ſains qu'on auroit infectés de cette poudre avant que de les ſemer. On ſait encore, d'après les détails que j'ai donnés dans mes Mémoires ſur cette matière, que les grains attaqués de cette maladie conſervent à peu-près leur forme & leur propre pellicule, en ſe deſſéchant; que cette poudre contagieuſe s'y trouve, pour l'ordinaire, renfermée exactement; qu'elle peut s'y conſerver pendant un grand nombre d'années ſans une altération apparente, & qu'elle n'en ſort qu'autant qu'on écraſe le grain qui la contient.

Je conſervois depuis l'année 1757 une certaine quantité de ces grains de blé cariés, que j'avois tirés de leurs épis avec l'attention de ne les pas froiſſer, afin que leur pellicule, quoique ſéche & très-mince, reſtât en ſon entier, & maintînt toute la poudre contagieuſe qu'ils contenoient: j'avois mis ces grains de blé cariés dans un ſac de papier gris, lié avec une ſicelle, & renfermé lui-même dans une armoire où il n'étoit expoſé, ni à une ſéchereſſe extraordinaire, ni à une trop grande humidité.

Lorſque je commençai, en 1770, les expériences ſur le mélange des terres, que je viens de mettre ſous les yeux de l'Académie, je réſervai une partie du terrein dont je pouvois diſpoſer pour y pratiquer quelques planches, & les partager elles-mêmes en pluſieurs rayons, à un pied de diſtance ou environ, l'un de l'autre, afin d'établir une diſtinction bien marquée entre les produits du grain, différemment préparé, que je ſemerois dans ces rayons. Mon objet n'étant point ici de rendre compte du réſultat général de ces expériences,

mais ſimplement de celles qui avoient trait à l'emploi de la poudre des grains cariés, pour en infecter d'autres, qui par eux-mêmes étoient très-ſains, je me bornerai à parler de celles-ci, & ſi je fais mention des autres, ce ne ſera que pour établir une comparaiſon.

Je choiſis donc pour les épreuves que je projetois, du blé de l'année 1770, & qui provenoit de ma propre récolte; je deſtinai une partie de ce grain, qui étoit pur & très-net, ſoit à être employé ſans aucune préparation & tel qu'il étoit ſorti des épis, ſoit à être ſemé après que je l'aurois noirci & infecté abondamment avec la poudre des blés cariés de l'année 1757. Après avoir dreſſé une planche au milieu du terrein où je faiſois d'autres expériences, je la partageai en ſix rayons ſur ſa longueur; je ſemai, le 17 Octobre 1770, du blé pur dans le premier de ces rayons, du blé noirci dans le ſecond, & ainſi alternativement, afin que les produits étant plus rapprochés & ſe trouvant entremêlés régulièrement, les différences que j'y obſerverois me devinſſent plus ſenſibles.

Le blé leva également bien dans toute l'étendue de cette planche: je ne m'attendis à remarquer les premiers caractères de la maladie, dans le ſecond, le quatrième & le ſixième rayon qu'au commencement du Printemps; & j'étois tellement accoutumé à n'apercevoir que dans ce temps-là certains effets de la poudre contagieuſe ſur les jeunes plantes, que je ne m'occupai point d'elles pendant l'hiver, & que je différai tranquillement juſqu'à la fin du mois d'Avril, ou au commencement de Mai, pour reconnoître les premiers ſymptômes d'une maladie, de l'exiſtence de laquelle je ne doutois pas, dans la plus grande partie des ſecond, quatrième & ſixième rayons.

Mais je fus alors très-ſurpris de n'en remarquer que peu de veſtiges. J'avois toujours obſervé que les feuilles des plantes attaquées de cette maladie étoient un peu plus étroites & d'un vert plus foncé que celles des plantes ſaines; & qu'il y avoit dans tout leur port quelque choſe de diſtinct, que

l'habitude de les conſidérer me faiſoit aiſément ſaiſir. Les plantes des ſix rayons me parurent à peu-près égales, tant pour la nuance du vert que pour l'état du feuillage. Je n'aperçus encore aucune différence entre elles pendant l'Été: les tiges s'élevèrent, les épis fleurirent, & donnèrent en général du blé auſſi ſain que je l'aurois eſpéré d'une ſemence dans laquelle je n'aurois ſoupçonné aucun vice, mais que je n'aurois pas préparée.

Après une multitude d'expériences que j'avois variées de mille façons en particulier; après des épreuves authentiques faites à Trianon, & répétées aux environs de Paris, par ordre de l'Académie *, qui toutes prouvoient évidemment que la poudre des blés cariés étoit contagieuſe pour le grain le plus pur qu'on en infectoit, on ſent combien je dûs être ſurpris de voir que cette poudre n'avoit produit preſque aucun effet nuiſible, dans la circonſtance dont je viens de parler.

* *Mém. de l'Acad. année 1759.*

Mon premier ſoupçon, qui étoit aſſez naturel, à la vue de ce fait extraordinaire, mais qui peut-être ne ſe ſeroit jamais préſenté à mon eſprit, ſi l'expérience dont il s'agit ne l'eût pas fait naître, mon ſoupçon, dis-je, tomba d'abord ſur l'affoibliſſement, quant à la qualité maligne, que les grains cariés dont je m'étois ſervi pouvoient avoir éprouvé dans l'eſpace de douze à treize ans; car j'étois certain que cette qualité peſtilentielle ne leur étoit que trop inhérente dans le temps où je les recueillis: auſſi fus-je très-empreſſé, au mois d'Octobre de l'année 1771, de faire uſage de blés cariés qui avoient été produits dans cette même année, & d'infecter de la ſemence bien pure avec la poudre nouvelle que j'en retirai: je répétai en même temps l'expérience que j'avois faite avec celle du blé carié de 1757. Je formai, en conſéquence, ſur une partie de mon terrein quatre planches de dix-huit à vingt pieds de longueur: deux d'entre elles, qui étoient un peu étroites à cauſe de la diſpoſition du terrein, furent diviſées, ſur leur longueur, en trois rayons, à huit ou dix pouces l'un de l'autre; les deux autres planches

ayant

ayant plus de largeur furent partagées en ſept rayons; & les épreuves, tant ſur l'effet contagieux de la carie de 1771, que ſur celui de la carie de 1757, & ſur le ſuccès des préparations plus ou moins capables de garantir les blés de cette maladie, furent tellement entremêlées dans ces vingt rayons, que les différences qui en devoient réſulter, pour la qualité des produits, ne pouvoient être attribuées qu'à l'état dans lequel le grain y auroit été ſemé. Je dois faire obſerver que le blé dont je me ſervis, pour les épreuves relatives à ces vingt rayons, ſortit du même petit ſac où je l'avois d'abord renfermé après l'avoir choiſi avec ſoin, & que je tins une note exacte de l'ordre dans lequel je le ſemai, ſoit qu'il eût ſa pureté naturelle, ſoit qu'il fût infecté de la nouvelle ou de l'ancienne poudre contagieuſe, ſoit enfin qu'il fût préparé différemment pour écarter les effets funeſtes de cette poudre. J'ajouterai au détail de ces épreuves qu'afin de mieux juger, ou de l'impreſſion nuiſible de la carie de 1757, ou de ſon affoibliſſement bien réel, lorſqu'elle eſt très-ancienne, ce qui faiſoit mon objet principal, je répandis une grande quantité de cette poudre de 1757 ſur le grain noirci déjà de cette même poudre, après que je l'eus ſemé dans les rayons que je lui avois deſtinés, & avant que de combler ces rayons de trois à quatre pouces de terre meuble dont le grain fût recouvert.

Je reconnus bientôt, c'eſt-à-dire dès le 13 Avril 1772, que j'avois eu de juſtes ſoupçons ſur l'affoibliſſement conſidérable que la carie de 1757 avoit éprouvé dans ſa qualité peſtilentielle, & que l'effet contagieux de la carie nouvelle ſe maintenoit conſtamment dans l'activité funeſte que j'avois toujours remarquée. Par-tout où j'avois ſemé du grain infecté de celle-ci, j'aperçus, dans la plus grande partie des jeunes plantes, les premiers ſymptômes de la maladie; tandis qu'ils n'étoient preſque pas ſenſibles dans les rayons où je n'avois fait uſage que de la carie de 1757, tant pour noircir le

grain que pour l'inonder encore de cette poudre ancienne, avant qu'il fût recouvert.

L'effet pernicieux de l'une, & les ſuites peu conſidérables de l'autre, devinrent beaucoup plus faciles à diſtinguer lorſque les épis furent ſortis de leur fourreau, & que ceux qui n'avoient point été attaqués de la maladie commencèrent à fleurir: les rayons où le mal régnoit en général, à côté de ceux qui en étoient totalement exempts, ou qui n'en portoient que peu de veſtiges, ces rayons qu'on obſervoit ſous un même coup d'œil, ne laiſſoient aucun lieu de douter, aux perſonnes même les moins accoutumées à conſidérer cette maladie, qu'elle n'eût, au moins dans cette circonſtance-ci, une cauſe étrangère à la ſemence, puiſque le grain avoit été le même, quant au fond, pour les vingt rayons, & que la poudre nouvelle des blés cariés, ou l'ancienne de 1757 que j'avois appliquée à quelques portions de la ſemence, étoit la ſeule choſe réelle qui établiſſoit entre elles de la diſtinction.

Je répétai, au mois d'Octobre 1772, les expériences dont je viens de parler: j'obtins en 1773 les mêmes réſultats que j'avois eus l'année précédente. Toute la partie de mes blés dont la ſemence avoit été noircie avec de la carie nouvelle ſe trouva infectée à un point étonnant; peut-être n'y eût-il pas un ſixième des épis qui échappa à la contagion: les effets, au contraire, en furent peu conſidérables dans les rayons pour leſquels j'avois fait uſage de la carie de 1757; & je n'en vis aucune trace dans la partie des blés qui avoit été deſtinée, par la préparation de la ſemence, à ne donner que des épis ſains.

Il eſt donc évident, 1.° d'après ces expériences, qui en confirment une multitude d'autres, que la poudre nouvelle des blés cariés, dont on infecte le grain le plus pur, a les ſuites les plus funeſtes pour les blés que ce grain produit: il paroît conſtant, en ſecond lieu, que cette poudre, ſi

pernicieuſe dans ſon principe, devient moins contagieuſe à meſure qu'elle vieillit, quoiqu'on ait ſoin de la conſerver dans le grain qui la contient, quoique par ſa mauvaiſe odeur & par les autres qualités ſenſibles qui la caractériſent, elle ne ſemble pas avoir perdu le vice peſtilentiel qui lui eſt propre. Peut-être s'apercevroit-on qu'elle s'en dépouille totalement, étant conſervée encore plus longtemps que ne l'a été celle dont je me ſuis ſervi: j'aurai lieu de continuer des épreuves à ce ſujet; il me reſte encore aſſez de ces grains cariés qui ont été recueillis en 1757 pour en faire la matière d'une expérience pendant pluſieurs années, pour ſuivre la diminution ſucceſſive des effets nuiſibles de la poudre qu'ils renferment, & dans la vue ſur-tout d'examiner ſi cette poudre étant devenue, comme on a vu, beaucoup moins pernicieuſe, au bout de quinze ou ſeize ans, que je ne l'avois éprouvé dans ſon origine, elle parvient enfin au point de n'avoir plus rien de contagieux.

Il réſulte, en troiſième lieu, des expériences que je viens de rapporter, que la préparation des ſemences, que j'ai indiquée depuis longtemps, produit conſtamment ſon effet avantageux, & que déterminée ſur la cauſe ordinaire de la maladie dont il s'agit ici, elle eſt un des moyens les plus propres à l'écarter.

Je ſens qu'il y auroit quelqu'utilité à connoître l'affoibliſſement du principe contagieux dans les blés cariés, & ſa deſtruction totale, après un certain temps, en ſuppoſant qu'elle a lieu effectivement, ſi l'on pouvoit employer du blé vieux pour enſemencer les terres, & ne pas craindre la communication de cette maladie, quelque peu de précautions que l'on prît alors pour le choix de la ſemence dont on ſe ſerviroit; mais les grains éprouvant une altération dans leur germe, après une année ou deux qu'on les a recueillis, on ne ſauroit les employer comme ſemence, ſans courir riſque d'en ſacrifier inutilement la plus grande partie; & encore la portion de ces grains qui réuſſiroit, ſeroit-elle expoſée à la contagion du noir, ſi elle en avoit d'abord été infectée,

par la raiſon que l'affoibliſſement du principe contagieux ne ſeroit pas conſidérable, ſelon toute apparence, après deux ou trois années ſeulement du ſéjour de cette poudre pernicieuſe ſur le blé vieux qu'on ſémeroit. Ainſi les expériences ſur ce ſujet ne peuvent guère tendre qu'à un point de pure curioſité; à moins que cette poudre, dépouillée de ce qu'elle a de nuiſible, analyſée enſuite & comparée avec d'autre qui conſerveroit encore toute ſa malignité, ne donnât jour pour entrevoir le principe de cette qualité funeſte, & ne conduisît à des précautions utiles pour en garantir totalement les blés.

RECHERCHES
SUR LES
VARIATIONS HORIZONTALES DE L'AIMANT.

Par M. LE MONNIER.

J'AI placé une bouſſole de 4 pouces, faite avec beaucoup de ſoin & dont l'aiguille étoit très-vive, ſur la méridienne tracée ſur le côté du Sud-oueſt de la terraſſe en face de l'Obſervatoire royal, & j'ai trouvé les variations ſuivantes.

Le 14 Avril à $10^h\frac{1}{2}$ du matin, le même côté de la boîte quarrée qui renferme la bouſſole, étant tourné vers l'orient & vers l'occident, la différence dans les deux ſens devenoit à peine ſenſible, en ſorte que j'ai trouvé $19^d\ 45'$ & $19^d\ 50'$; j'ai donc établi ce jour-là $19^d\ 48'$ pour la variation obſervée à l'endroit accoutumé depuis environ cinquante ans. Je n'ai pu retrouver le pilier dont ſe ſervoit feu M. de la Hire en 1717 & les années précédentes; mais ſi l'on doutoit que la méridienne y ſuppléât parfaitement, on verra ci-après que je me ſuis ſervi en raſe campagne de l'amplitude occidentale du Soleil: enfin feu M. Maraldi qui s'eſt ſervi de cette méridienne de la terraſſe d'en bas, & qui eſt fort éloignée du grand corps du bâtiment, & par conſéquent de toutes ſes ferrures & chaſſis de fer, n'a pas trouvé une différence bien remarquable entre ſes obſervations ſuivies & celles de M.rs de la Hire qui l'avoient précédé; on peut voir à ce ſujet nos Mémoires depuis 1717 juſqu'en 1722, &c.

Le 7 Mai, avec la même bouſſole, à $6^h\frac{1}{2}$ du ſoir, la déclinaiſon de l'aiguille aimantée, m'a paru de $19^d\ 55'$, en prenant un milieu entre ces deux réſultats, que donnoit le même côté de la boîte de bois quarrée & tournée en ſens contraire.

Enſuite ma montre (de Graham) étant parfaitement bien réglée, j'ai obſervé ſur une petite butte en raſe campagne, proche le nouveau boulevard, l'amplitude comme il ſuit:

Manière de trouver la variation, indépendamment des réfractions.

L'aiguille marquant $43^d\ 45'$, j'ai eu l'arc de distance jusqu'au centre du Soleil que je voyois par les pinnules parallèles au côté de la boîte: il étoit $7^h\ 22'\ 20''$ de temps vrai à ma montre; ce qui donne l'angle horaire, à compter du nord $69^d\ 25'$, & l'angle azimutal sera par conséquent $63^d\ 27'\frac{7}{8}$; car il suffit de résoudre un triangle sphérique, dont on connoît deux côtés & l'angle compris. La latitude du lieu étoit $48^d\ 50'\ 30''$, & la déclinaison du Soleil au même instant, $17^d\ 07'\ 30''$ boréale.

Mais puisque $63^d\ 27'\frac{7}{8}$ excèdent l'angle observé de $19^d\ 43'$, à très-peu de chose près, il ne peut y avoir beaucoup d'incertitude dans cette observation de la variation de l'aiguille faite par l'amplitude; car une minute d'erreur sur le temps vrai, & $0'\frac{1}{12}$, ou $5''$, ne sauroient produire ce jour-là plus de douze minutes, ni plus d'une minute sur l'angle azimutal; & la pointe de la pinnule étoit tellement dirigée au centre du Soleil, qu'on n'y pouvoit errer pareillement de plus d'une minute de degré, comme il a été facile de s'en assurer d'ailleurs par les passages des deux bords par ce vertical.

On pourroit donc prendre le 7 Mai, un milieu entre $19^d\ 55'$ & $19^d\ 43'$, qui sont les variations observées avant le coucher du Soleil, & à l'abri du vent par deux méthodes différentes, sauf à augmenter la dernière de quelques minutes, ayant égard à la variation diurne.

Soit donc $19^d\ 50'$ la variation de l'aiguille à l'Ouest, le 7 Mai 1772, à l'Observatoire royal, au Sud de Paris.

A *Brest*, à la fin de Juillet & au commencement d'Août $20^d\ 5'$, par M.rs Fortin & Blondeau: M. d'Après, à qui j'en ai écrit, en a été un peu étonné, & s'est persuadé qu'elle y devoit être plus grande; mais pour concilier les observations, il faudroit, avant toutes choses, tracer sur la carte les courbes magnétiques. Quoi qu'il en soit, il a trouvé dans le courant de 1772, à *Hennebond*, 21 à 22 degrés, & plus souvent $21^d\frac{2}{3}$, que $21^d\frac{1}{3}$. A l'*Orient*, $21^d\ 30'$, &c. Au *Port-Louis*, ainsi qu'à la campagne, $21^d\ 30'$ à $40'$.

M. d'Après ajoute, qu'en Juin, aux environs de *Pen-Marc*, par les amplitudes ortives & occaſes, la variation a paru de 21^{d} 30 à 35′; ces aiguilles avoient ſix pouces de longueur, & les boîtes de cuivre rouge, bois & cartons.

ÉCLIPSE DE LUNE HORIZONTALE, OBSERVÉE À PARIS, le 11 Octobre 1772.

Par M. LE MONNIER.

L'OMBRE a paru très-bien terminée lorſque la Lune en eſt ſortie, c'eſt-à-dire à l'émerſion; mais vers la fin de l'Éclipſe elle n'étoit plus ſi bien terminée, quoique le Ciel fût parfaitement ſerein.

On voyoit la Lune entièrement, quoiqu'elle fût plongée dans l'ombre; mais à cauſe de la force du crépuſcule, on ne l'a pas vue préciſément dans Paris à l'heure de ſon lever.

A 6^{h} 29′ 19″ de temps vrai, la Lune ſort de l'ombre ou émerſion; ſavoir un peu plus près du *Palus Mareotis* que du mont *Porphirites.*

La première de ces deux taches eſt ſortie à 6^{h} $31'\frac{1}{3}$.
La ſeconde. . . . . 6. $37\frac{5}{6}$.

à 6^{h} 41′ 30″ *Loca Paludoſa.*
6. 44. 25, la tête de la Vierge.
6. 48. 00, l'île de Malte & *Ætna.*
6. 54. 30, le grand Lac noir.
6. 55. 15, l'ombre à *Sinaï*, & tout le lac hors de l'ombre.
7. 11. 10, Bizance.
7. 15. 40, *Inſula Macra.*
7. 19. 15, le Promontoire aigu d'Héraclée.

L'ombre qui avoit paru jusqu'ici bien tranchée devient plus confuse.

7^h 26′ 45″, l'ombre à *Mons Corax.*

7. 33. 07½, fin de l'Éclipse,

& une minute après on ne doute plus qu'elle ne soit entièrement finie : je me suis servi d'une lunette de huit à neuf pieds.

M. le Cardinal de Luynes m'a fait l'honneur de m'envoyer de Fontainebleau son observation, où il n'a été possible de voir que la fin ou l'émersion totale; savoir à 7^h 34′ 55″ : il en faut ôter 1′ 24″, pour réduire cette heure au Méridien de Paris; savoir, 7^h 33′ 31″.

Son Éminence a vu la phase de 6 doigts à 6^h 58′ 12″, & l'ombre quittoit les taches *corax*, ou celles qui sont marquées *n.os 35, 36*, dans la Connoissance des Temps, à 7^h 24′ 52″.

On a remarqué que l'ombre n'étoit bien terminée qu'au commencement de l'émersion.

NOUVELLES

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES
POUR
CALCULER LES ÉCLIPSES DE SOLEIL, LES OCCULTATIONS DES ÉTOILES FIXES ET DES PLANÈTES PAR LA LUNE;

Et en général pour réduire les Obſervations de cet Aſtre, faites à la ſurface de la Terre, au lieu vu du centre.

DIXIÉME MÉMOIRE,

Dans lequel on applique à la ſolution de pluſieurs Problèmes aſtronomiques, les Équations démontrées dans les Mémoires précédens.

Par M. DU SÉJOUR.

POUR l'intelligence de ce qui ſuit, le Lecteur ſe rappellera

(1.) Que dans toutes mes équations,

r exprime le demi-petit axe de la Terre, que je ſuppoſe d'ailleurs égal au rayon des Tables.

ρ le demi-grand axe.

v l'arc de 15^d rectifié, ou plus exactement, l'arc qui meſure le temps vrai correſpondant à une heure moyenne pour le jour de l'Écliſe.

θ le ſinus, ψ le coſinus de l'inclinaiſon de l'orbite corrigée.

Cette inclinaiſon ſe détermine par l'équation ſuivante,

Tangente de l'inclinaiſon de l'orbite corrigée =

$$\frac{r''}{206265''} \times \frac{\text{mouv. hor. de la ☾ en latit. évalué en ſecondes de degré}}{\text{ſin. (mouv. hor. de la ☾ en longit. — mouv. hor. du ☉)}}.$$

ξ le coſinus de la latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction, vue du centre de la Terre.

b le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis la conjonction juſqu'à l'inſtant pour lequel on calcule.

Année 1764.

s le ſinus, c le coſinus — de la latitude corrigée de l'Obſervateur (*2.d Mém. §. 20, Table I*), c'eſt-à-dire d'un angle qu'il faut ſubſtituer à la latitude vraie, & qui ſe conclut de cette latitude.

g le ſinus, h le coſinus — de l'angle horaire du Soleil.

p le ſinus, q le coſinus — de la déclinaiſon du Soleil à l'inſtant pour lequel on calcule.

Ω le coſinus de l'obliquité de l'écliptique.

$$\chi = \sqrt{(q^2 - \Omega^2)}.$$

ω le ſinus, t la tangente, φ le coſinus — de l'angle de l'orbite relative de la Lune avec le fil parallèle ou équatorial de l'Obſervateur ſuppoſé au centre de la Terre. Cet angle ſe détermine par l'équation ſuivante,

$$\omega = \frac{\theta\,\Omega}{q} + \frac{\psi\,\chi}{q}.$$

π le ſinus de la parallaxe horizontale polaire de la Lune à l'inſtant pour lequel on calcule.

π' le ſinus de la parallaxe horizontale du Soleil.

$$\zeta = r - \frac{\pi'\xi}{\pi}.$$

$$l = r \times \frac{\text{ſin. de la lat. de la ☾ à l'inſt. de la conj. vue du centre de la Terre}}{\text{ſin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'inſtant de la conjonction}}$$

$$\gamma = \xi \times \frac{\text{ſin. verſe (mouv. hor. de la ☾ en longit. — mouv. horaire du ☉)}}{\text{ſin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'inſtant de la conjonction}}$$

$$n = \frac{r\xi}{\psi} \times \frac{\text{ſin. (mouv. horaire de la ☾ en longit. — mouv. horaire du ☉)}}{\text{ſin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'inſtant de la conjonction}} \; *$$

$$n' = \frac{\xi}{\psi} \times \text{ſin. (mouv. horaire de la ☾ en longit. — mouv. horaire du ☉)} \; *$$

(2). Que dans toutes les équations, j'ai ſuppoſé que les quantités précédentes étoient poſitives; qu'il pouvoit arriver cependant que quelques-unes de ces quantités deviuſſent négatives.

(3.) Que dans toutes les Éclipſes de Soleil, les quantités r, ϱ, v, ψ, ξ, c, q, Ω, φ, π, π', ζ, γ, n, n', étoient eſſentiellement poſitives; que par conſéquent le changement de leurs valeurs

---

* Pour avoir avec la dernière exactitude les valeurs de n & de n', il faut employer les mouvemens horaires de la Lune & du Soleil, correſpondans à une heure vraie pour le jour de l'Éclipſe, & non pas les mouvemens correſpondans à une heure moyenne; ainſi qu'ils ſont donnés par les Tables.

absolues ne pouvoit faire varier le signe des termes dans lesquels elles entroient.

(4.) Qu'il n'en étoit pas de même des quantités θ, b, s, g, h, p, χ, t, ω, l.

Que la quantité l devenoit négative, lorsque la latitude de la Lune, vue du centre de la Terre, étoit australe à l'instant de la conjonction.

Que la quantité θ devenoit négative, lorsque l'Éclipse arrivoit dans le nœud descendant de la Lune.

Que b devenoit négatif, lorsque l'instant pour lequel on calcule, précédoit l'instant de la conjonction.

Que s devenoit négative, lorsque la latitude de l'Observateur étoit australe.

Que g devenoit négatif, lorsque l'heure donnée étoit entre minuit & midi.

Que h devenoit négative, lorsque l'heure étoit entre six heures du soir & six heures du matin.

Que p devenoit négatif, lorsque la déclinaison du Soleil étoit australe.

Que χ devenoit négatif, lorsque le Soleil étoit dans les signes descendans, c'est-à-dire depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hiver.

Que le signe de ω, & de t qui en est une conséquence, étoit déterminé par la formule du §. 1.er

(5.) J'ai supposé dans ce Mémoire que pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on avoit les Élémens suivans.

Heure que l'on comptoit lors de la conjonction, dans l'observatoire de M. Short à Londres, $10^h\ 21'\ 28''$ du matin.

Lieu de la conjonction	12^d	$9'$	$56''$ du Bélier.	
Mouvement horaire du Soleil	0.	2.	27,7	*
Mouvement horaire de la Lune en longitude.	0.	29.	39	*
Mouvement horaire de la Lune au Soleil	0.	27.	11,3	*

* Les mouvemens horaires dont il s'agit sont les mouvemens correspondans à une heure moyenne, & non à une heure vraie. Pour ramener ces mouvemens à ceux correspondans à une heure vraie, on remarquera que le 1.er Avril 1764, l'heure moyenne surpassoit l'heure vraie de 0″,7.

Latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction.	0^d	$39'$	$32''$	boréale.
Mouvement horaire de la Lune en latitude.	0.	2.	44	{ Éclipſe dans le nœud aſcendant.
Parallaxe horizontale polaire de la Lune....	0.	54.	1,5	
Obliquité de l'Écliptique................	23.	28.	21	
Déclinaiſon du Soleil à l'inſtant de la conjonction.	4.	48.	50	boréale.
Parallaxe horizontale du Soleil...........	0.	0.	10	
Demi-diamètre du Soleil tiré des Tables.....	0.	16.	1	
Demi-diamètre du Soleil dépouillé de l'irradiation.	0.	15.	56	
Inflexion des rayons ſolaires qui raſent le limbe de la Lune........................	0.	0.	5	

$$\text{ſinus (demi-diam. horizont. de la ☾)} = \frac{9000}{32887}\ \text{ſinus (parallaxe horizont. polaire)}.$$

Demi-diamètre horizontal de la Lune......	0.	14.	47,1	
Rapport des axes de la Terre, comme 177 à 178.				
Variation horaire de la parallaxe horizontale de la Lune......................	0.	0.	0,5	négative.
Variation horaire de la déclinaiſon du Soleil..	0.	0.	58	poſitive.

D'où j'ai conclu

		Logarithme...
$r = +$	100000.	$r = 10{,}0000000.$
$\rho = +$	100565.	$\rho = 10{,}0024467.$
$v = +$	arc de 15^d rectifié.	$v = 9{,}4179686.$
$\theta = +$	ſinus. $5^d\ 44'\ 26''$	$\theta = 9{,}0001044.$
$\psi = +$	coſin. 5. 44. 26.	$\psi = 9{,}9978165.$
$\xi = +$	coſin. 0. 39. 32.	$\xi = 9{,}9999711.$
$p = +$	ſinus. 4. 48. 50.	$p = 8{,}9238624.$
$q = +$	coſin. 4. 48. 50.	$q = 9{,}9984653.$
$\Omega = +$	coſin. 23. 28. 21.	$\Omega = 9{,}9624884.$
$\chi = +$	38936.	$\chi = 9{,}5903565.$
$\omega = +$	ſinus. 28. 44. 30.	$\omega = 9{,}6820198.$
$t = +$	tang. 28. 44. 30.	$t = 9{,}7391209.$
$\varphi = +$	coſin. 28. 44. 30.	$\varphi = 9{,}9428989.$
$\pi = +$	ſinus. 0. 54. 1,5	$\pi = 8{,}1963030.$
$\pi' = +$	ſinus. 0. 0. 10.	$\pi' = 5{,}6855749.$
$\zeta = +$	99692.	$\zeta = 9{,}9986603.$

Logar. { sin. de la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction.... = 8,0606800.
sin. verse (mouv. hor. de la ☾ en long. — mouv. hor. du ☉) = 5,4972284.
sin. (mouv. hor. de la ☾ en longit. — mouv. hor. du ☉) = 7,8981331. }

$l = + 73177.$	Logarithme...	l	$= 9,8643770.$
$\gamma = + \quad 200.$		γ	$= 7,3008965.$
$n = + 50581.$		n	$= 9,7039847.$
$\frac{n\gamma}{\zeta} = + 50737.$		$\frac{n\gamma}{\zeta}$	$= 9,7053244.$
$n' = + 794,855.$		n'	$= 7,9002877.$

206265" = le nombre de secondes de degré que contient le rayon du cercle, lorsqu'on le compare à la circonférence.

(6.) Je suppose également que le lecteur a présent à l'esprit ce que j'ai dit *(§. 28 du 3.e Mém.)* sur la relation entre le nombre de chiffres dont chaque quantité qui se trouve dans les formules, doit être composée, & la caractéristique de son logarithme. *Année 1765.*

Qu'il se rappelle l'exception relative au nombre de secondes, soit d'heure, soit de degré.

Qu'il a présent à la mémoire, la manière de distinguer chacun des termes d'une équation, en le surmontant d'un chiffre & d'une lettre; d'une lettre pour signifier la quantité dans l'expression de laquelle se trouve le terme en question; d'un chiffre pour indiquer le rang de ce terme.

Je suppose encore que le lecteur n'a pas oublié que dans toutes les formules, par la latitude d'un lieu, j'entends sa latitude corrigée. Cette latitude est réductible à la latitude vraie; ou réciproquement, la latitude vraie est réductible à la latitude corrigée, par la première Table du *§. 20* de mon second Mémoire. *Année 1764.*

(7.) Dans les premiers Mémoires, j'avois supposé

Logarithme { 1" = 0,0000000,
10 = 1,0000000,
100 = 2,0000000, }

& ainsi de suite. Avec cette notation on a un nombre négatif pour le logarithme d'une fraction de seconde. Afin d'éviter cet inconvénient, je supposerai dans ce Mémoire.

$$\text{Logarithme}\left\{\begin{array}{lcl} 0'',001 & = & 0{,}0000000, \\ 0{,}01 & = & 1{,}0000000, \\ 0{,}1 & = & 2{,}0000000, \\ 1 & = & 3{,}0000000, \\ 10 & = & 4{,}0000000, \\ 100 & = & 5{,}0000000, \\ 1000 & = & 6{,}0000000, \end{array}\right.$$

& ainſi de ſuite. Je négligerai toutes les quantités au-deſſous d'un millième de ſeconde, c'eſt-à-dire toutes celles dont le logarithme ſeroit négatif. Dans cette notation

$$\text{Logarithme}\left\{\begin{array}{lcl} 3600'' & = & 6{,}5563025. \\ 206265 & = & 8{,}3144255. \end{array}\right.$$

(8.) On a pu remarquer *(§. 5)* que lors de l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, la variation horaire de la parallaxe horizontale de la Lune étoit négative; & qu'au contraire la variation horaire de la déclinaiſon du Soleil étoit poſitive. En général, la variation horaire de la parallaxe de la Lune eſt poſitive, lorſque cet aſtre tend de l'apogée au périgée, c'eſt-à-dire dans les 180 premiers degrés d'anomalie: elle eſt négative dans les 180 derniers degrés d'anomalie; c'étoit le cas de l'Éclipſe du 1.er Avril 1764.

(9.) Quant à la variation horaire de la déclinaiſon du Soleil, cet élément eſt poſitif dans les ſignes aſcendans, c'eſt-à-dire depuis le ſolſtice d'hiver juſqu'au ſolſtice d'été. Il eſt négatif dans les ſignes deſcendans, c'eſt-à-dire depuis le ſolſtice d'été juſqu'au ſolſtice d'hiver.

(10.) Lorſque j'ai aſſigné *(§. 5)* les valeurs hypothétiques de la parallaxe de la Lune & de ſa latitude, il eſt évident que cela ne doit s'entendre que des queſtions de ce Mémoire où ces quantités ſeront les données du Problème; car dans les queſtions où ces quantités ſeront regardées comme inconnues, elles auront les valeurs données par la ſolution.

ARTICLE PREMIER.

Exposition du sujet.

(11.) J'ai exposé dans le plus grand détail les méthodes que l'on peut employer dans la pratique, pour comparer des observations quelconques; soit qu'indépendamment de la distance des centres, on connoisse de plus l'angle que j'ai défini *(§. 21 & suivans de mon IX.e Mémoire) angle de comparaison;* soit que cet angle soit inconnu. Ce que j'ai dit ne me paroît laisser rien à desirer sur cet objet. Il faut cependant convenir que quelque rigoureuses que soient les méthodes, elles ne sont pas absolument directes, si l'on entend ce mot dans toute la rigueur géométrique. En effet, on emploie des équations différentielles, pour déterminer la différence entre des élémens hypothétiques, & les véritables élémens de l'Éclipse. J'ai prescrit, à la vérité, de faire usage des meilleures Tables astronomiques, pour déterminer ces élémens; & l'on peut dire, sous ce point de vue, que les formules ont toute la précision possible. J'ai cru cependant que l'on verroit avec plaisir, des méthodes indépendantes de ces secours étrangers. Ce sont celles dont pourroit faire usage un Astronome qui ne voudroit rien supposer de précaire dans ses résultats.

(12.) Dans mes huitième & neuvième Mémoires, j'ai supposé une erreur quelconque dans la latitude des lieux où l'on observe, leur position respective, les diamètres du Soleil & de la Lune, leurs parallaxes, le rapport des mouvemens horaires, les quantités absolues de ces mouvemens, le rapport des axes de la Terre, la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction, la déclinaison du Soleil, l'heure précise des observations; soit que cette dernière erreur provienne du dérangement de la pendule, soit qu'elle provienne de l'inattention de l'Observateur, ou de l'imperfection des instrumens qu'il a employés; & j'ai appris à déterminer ces élémens de la manière la plus générale. Par la forme que je donnois alors aux équations, chacune de ces inconnues ne conduisoit qu'à

des résultats du premier degré; il étoit donc indifférent d'en multiplier le nombre. Il n'en est pas de même du présent Mémoire. Comme je me propose d'éliminer les variables les unes par les autres, afin d'avoir des résultats indépendans de toute hypothèse, j'ai été obligé de restreindre le nombre de mes inconnues, soit pour ne pas trop multiplier les Problèmes, soit pour ne pas tomber dans des équations d'un degré trop élevé.

(13.) Si l'on jette les yeux sur les différentes inconnues du Problème, on verra qu'elles n'ont pas toutes le même degré d'incertitude. Il y en a même que l'on pourroit regarder jusqu'à un certain point, comme étrangères à la question. Telles sont celles, par exemple, qui dépendent de la figure de la Terre, des diamètres du Soleil & de la Lune, de la parallaxe du Soleil, de la Latitude de l'observatoire, de l'heure précise de l'observation, de la distance observée des centres du Soleil & de la Lune. On pourroit, à la rigueur, exiger que toutes ces quantités, qui ne tiennent pas précisément au mouvement de la Lune, fussent connues avec la dernière précision. Obligé de me décider sur le choix des variables, j'ai cru devoir préférer celles qui dépendent plus particulièrement de la Théorie de la Lune. L'instant de la conjonction, la parallaxe de la Lune, sa latitude correspondante à cet instant, & la différence en Longitude des deux observatoires, seront donc les seules grandeurs que je regarderai comme inconnues dans ce Mémoire.

(14.) Quoique je ne me propose pas d'avoir égard aux petites différences que peut apporter dans le résultat, l'incertitude des élémens que je n'ai pas cru devoir considérer comme variables; rien cependant ne seroit plus facile que de déterminer leur influence. Il s'agiroit de ne regarder que comme élémens hypothétiques, les valeurs que l'on déterminera par ce Mémoire, & de substituer ces valeurs dans les formules de mes *VIII.e & IX.e Mémoires;* la raison en est simple: ces résultats tiendroient lieu des élémens hypothétiques empruntés des Tables; tout est donc résolu à cet égard.

Années 1770 & 1771.

(15.)

(15.) Je ne puis diſſimuler que pluſieurs des ſolutions que je vais donner, pourront être regardées comme purement géométriques, attendu la grande préciſion qu'elles exigeroient dans les obſervations, pour être véritablement utiles ; mais elles ne ſont pas toutes dans ce cas, & j'aurai ſoin d'en avertir. D'ailleurs je n'ai pas cru devoir laiſſer ignorer les ſecours que la Géométrie pourroit fournir, ſi la préciſion des obſervations y répondoit. L'inconvénient que je viens de relever, inconvénient d'autant plus grand, que l'on compare un plus grand nombre d'obſervations, & la crainte de tomber dans des équations trop compliquées, m'ont fait rejeter en général toutes les queſtions qui euſſent conduit à des équations d'un degré ſupérieur au ſecond. On verra, par la ſuite de ce travail, que les queſtions que je conſidère ſont les ſeules véritablement utiles ; d'ailleurs on peut dire que tout eſt réſolu par les formules des Mémoires précédens.

(16.) Pour mettre quelqu'ordre dans ces diſcuſſions, je donne d'abord des méthodes pour comparer deux obſervations de phaſes, dans leſquelles on connoît de plus l'*angle de comparaiſon.* Comme ces deux ſeules obſervations peuvent faire connoître la latitude de la Lune, ſa parallaxe, l'heure de la conjonction & la différence en longitude des deux obſervatoires, c'eſt-à-dire toutes les quantités que je regarde comme inconnues, cette queſtion ne donne lieu qu'à un ſeul Problème. Je fais voir auſſi quel parti l'on pourroit tirer de ces obſervations, ſi elles étoient incomplètes. Je ſuppoſe enſuite que relativement à l'une des deux obſervations que l'on veut comparer, l'on ne connoiſſe pas l'*angle de comparaiſon* correſpondant à l'inſtant de la phaſe : je fais voir que dans ce cas on peut toujours déterminer trois des élémens inconnus, pourvu que l'on ſuppoſe connu le quatrième. Cette queſtion donne lieu à quatre Problèmes.

(17.) Dans les Problèmes précédens, un des termes de comparaiſon a toujours été une plus grande phaſe, ou une diſtance des centres, combinée avec l'obſervation ſimultanée de l'*angle de comparaiſon :* je donne enfin des formules pour

comparer deux phaſes quelconques. Comme dans ce cas on ne peut déterminer que deux des élémens inconnus, en ſuppoſant connus les deux autres; & que d'ailleurs quatre quantités ſe combinent deux à deux, de ſix façons différentes, il eſt évident que l'on aura à réſoudre ſix Problèmes.

(18.) Dans l'article ſuivant je développe la méthode la plus directe, ſelon moi, pour déterminer à la fois, par une équation ſimple, la latitude de la Lune, ſa parallaxe, & l'inſtant de la conjonction. Quoique je n'applique, quant à préſent, cette théorie qu'aux Éclipſes de Soleil, il eſt aiſé de voir que j'ai particulièrement en vue la détermination de la parallaxe du Soleil, par les obſervations du paſſage de Vénus ſur le diſque de cet aſtre. Je m'abſtiens de prononcer ſur les moyens que je propoſe; il n'y en a certainement pas de plus ſimples & de plus directs en théorie. Toutes les conditions me paroiſſent de nature à pouvoir être facilement remplies, & le Problème eſt ramené à la ſolution d'une équation qui ne contient que la parallaxe & des connues. Comme la ſeule objection que l'on puiſſe faire contre cette méthode, eſt qu'elle exige peut-être des obſervations trop préciſes, je termine cet article par une formule, pour apprécier dans tous les cas, l'influence des obſervations, ſur la détermination de la parallaxe.

(19.) Quoique dans ce Mémoire je regarde, en général, comme connu le mouvement horaire de la Lune au Soleil, d'après les raiſons détaillées dans mes précédens Mémoires; je fais voir cependant qu'il ſeroit facile de donner des méthodes pour déterminer cet élément, & le combiner avec les autres inconnues. Je donne même les cas particuliers ou l'Analyſe & l'Aſtronomie m'ont paru conduire à la fois aux calculs les plus ſimples & aux réſultats les plus certains.

(20). Je m'occupe enſuite des changemens qu'il faut faire aux formules, pour les appliquer aux occultations des Étoiles fixes & des Planètes par la Lune; au calcul des diſtances de la Lune aux Étoiles; aux paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil; aux occultations ſucceſſives des Étoiles voiſines

les unes des autres. Je fais voir aussi comment on peut déduire de mes formules, les méthodes ordinaires des parallaxes.

(21.) Pour rendre plus utile cette partie de mon ouvrage, j'ai déterminé par forme d'exemple, d'après les observations de M. le Gentil, la position de Foulpointe & de la baie d'Antongil, dans l'île de Madagascar; on trouvera enfin la relation générale entre le lieu vrai & le lieu apparent de la Lune. Je termine cette analyse en remarquant que si l'on réunit ce Mémoire avec les deux précédens, il ne me paroît pas possible d'imaginer d'observations pour lesquelles je n'aie pas donné des formules de réduction.

(22.) La longueur de ce Mémoire m'a obligé de remettre à un autre temps, la discussion des méthodes pour déterminer la distance de la Lune à la Terre, par des observations correspondantes faites dans des Méridiens dont la position respective est connue. On sait que ce Problème astronomique fut un des objets du voyage de M. l'Abbé de la Caille au Cap de Bonne-espérance. Il est aisé de sentir que mes formules résolvent sous d'autres titres, toutes ces questions; & que le travail que je pourrai faire là-dessus, ne sera que les applications des formules dans lesquelles je compare plusieurs observations, pour en déduire la parallaxe.

ARTICLE II.

Méthodes pour comparer deux observations de phases, dans lesquelles on connoît de plus l'angle de comparaison.

(23.) Je suppose dans cet article, & dans toutes les questions de ce Mémoire, que l'on se rappelle la définition de l'*angle de comparaison*, telle que je l'ai donnée dans les *§. 21 & suivans* de mon *IX.e Mémoire;* je suppose de plus que cet angle a été mesuré directement, ou conclu de la connoissance que l'on a, que la phase observée est une plus grande phase *(IX.e Mémoire, §. 25);* je suppose enfin que la distance observée des centres a été corrigée par les formules des *§. 54 & suivans* de mon *VIII.e Mémoire;* c'est-à-dire,

Année 1771.

Année 1770.

qu'au lieu d'employer dans les calculs, la véritable diſtance obſervée des centres, on faſſe uſage de celle qui eût été obſervée, ſi la parallaxe de la Lune & la déclinaiſon du Soleil n'euſſent pas varié dans l'intervalle écoulé entre l'inſtant de la conjonction & celui de l'obſervation. Je me propoſe en conſéquence de donner des méthodes pour comparer deux obſervations de phaſes dans leſquelles on connoît de plus l'*angle de comparaiſon* correſpondant à chacune de ces phaſes. Comme ces deux ſeules obſervations peuvent faire connoître la latitude de la Lune correſpondante à l'inſtant de la conjonction, ſa parallaxe horizontale polaire, l'heure de la conjonction & la différence en longitude des deux Obſervatoires, c'eſt-à-dire, toutes les quantités que je regarde comme inconnues; cette queſtion ne donne lieu qu'à un ſeul Problème. Au reſte, on ne doit point oublier que, conformément à ce que j'ai dit dans mon *VIII.e Mémoire, §. 50*, dans toutes ces queſtions je regarde ζ & ξ comme rigoureuſement donnés par les Tables aſtronomiques; quoique l'une de ces quantités dépende de la parallaxe de la Lune, & l'autre de ſa latitude. On doit ſe rappeler auſſi que j'ai fait voir dans le *§. 115* de mon *IX.e Mémoire*, que quoique la parallaxe de la Lune entre dans l'expreſſion de l'angle de comparaiſon, correſpondant à une plus grande phaſe, cet angle eſt déterminé avec une exactitude ſuffiſante, en employant les élémens tirés des Tables aſtronomiques.

Année 1770.

Année 1771.

(24.) Étant données deux diſtances des centres obſervées dans deux lieux différens, avec l'*angle de comparaiſon* correſpondant à chacune de ces diſtances, il eſt facile de déterminer la latitude de la Lune correſpondante à l'inſtant de la conjonction, ſa parallaxe horizontale polaire, l'heure de la conjonction, & la différence en longitude des deux Obſervatoires. Soit en effet

$\zeta' 1$ un des lieux où l'on a obſervé.

$z 1$ l'angle horaire du lieu $\zeta' 1$ à l'inſtant de l'obſervation; je ſuppoſe cet angle évalué en temps.

λ la tangente de la diſtance obſervée des centres. Cette diſtance doit être corrigée comme il a été dit *(§. 23)*.

b^* le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction donné par les Tables aſtronomiques, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation. Il n'eſt pas néceſſaire que cette quantité ſoit connue avec une grande préciſion.

b le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation.

$$R = \overset{(R\,1)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} - \overset{(R\,2)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} - \overset{(R\,3)}{\frac{chp\rho\varphi}{r^4}},$$

$$S = \overset{(S\,1)}{\frac{qs\omega}{r^2}} + \overset{(S\,2)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} - \overset{(S\,3)}{\frac{chp\rho\omega}{r^4}},$$

$$T = \overset{(T\,1)}{\frac{ps}{r}} + \overset{(T\,2)}{\frac{ch\rho q}{r^3}} + \overset{(T\,3)}{\frac{b^{*2}\gamma}{3600''^2}},$$

m le ſinus } de l'angle de comparaiſon.
n le coſinus }

Je renvoye au *§. 25 de mon IX.ᵉ Mémoire*, pour l'évaluation de cet angle, lorſqu'il n'eſt pas donné immédiatement par l'obſervation. *Année 1771.*

Soit d'ailleurs

$z'2$ l'autre lieu où l'on a obſervé.

$z2$ l'angle horaire du lieu $z'2$ à l'inſtant de l'obſervation.

λ' la tangente de la diſtance obſervée des centres. Cette diſtance doit être corrigée ainſi qu'il a été dit *§. 23*.

b'^* le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction, donné par les Tables aſtronomiques, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation. Il n'eſt pas néceſſaire que cette quantité ſoit connue avec une grande préciſion.

b' le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction juſqu'à l'inſtant de l'obſervation.

$$R' = \overset{(R'\,1)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} - \overset{(R'\,2)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} - \overset{(R'\,3)}{\frac{chp\rho\varphi}{r^4}},$$

$$S' = \overset{(S'\,1)}{\frac{qs\omega}{r^2}} + \overset{(S'\,2)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} - \overset{(S'\,3)}{\frac{chp\rho\omega}{r^4}},$$

$$T' = \overset{(T'\,1)}{\frac{ps}{r}} + \overset{(T'\,2)}{\frac{ch\rho q}{r^3}} + \overset{(T'\,3)}{\frac{b'^{*2}\gamma}{3600''^2}}.$$

m' le ſinus }
n' le coſinus } de l'angle de comparaiſon.

Année 1771. Je renvoie au *§. 25 de mon IX.ᵉ Mémoire* pour l'évaluation de cet angle, lorſqu'il n'eſt pas donné immédiatement par l'obſervation.

Ces dernières quantités doivent être évaluées relativement au lieu $z'2$, de même que les premières le doivent être relativement au lieu $z'1$.

Ibid. Il ſuit du *§. 31 de mon IX.ᵉ Mémoire*, que

$$\text{ſin. (latit. de la ☾)} = \frac{\zeta\pi R}{\psi r} - \frac{\lambda m T\pi}{\psi r^2} + \frac{\lambda m \xi}{\psi r}.$$

$$\text{ſin. (latit. de la ☾)} = \frac{\zeta\pi R'}{\psi r} - \frac{\lambda' m' T'\pi}{\psi r^2} + \frac{\lambda' m' \xi}{\psi r}.$$

Donc, ſi l'on ſuppoſe

$$V = \overset{(V1)}{\frac{\zeta}{r}(R - R')} + \overset{(V2)}{\frac{\lambda' m' T'}{r^2}} - \overset{(V3)}{\frac{\lambda m T}{r^2}},$$

on aura

$$\pi = \overset{(\pi 1)}{\frac{\xi\lambda' m'}{rV}} - \overset{(\pi 2)}{\frac{\xi\lambda m}{rV}}.$$

$$\text{ſin. (lat. ☾)} = \overset{(\text{ſin. }1)}{\frac{\zeta\xi\lambda' m' R}{\psi r^2 V}} - \overset{(\text{ſin. }2)}{\frac{\zeta\xi\lambda m R'}{\psi r^2 V}} - \overset{(\text{ſin. }3)}{\frac{\xi\lambda\lambda' m m'(T - T')}{\psi r^3 V}}.$$

Ibid. Puiſque d'ailleurs il réſulte du *§. 32 de mon IX.ᵉ Mém.* que

$$b = -\overset{(b1)}{\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta\,\text{ſin. (lat. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi S}{r^2}\right)} + \overset{(b2)}{\frac{3600''}{n'} \times \frac{n}{m} \times \left(\frac{\psi\text{ſin. (lat. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)}$$

$$b' = -\overset{(b'1)}{\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta\,\text{ſin. (lat. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi S'}{r^2}\right)} + \overset{(b'2)}{\frac{3600''}{n'} \times \frac{n'}{m'} \times \left(\frac{\psi\text{ſin. (lat ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R'}{r^2}\right)},$$

On aura

Longitude $z'1$ — longitude $z'2 = z1 - z2 - b + b'$.

Heure que l'on comptoit dans le lieu $z'1$ à l'inſt. de la conjonct. $= z1 - b$;

Heure que l'on comptoit dans le lieu $z'2$ à l'inſt. de la conjonct. $= z2 - b'$.

(25.) Il eſt eſſentiel de ne point ſe tromper ſur le ſigne des quantités qui compoſent les formules précédentes. Je ne

parlerai point des valeurs qui entrent dans l'expreſſion de R, S, T; R', S', T'; on doit y appliquer les remarques générales du commencement de ce Mémoire. Je me contenterai de détailler ce qui eſt particulier à λ, m, n, b, b^*, $\zeta 1$; λ', m', n', b', b'^*, $\zeta 2$, π, ſin. (latitude de la Lune).

λ, λ' ſont toujours poſitifs; m, n; m', n', doivent avoir le ſigne déterminé par les remarques du *§. 26* de mon *IXe Mémoire*, auquel je renvoie. b, b^*; b', b'^* ſont poſitifs, lorſque l'inſtant de l'obſervation eſt poſtérieur à l'inſtant de la conjonction; b, b^*; b', b'^* ſont négatifs dans le cas contraire. ſin. (latitude de la Lune) poſitif indique une latitude boréale; ſin. (latitude de la Lune) négatif indique une latitude auſtrale. π eſt poſitif, lorſque la Lune eſt entre la Terre & l'aſtre qu'elle éclipſe; π négatif indiqueroit que la Terre eſt ſituée entre la Lune & le Soleil; c'eſt le cas de la pleine Lune, ou de l'oppoſition de la Planète. Quant à $\zeta 1$, $\zeta 2$, je compterai ces heures d'une manière continue, depuis $0^h\ 0'\ 0''$ juſqu'à 24 heures, en partant de l'inſtant de midi. Je compterai pareillement d'une manière continue, depuis $0^h\ 0'\ 0''$ juſqu'à 24 heures, la différence en longitude entre les lieux $\zeta' 1$, $\zeta' 2$. Je ſuppoſerai le lieu $\zeta' 1$ plus oriental que le lieu $\zeta' 2$; le lieu $\zeta' 2$ eſt l'origine d'où je compterai les longitudes que je ſuppoſerai toutes orientales. Comme il pourroit arriver que par un réſultat de calcul, longitude $\zeta' 1$ — longitude $\zeta' 2$ fut donnée ſous la forme d'une quantité négative, on ajoutera 24 heures pour la rendre poſitive; ou ſans ajouter 24 heures, on pourra la regarder comme une longitude occidentale. Il eſt inutile d'avertir qu'il faudroit retrancher 24 heures du réſultat, ſi longitude $\zeta' 1$ — longitude $\zeta' 2$ ſurpaſſoit 24 heures.

Année 1771.

(26.) Je ne donnerai point d'exemple du calcul précédent; on peut ſe ſervir des Types analogues de mon *IXe Mémoire*, auxquels je renvoie.

Précision que les formules précédentes exigent dans les observations.

(27.) On ne doit point perdre de vue que les formules précédentes exigent la plus grande précision dans les observations que l'on soumet au calcul. Cette précision ne tombe pas seulement sur la quantité de la distance observée des centres; elle tombe également sur les instans des plus grandes phases, ou si l'on veut, sur la véritable valeur de l'*angle de comparaison.* En un mot, tous les inconvéniens qui, ainsi que je l'ai démontré dans mon *IXe Mémoire,* ont lieu dans le calcul des observations des plus grandes phases, se rencontrent également dans les formules dont il s'agit. Cette remarque doit rendre circonspect sur l'usage des formules du présent article; je ne les ai même présentées avec quelque détail, qu'afin de ne pas avoir paru oublier ces Problèmes, dans un Traité complet sur cette matière. Au reste, cette objection n'est pas particulière à mes méthodes. Quelles que soient celles que l'on emploie, on tombera dans le même inconvénient, toutes les fois que l'on voudra conclure les élémens de l'Éclipse, de la comparaison de deux plus grandes phases. On pourroit peut-être éviter une partie de ces inconvéniens, au moyen des précautions indiquées dans mon *IXe Mémoire;* mais en général, il faut traiter les plus grandes phases d'une manière isolée, & éviter principalement de les comparer ensemble.

Année 1771.

Ibid.

De quelques cas où l'on ne résout qu'une partie du Problème du présent article.

(28.) De l'équation

(1) Longitude $z'1$ — longitude $z'2 = z1 - z2 - b + b'$,

on peut conclure que si l'on connoissoit avec précision la différence en longitude des deux observatoires, & que l'on eût uniquement observé l'instant des plus grandes phases, sans avoir observé la quantité de ces phases, on pourroit déterminer la latitude de la Lune, ou sa parallaxe, en supposant connu l'un de ces deux élémens. En effet, puisque *(§. 24)*

(2)

$$(2)\ b = -\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta \text{ fin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi S}{r^2}\right) + \frac{3600''}{n'} \times \frac{n}{m} \times \left(\frac{\psi \text{ fin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right),$$

$$(3)\ b' = -\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta \text{ fin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi S'}{r^2}\right) + \frac{3600''}{n'} \times \frac{n'}{m'} \times \left(\frac{\psi \text{ fin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R'}{r^2}\right),$$

on aura

$$(4)\ \pi = \frac{3600''\psi\left(\frac{rn'}{m'} - \frac{rn}{m}\right) \text{ fin. (latit. ☾)} - n'r^2 (\text{longit. } \zeta' 1 - \text{longit. } \zeta' 2 - \zeta 1 + \zeta 2)}{3600''\zeta\left(S - S' - \frac{n}{m} \times R + \frac{n'}{m'} \times R'\right)},$$

$$(5)\ \text{fin. (lat. ☾)} = \frac{n'r^2 (\text{longit. } \zeta' 1 - \text{longit. } \zeta' 2 - \zeta 1 + \zeta 2) + 3600''\zeta\pi\left(S - S' - \frac{n}{m} \times R + \frac{n'}{m'} \times R'\right)}{3600''\psi\left(\frac{rn'}{m'} - \frac{rn}{m}\right)}.$$

On déterminera enſuite l'heure que l'on comptoit à l'inſtant de la conjonction dans chacun des deux Obſervatoires, par le moyen des équations,

(6) Heure que l'on comptoit dans le lieu $\zeta' 1$ à l'inſtant de la conjonction $= \zeta\, 1 - b$;

(7) Heure que l'on comptoit dans le lieu $\zeta' 2$ à l'inſtant de la conjonction $= \zeta\, 2 - b'$.

(29.) Par la même raiſon, ſi l'on avoit obſervé l'inſtant & la quantité de la plus grande phaſe dans un lieu, & uniquement l'inſtant de la plus grande phaſe dans l'autre Obſervatoire, on détermineroit trois des élémens quelconques, en ſuppoſant connu le quatrième élément.

En effet, on peut conclure des *§. 31, 166 & 171 de mon IX.ᵉ Mémoire*, que l'on a des équations de la forme ſuivante. *Année 1771.*

$$(1.)\ \text{fin. (latit. de la Lune)} = \frac{\zeta\pi R}{\psi r} + \frac{\lambda m}{\psi r}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right).$$

$$(2.)\ \pi = \frac{\psi r^2 \text{ fin. (latit. de la Lune)} - \lambda m \xi r}{\zeta R r - \lambda m T}.$$

$$(3.)\ \text{fin. (latit. ☾)} = -\frac{b}{3600''} \times \frac{n'r}{\theta - \frac{n\psi}{m}} + \frac{\zeta\pi}{r} \times \frac{\left(S - \frac{nR}{m}\right)}{\theta - \frac{n\psi}{m}}.$$

$$(4.)\ \pi = \frac{\left(\theta - \frac{n\psi}{m}\right) r \text{ fin. (lat. ☾)}}{\zeta\left(S - \frac{nR}{m}\right)} + \frac{b}{3600''} \times \frac{n'r^2}{\zeta\left(S - \frac{nR}{m}\right)}.$$

Au moyen de ces équations, & de celles du *§. 28,* on résoudra tous les cas possibles.

(30.) Supposons, par exemple, que la parallaxe de la Lune soit donnée. Au moyen de l'équation (1) du *§. 29,* on déterminera la latitude de la Lune; on déterminera ensuite les quantités b, b', la différence en longitude des deux Observatoires $\zeta' 1$, $\zeta' 2$, & l'heure que l'on comptoit à l'instant de la conjonction, dans ces deux Observatoires, par les équations (2), (3), (1), (6), (7) du *§. 28.*

On suivroit le même procédé si c'étoit la latitude de la Lune qui fut donnée, à l'exception toutefois qu'il faudroit alors employer l'équation (2) du *§. 29,* au lieu de l'équation (1).

(31.) Si l'on connoissoit la différence en longitude des deux observatoires, il est évident qu'en combinant l'équation (4) du *§. 28,* avec l'équation (1) du *§. 29*, & qu'en supposant de plus

(1) $\Delta =$ longitude $\zeta' 1$ — longitude $\zeta' 2 - \zeta 1 + \zeta 2$, on aura

$$(2)\ \pi = \frac{3600'' \lambda m \xi r \left(\frac{rn'}{m'} - \frac{rn}{m}\right) - \Delta n' r^4}{3600'' \zeta r^2 \left[S - S' + \frac{n'}{m'}(R' - R)\right] + 3600'' \lambda m T \left(\frac{rn'}{m'} - \frac{rn}{m}\right)}.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on déterminera la parallaxe de la Lune; on déterminera ensuite sa latitude, les quantités b, b', & l'heure que l'on comptoit à l'instant de la conjonction, dans chacun des deux observatoires, par le moyen des équations (5), (2), (3), (6), (7) du *§. 28.*

(32.) Dans toutes ces recherches je désigne toujours par $\zeta' 1$, le lieu dans lequel, indépendamment de l'instant de la plus grande phase, on a aussi observé la quantité de cette phase; & par $\zeta' 2$, le lieu où l'on a uniquement observé l'instant de la plus grande phase. On n'oubliera pas non plus que ce que je dis de la plus grande phase, doit s'entendre d'une phase quelconque, dans laquelle, indépendamment de la distance des centres, on auroit de plus observé l'*angle de comparaison.*

(33.) Si l'heure de la conjonction étoit donnée, le Problème se subdiviseroit en deux cas. Car, ou l'on connoîtroit la

diſtance de la conjonction, à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu z' 1, la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu z' 2 reſtant inconnue; ou ce ſeroit, au contraire, la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu z' 2 qui ſeroit connue, l'autre diſtance étant inconnue.

PREMIER CAS,

Dans lequel on ſuppoſe connue la diſtance de l'inſtant de la conjonction, à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu z' 1; c'eſt-à-dire, dans le lieu où indépendamment de l'inſtant de la plus grande phaſe, on a de plus obſervé la quantité de cette phaſe.

(34.) Si l'on combine les équations (2) & (3) du *§. 29*, on aura

$$(1)\ \text{ſin. (latit. ☾)} = -\frac{\frac{b}{3600''} \times n'r(\zeta Rr - \lambda mT) + \lambda m\xi\zeta\left(S - \frac{nR}{m}\right)}{\left(\theta - \frac{n\psi}{m}\right) \times (\zeta Rr - \lambda mT) - \zeta\psi r\left(S - \frac{nR}{m}\right)},$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on déterminera la latitude de la Lune; on déterminera enſuite ſa parallaxe, par l'équation (2) du *§. 29*; on connoîtra enfin l'heure que l'on comptoit dans l'obſervatoire z' 2, & la différence en longitude des obſervatoires z 1, z 2, par les équations (3), (7), (1) du *§. 28*.

DEUXIÈME CAS,

Dans lequel on ſuppoſe connue la diſtance de l'inſtant de la conjonction, à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu z' 2; c'eſt-à-dire, dans le lieu où l'on n'a obſervé que l'inſtant de la plus grande phaſe, ſans en avoir obſervé la quantité.

(35.) Si l'on combine l'équation (2) du *§. 29* avec l'équation (3) du même paragraphe; en obſervant de changer

dans cette dernière équation, b en b', S en S', $\frac{n}{m}$ en $\frac{n'}{m'}$; R en R'; puiſque par l'hypothèſe, c'eſt la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu $\zeta' 2$ qui eſt connue; on aura

$$(1)\ \text{ſin. (latit. ☾)} = -\frac{\frac{b'}{3600''}\, n' r(\zeta R r - \lambda m T) + \lambda m \xi \zeta\left(S' - \frac{n' R'}{m'}\right)}{\left(\theta - \frac{n' \psi}{m'}\right) \times (\zeta R r + \lambda m T) - \zeta \psi r\left(S' - \frac{n' R'}{m'}\right)}$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on déterminera la latitude de la Lune; on déterminera enſuite ſa parallaxe, l'heure que l'on comptoit dans l'obſervatoire $\zeta' 1$ à l'inſtant de la conjonction, & la différence en longitude des obſervatoires $\zeta' 1$, $\zeta' 2$, par l'équation (2) du *ſ. 29*, & par les équations (2), (6) & (1) du *ſ. 28.*

(36.) Il ſeroit poſſible de faire un uſage encore plus général des obſervations des plus grandes phaſes, ſans tomber dans des équations d'un degré ſupérieur au premier. On pourroit, par exemple, combiner juſqu'à trois obſervations de cette eſpèce, au moyen deſquelles, indépendamment des quantités dont il a été queſtion ci-deſſus, on détermineroit de plus le rapport des parallaxes du Soleil & de la Lune, la quantité abſolue de chacune de ces parallaxes, & les longitudes reſpectives des trois Obſervatoires. Mais il eſt aiſé de ſentir que quelque rigoureuſes que fuſſent les formules en théorie, quelqu'élégantes qu'elles paruſſent au premier coup-d'œil, il ſeroit impoſſible d'en rien conclure dans la pratique; attendu qu'elles exigeroient, dans l'obſervation & dans le calcul, une préciſion à laquelle il eſt impoſſible d'atteindre. Ces conſidérations m'ont fait ſupprimer la ſolution de ce Problème, & de pluſieurs autres queſtions du même genre. Au reſte, il eſt aiſé de voir la route qu'il auroit fallu ſuivre. Pour chaque obſervation on auroit deux équations; l'une de la forme de l'équation (1) du *ſ. 29*, & l'autre, de la forme de l'équation (2) du *ſ. 28.* Dans chacune de ces équations, les inconnues ne monteroient qu'au premier degré; on auroit

donc la ſolution du Problème, ſans tomber dans des équations d'un degré ſupérieur au premier.

ARTICLE TROISIÈME.

*Méthodes pour comparer deux Obſervations de phaſes, dans l'une deſquelles on a obſervé de plus, l'*angle de comparaiſon *correſpondant à l'inſtant de la phaſe.*

(37.) Je me propoſe, dans cet article, de donner les méthodes pour comparer deux obſervations de phaſes, dans l'une deſquelles, indépendamment de la quantité de la phaſe, on connoît de plus l'*angle de comparaiſon* correſpondant à cette phaſe. Comme ces obſervations peuvent déterminer trois des élémens ſuivans; la latitude de la Lune correſpondante à l'inſtant de la conjonction, ſa parallaxe horizontale polaire, l'heure de la conjonction, & la différence en longitude des deux Obſervatoires, pourvu toutefois que l'on connoiſſe le quatrième élément; cette queſtion donne lieu à quatre Problèmes.

SECTION PREMIÈRE,

Dans laquelle on ſuppoſe connue la parallaxe horizontale de la Lune, ou ſa latitude, correſpondante à l'inſtant de la conjonction.

(38.) J'ai réuni dans un ſeul Problème, les deux cas où l'on ſuppoſe connue l'une des deux quantités ſuivantes; la parallaxe horizontale polaire de la Lune, ou ſa latitude, correſpondante à l'inſtant de la conjonction; attendu la grande analogie qu'il y a entre les deux ſolutions. Je ſuppoſerai dans cet article, ainſi que je l'ai fait dans le précédent, que les diſtances obſervées des centres ont été corrigées par les formules des *§. 54 & ſuivans de mon VIII.e Mémoire.* *Année 1770.*
Je déſignerai par $z'1$ le lieu, relativement auquel, indépendamment de la quantité de la phaſe, on connoît de plus l'*angle*

de comparaiſon correſpondant à l'inſtant de l'obſervation. Je déſignerai par $z'2$ le lieu, relativement auquel on ne connoît que la quantité de la phaſe.

Quantités à évaluer relativement au lieu z' 1.

(39.) Soit

z 1 l'heure que l'on comptoit dans le lieu z' 1 à l'inſtant de l'obſervation.

λ la tangente de la diſtance obſervée des centres.

b^* le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction donné par les Tables aſtronomiques, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu z 1.

b le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation.

$$R = \overset{(R\,1)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} - \overset{(R\,2)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} - \overset{(R\,3)}{\frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}},$$

$$S = \overset{(S\,1)}{\frac{qs\omega}{r^2}} + \overset{(S\,2)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} - \overset{(S\,3)}{\frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}},$$

$$T = \overset{(T\,1)}{\frac{ps}{r}} + \overset{(T\,2)}{\frac{ch\rho q}{r^3}} + \overset{(T\,3)}{\frac{b^{*2}\gamma}{3600''^2}}.$$

m le ſinus } de l'angle de comparaiſon.
n le coſinus }

Année 1771. Je renvoye au *§. 25 de mon IX.e Mémoire*, pour l'évaluation de cet angle.

On a d'abord *(§. 28 & 29)*

$$(1.)\ \text{ſin. (latit. Lune)} = \frac{\zeta\pi R}{\psi r} + \frac{\lambda m}{\psi r}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right).$$

$$(2.)\ \pi = \frac{\psi r^2\ \text{ſin. (latitude de la Lune)} - \lambda m \xi r}{\zeta R r - \lambda m T}.$$

$$(3.)\ b = -\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta\ \text{ſin. (latitude de la Lune)}}{r} - \frac{\zeta\pi S}{r^2}\right)$$

$$+ \frac{3600''}{n'} \times \frac{n}{m} \times \left(\frac{\psi\ \text{ſin. (latitude de la Lune)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right).$$

(4) Heure que l'on comptoit dans le lieu z' 1 à l'inſt. de la conj. $= z\ 1 - b$.

Quantités à évaluer, relativement au lieu z′2.

ȥ 2 l'heure que l'on comptoit dans le lieu ȥ′ 2 à l'instant de l'observation.

λ' la tangente de la distance observée des centres.

b'^{*} le nombre de secondes horaires écoulées depuis l'instant de la conjonction, donné par les Tables astronomiques, jusqu'à l'instant de l'observation dans le lieu ȥ 2.

b' le nombre de secondes horaires écoulées depuis l'instant de la conjonction jusqu'à l'instant de l'observation.

$$R' = \overset{(R'1)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} - \overset{(R'2)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} - \overset{(R'3)}{\frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}},$$

$$S' = \overset{(S'1)}{\frac{qs\omega}{r^2}} + \overset{(S'2)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} - \overset{(S'3)}{\frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}},$$

$$T' = \overset{(T'1)}{\frac{ps}{r}} + \overset{(T'2)}{\frac{ch\rho q}{r^3}} + \overset{(T'3)}{\frac{b'^{*2}\gamma}{3600''^2}}.$$

$$L' = \overset{(L1)}{\frac{\lambda' r\xi}{\pi\zeta}} - \overset{(L2)}{\frac{\lambda' T'\pi}{\pi\zeta}}.$$

Il suit du §. *61* de mon *VIII.e Mémoire*, que l'on a *Année 1770.*

$$(5)\ b' = -\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta\ \text{sin. (latitude de la Lune)}}{r} - \frac{\zeta\pi S'}{r^2}\right)$$
$$\mp \frac{3600''}{n'}\sqrt{\left[\frac{\lambda'^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T'\pi}{r}\right)^2 - \left(\frac{\psi\ \text{sin. (latit. de la ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R'}{r^2}\right)^2\right]}.$$

(6) Heure que l'on comptoit dans le lieu ȥ′ 2 à l'inst. de la conj. $=$ ȥ 2 $- b'$.

(7) Longitude ȥ′ 1 $-$ longitude ȥ′ 2 $=$ ȥ 1 $-$ ȥ 2 $- b + b'$.

(40.) Il est évident que tout est maintenant déterminé dans le Problème. En effet, si c'est la latitude de la Lune qui est connue, on déterminera π, b, & l'heure que l'on comptoit dans le lieu ȥ′ 1 à l'instant de la conjonction, par le moyen des équations (2), (3) & (4) du §. *39;* on déterminera ensuite b', l'heure que l'on comptoit dans le

lieu $\zeta' 2$ à l'inſtant de la conjonction, & la différence en longitude des lieux $\zeta' 1$, $\zeta' 2$, par le moyen des équations (5), (6), (7) du même paragraphe.

Si c'eſt au contraire la parallaxe de la Lune qui eſt donnée, les calculs ſeront les mêmes, à l'exception toutefois qu'il faudra faire uſage de l'équation (1) du *§. 39*, au lieu de l'équation (2).

(41.) Je ne répéterai point ce que j'ai dit dans le *§. 25* de ce Mémoire auquel je renvoie, ſur le ſigne des quantités $R, S, T, m, n; R', S', T', m', n', \lambda, \lambda'$, &c. On peut relire ce paragraphe. Je remarquerai ſeulement que la quantité b' contient un terme précédé d'un double ſigne. Conformément à ce que j'ai démontré dans le *§. 65* de mon *VIII.e Mémoire*, on ſe ſervira du ſigne ſupérieur, lorſqu'à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu $\zeta' 2$, le centre de la Lune ſe ſera trouvé dans l'*hémiſphère précédent* du diſque du Soleil; on ſe ſervira du ſigne inférieur dans le cas contraire.

Année 1770.

Je ne donnerai point de type du calcul relatif au Problème dont il s'agit: comme ce type reſſembleroit à pluſieurs autres que j'ai donnés dans mes Mémoires précédens, j'ai cru pouvoir le ſupprimer.

(42.) Si l'on avoit obſervé uniquement l'inſtant de la plus grande phaſe dans le lieu $\zeta' 1$, ſans avoir obſervé la quantité de cette phaſe, on ne pourroit plus faire uſage des équations (1), (2) du *§. 39*; mais alors on auroit *(§. 29)*, des équations de la forme ſuivante:

$$(1)\quad \text{ſin. (latit. de la ☾)} = -\frac{b}{3600''}\cdot\times\frac{n'r}{\theta-\frac{n\psi}{m}} \pm \frac{\zeta\pi}{r}\times\frac{S-\frac{nR}{m}}{\theta-\frac{n\psi}{m}}$$

$$(2)\quad \pi = \frac{\left(\theta-\frac{n\psi}{m}\right) r\ \text{ſin. (latit. de la ☾)}}{\zeta\left(S-\frac{nR}{m}\right)} \pm \frac{b}{3600''}\,\frac{n'r^2}{\zeta\left(S-\frac{nR}{m}\right)}$$

(3),

$$(3)\ b = -\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta \text{ fin. (latitude de la Lune)}}{r} - \frac{\zeta\pi S}{r^2}\right)$$
$$+\frac{3600''}{n'}\times\frac{n}{m}\times\left(\frac{\psi \text{ fin. (latitude de la Lune)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right);$$

d'où l'on voit qu'en ſuppoſant connu deux des trois élémens ſuivans, la latitude de la Lune, ſa parallaxe, la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu $z'1$, on connoîtra le troiſième.

SECTION DEUXIÈME,

Dans laquelle on ſuppoſe connue la diſtance de l'inſtant de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation.

(43.) Le Problème que je me propoſe dans cette ſection, ſe ſubdiviſe en deux cas. Car où l'on connoît la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu $z'1$, la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu $z'2$ étant inconnue; ou, c'eſt au contraire, la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu $z'2$, qui eſt connue, l'autre diſtance étant inconnue. Comme chacun de ces deux cas demande une analyſe particulière, je vais les diſcuter ſéparément.

PREMIER CAS,

*Dans lequel on ſuppoſe connue la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu z' 1; c'eſt-à-dire dans le lieu, ou indépendamment de la quantité de la phaſe, on a de plus obſervé l'*angle de comparaiſon.

(44.) Si l'on combine l'équation (1) du *§. 42*, avec l'équation (2) du *§. 39*, on aura

$$\text{fin. (latit. ☾)} = -\frac{\frac{b}{3600''}\times n'r(\zeta Rr - \lambda mT) + \lambda m\xi\zeta\left(S - \frac{nR}{m}\right)}{\left(\theta - \frac{n\psi}{m}\right)\times(\zeta Rr - \lambda mT) - \zeta\psi r\left(S - \frac{nR}{m}\right)}.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on connoîtra la

latitude de la Lune; on déterminera ensuite sa parallaxe, par le moyen de l'équation (2) du *§. 39:* on déterminera enfin, l'heure que l'on comptoit dans le lieu $z'2$ à l'instant de la conjonction, & la différence en longitude des deux Observatoires $z'2$, $z'1$, au moyen des équations (5), (6), (7) du *§. 39.*

DEUXIÈME CAS,

Dans lequel on suppose connue la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation faite dans le lieu z'2, c'est-à-dire dans le lieu où l'on n'a observé que la quantité de la phase.

(45.) Au lieu de connoître la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation dans le lieu $z'1$, si cet instant étoit inconnu, & que ce fut, au contraire, la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation dans le lieu $z'2$ qui fut connue; on auroit alors *(§. 39)*

$$(1)\ b'n'r^2 + 3600''\,(\theta r\,\text{fin. (latit. de la Lune)} - \zeta\pi S')$$
$$\pm 3600''\sqrt{[\lambda'^2(r\xi - T'\pi)^2 - (\psi r\,\text{fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R')^2]} = 0,$$

$$(2)\ \psi r\ \text{fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R - \lambda m\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right) = 0.$$

De ces deux équations l'on tire

$$(3)\ \pi^2 + 2P\pi + Qr = 0;$$

en supposant d'ailleurs

$$G = \overset{(G\,1)}{\frac{\zeta(R - R')}{r}} - \overset{(G\,2)}{\frac{\lambda m T}{r^2}},$$

$$H = \overset{(H\,1)}{\frac{\theta}{\psi} \times \frac{\zeta R}{r}} - \overset{(H\,2)}{\frac{\theta}{\psi} \times \frac{\lambda m T}{r^2}} - \overset{(H\,3)}{\frac{\zeta S'}{r}},$$

$$N = \overset{(N\,1)}{\frac{G^2}{r}} + \overset{(N\,2)}{\frac{H^2}{r}} - \overset{(N\,3)}{\frac{\lambda'^2 T'^2}{r^3}},$$

$$M = \overset{(M1)}{\frac{\theta}{\psi} \times \frac{\lambda m \xi}{r^2}} + \overset{(M2)}{\frac{b'}{3600''} \times n'},$$

$$P = \overset{(P1)}{\frac{\lambda m \xi G}{N r^2}} + \overset{(P2)}{\frac{MH}{N}} + \overset{(P3)}{\frac{\lambda'^2 T' \xi^2}{N r^2}},$$

$$Q = \overset{(Q1)}{\frac{\lambda^2 m^2 \xi^2}{N r^4}} + \overset{(Q2)}{\frac{M^2}{N}} - \overset{(Q3)}{\frac{\lambda'^2 \xi^2}{N r^2}}.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on connoîtra la parallaxe de la Lune. On déterminera enſuite ſa latitude, au moyen de l'équation (2). On connoîtra le nombre de ſecondes écoulées depuis l'inſtant de la conjonction juſqu'à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu $\zeta' 1$, & l'heure que l'on comptoit dans ce lieu à l'inſtant de la conjonction, au moyen des équations (3), (4) du *§. 39.* On déterminera enfin la différence en longitude des lieux $\zeta' 1$, $\zeta' 2$, par l'équation (7) du *§. 39.*

SECTION TROISIÈME,

Dans laquelle on ſuppoſe connue la différence en Longitude des deux Obſervatoires.

(46.) Si l'on connoiſſoit la différence en longitude des deux Obſervatoires, on pourroit également déterminer la parallaxe horizontale polaire de la Lune, ſa latitude, & l'heure que l'on comptoit à l'inſtant de la conjonction, dans chacun des Obſervatoires. En effet, ſi l'on conſerve les définitions du *§. 39*, il eſt bien évident que l'on a les équations ſuivantes,

(1) ψr ſin. (latit. de la ☾) $- \zeta \pi R - \lambda m \left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right) = 0.$

(2) $\frac{b}{3600''} \times n' r^2 + \theta r$ ſin. (latitude de la Lune) $- \zeta \pi S$

$- \frac{n}{m} \times (\psi r$ ſin. (latitude de la Lune) $- \zeta \pi R) = 0.$

(3) $\frac{b'}{3600''} \times n' r^2 + \theta r$ fin. (latitude de la Lune) $- \zeta \pi S'$
$\pm \sqrt{[\lambda'^2 (r\xi - T'\pi)^2 - (\psi r \text{ fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R')^2]} = 0.$

(4) Longitude $\zeta' 1$ — longitude $\zeta' 2 = \zeta 1 - \zeta 2 - b + b'$.

Soit maintenant

(5) $\Delta =$ Longitude $\zeta' 1$ — longitude $\zeta' 2 - \zeta 1 + \zeta 2$;

on aura

(6) $b' - b - \Delta = 0$.

(7) $\frac{b'}{3600''} \times n' r^2 - \frac{\Delta}{3600''} n' r^2 + \theta r$ fin. (latit. ☾) $- \zeta \pi S$
$- \frac{n}{m} \times (\psi r$ fin. (latitude de la Lune) $- \zeta \pi R) = 0.$

(8) $\frac{\Delta}{3600''} \times n' r^2 + \zeta\pi(S - S') + \frac{n}{m} \times \psi r$ fin. (lat. ☉) $- \frac{n}{m} \times \zeta \pi R$
$\pm \sqrt{[\lambda'^2 (r\xi - T'\pi)^2 - (\psi r \text{ fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R')^2]} = 0.$

De la combinaifon des équations (1) & (8), l'on tire

$$\pi^2 + 2P\pi + Qr = 0;$$

en fuppofant d'ailleurs

$$G = \overset{(G\,1)}{\frac{\zeta(R - R')}{r}} - \overset{(G\,2)}{\frac{\lambda m T}{r^2}},$$

$$H = \overset{(H\,1)}{\frac{\zeta(S - S')}{r}} - \overset{(H\,2)}{\frac{\lambda n T}{r^2}},$$

$$M = \overset{(M\,1)}{\frac{\lambda n \xi}{r^2}} + \overset{(M\,2)}{\frac{\Delta}{3600''}} \times n',$$

$$N = \overset{(N\,1)}{\frac{G^2}{r}} + \overset{(N\,2)}{\frac{H^2}{r}} - \overset{(N\,3)}{\frac{\lambda'^2 T'^2}{r^3}},$$

$$P = \overset{(P\,1)}{\frac{\lambda m \xi G}{N r^2}} + \overset{(P\,2)}{\frac{MH}{N}} + \overset{(P\,3)}{\frac{\lambda'^2 T' \xi}{N r^2}},$$

$$Q = \overset{(Q\,1)}{\frac{\lambda^2 m^2 \xi^2}{N r^4}} + \overset{(Q\,2)}{\frac{M^2}{N}} - \overset{(Q\,3)}{\frac{\lambda'^2 \xi^2}{N r^2}}.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on connoîtra la parallaxe de la Lune; on déterminera enſuite ſa latitude par l'équation (1); le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction juſqu'aux inſtans des obſervations dans les lieux $z'1$, $z'2$, par les équations (2) (6); on connoîtra enfin l'heure que l'on comptoit dans les lieux $z'1$, $z'2$, à l'inſtant de la conjonction, au moyen des équations

(9) Heure que l'on comptoit dans le lieu $z'1$ à l'inſtant de la conjonction $= z1 - b$,

(10) Heure que l'on comptoit dans le lieu $z'2$ à l'inſtant de la conjonction $= z2 - b'$.

Je ne répéterai point ici ce que j'ai dit dans le *§. 25* de ce Mémoire, auquel je renvoie, ſur le ſigne des quantités R, S, T, λ, m, n; R', S', T' λ', &c. on peut relire ce paragraphe. Quant aux quantités G, H, M, N, P, Q, elles ont le ſigne déterminé par les équations qui donnent leurs valeurs. Comme toutes les fois que l'on fait entrer dans le calcul, une obſervation de l'angle de comparaiſon, ou d'une plus grande phaſe, il ne me paroît guère poſſible de ſuppoſer à l'obſervation, ce degré d'exactitude qui ſeroit néceſſaire, pour pouvoir abſolument compter ſur les réſultats; je n'ai pas cru devoir donner les Types du calcul, relativement à des formules que l'on doit employer avec circonſpection. On ne doit point perdre de vue la remarque du *§. 41*, lorſque l'on fera uſage de l'équation (3).

REMARQUE ſur les Équations des §. 45 & 46.

(47.) Dans les équations des *§. 45 & 46*, la valeur de la parallaxe eſt du ſecond degré; laquelle des deux racines doit-on choiſir? Il eſt facile de réſoudre cette difficulté; il faut choiſir dans le premier cas, celle des deux valeurs de π, qui, ſubſtituée dans l'équation (1) du *§. 45*, ainſi que la latitude de la Lune correſpondante, donne la valeur de b' que l'on connoît d'ailleurs; il faut choiſir dans le ſecond cas, celle

des deux valeurs de π, qui, ſubſtituée dans l'équation (4) du *§. 46,* ainſi que la latitude de la Lune, & les quantités b, b' correſpondantes, donne la différence en longitude des lieux $z'1$, $z'2$, que l'on connoît d'ailleurs. La ſeule attention qu'il faut avoir, eſt d'employer convenablement les quantités b, b'; c'eſt-à-dire conformément à la Remarque du *§. 41.*

(48.) La ſolution du dernier Problème, fait voir combien il eût été à deſirer, lors du paſſage de Vénus, d'avoir une excellente obſervation d'une véritable plus grande phaſe, ou d'une diſtance quelconque des centres du Soleil & de Vénus, combinée avec l'obſervation ſimultanée de l'angle de comparaiſon. Cette obſervation, comparée à une autre diſtance obſervée dans le même lieu, ou dans un autre lieu dont la différence en longitude eût été bien connue, auroit déterminé, par l'analyſe la plus directe, tout ce que l'on peut deſirer ſur ce paſſage; la diſtance du Soleil à la Terre, la latitude de Vénus à l'inſtant de la conjonction, & l'heure de cette conjonction. Je doute qu'il y ait des obſervations de cette eſpèce, aſſez préciſes pour être employées dans la dernière formule.

ARTICLE QUATRIÈME.

Méthodes pour comparer deux Obſervations de phaſes quelconques.

(49.) Dans les Problèmes que nous venons de réſoudre, un des termes de comparaiſon a toujours été une plus grande phaſe, ou une diſtance des centres, combinée avec l'obſervation ſimultanée de l'angle de comparaiſon. Je vais donner maintenant des formules pour comparer deux phaſes quelconques. Cette conſidération fait ſentir, que les obſervations que nous nous propoſons de calculer, n'étant pas affectées de l'incertitude de l'inſtant vrai de la plus grande phaſe, ou de la quantité préciſe de l'angle de comparaiſon, les réſultats peuvent être très-exacts. On pourra donc employer ces

ſormules, ſans craindre aucun des inconvéniens relevés dans les paragraphes précédens.

(50.) Comme dans cet article, nous nous propoſons de déterminer, d'après deux obſervations, deux des quantités ſuivantes; l'heure de la conjonction, la latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction, ſa parallaxe horizontale polaire, & la différence en longitude des deux Obſervatoires; en ſuppoſant toutefois connues les deux autres quantités; & que d'ailleurs quatre quantités ſe combinent deux à deux, de ſix façons différentes, il eſt évident que l'on aura à réſoudre les queſtions ſuivantes.

	Données	*Cherchées*
Premier Cas.	La parallaxe & la latitude de la Lune.	L'heure de la conjonction & la différence en longitude des deux obſervatoires.
Deuxième Cas.	L'heure de la conjonction, & la parallaxe de la Lune.	La latitude de la Lune, & la différence en longitude des deux obſervatoires.
Troiſième Cas.	L'heure de la conjonction, & la latitude de la Lune.	La parallaxe de la Lune, & la différence en longitude des deux obſervatoires.
Quatrième Cas.	La parallaxe de la Lune, & la différence en longitude des deux obſervatoires.	La latitude de la Lune, & l'heure de la conjonction.
Cinquième Cas.	La latitude de la Lune, & la différence en longitude des deux obſervatoires.	La parallaxe de la Lune, & l'heure de la conjonction.
Sixième Cas.	L'heure de la conjonction, & la différence en longitude des deux obſervatoires.	La latitude de la Lune, & ſa parallaxe.

Nous allons nous occuper ſucceſſivement de ces différentes queſtions.

SECTION PREMIÈRE,

Dans laquelle on ſuppoſe connues la parallaxe de la Lune, & ſa latitude, & l'on cherche l'heure de la conjonction, & la différence en longitude des deux Obſervatoires.

(51.) Dans cette ſection, nous ſuppoſerons connues la parallaxe de la Lune, & ſa latitude, nous nous propoſons de déterminer en conſéquence, la différence en longitude des deux Obſervatoires, & l'heure que l'on comptoit dans chacun des Obſervatoires, à l'inſtant de la conjonction. Je ſuppoſerai dans cette ſection & dans les ſuivantes, que les diſtances obſervées des centres ont été corrigées par les formules du §. 54 de mon *VIII.ᵉ Mémoire.*

Année 1770.

Soit

z' 1, un des lieux où l'on a obſervé.

z 1 l'heure que l'on comptoit dans le lieu z' 1 à l'inſtant de l'obſervation.

λ la tangente de la diſtance obſervée des centres.

b^* le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction, donné par les Tables aſtronomiques, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu z'1.

b le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation dans le lieu z'1.

Quantités à évaluer relativement au lieu z' 1.

$$R = \overset{(R\,1)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} - \overset{(R\,2)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} - \overset{(R\,3)}{\frac{chp\rho\varphi}{r^4}},$$

$$S = \overset{(S\,1)}{\frac{qs\omega}{r^2}} + \overset{(S\,2)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} - \overset{(S\,3)}{\frac{chp\rho\omega}{r^4}},$$

$$T = \overset{(T\,1)}{\frac{ps}{r}} + \overset{(T\,2)}{\frac{ch\rho q}{r^3}} + \overset{(T\,3)}{\frac{b^{*2}\gamma}{3600''^2}}.$$

Quantités à évaluer relativement au lieu z'2.

Soit d'ailleurs

z'2 l'autre lieu où l'on a obſervé.

z2 l'heure

ζ 2 l'heure que l'on comptoit dans le lieu ζ' 2 à l'instant de l'observation.

λ' la tangente de la distance des centres observée dans le lieu ζ'2.

b'^* le nombre de secondes horaires écoulées depuis l'instant de la conjonction, donné par les Tables astronomiques, jusqu'à l'instant de l'observation dans le lieu ζ' 2.

b' le nombre de secondes horaires écoulées depuis l'instant de la conjonction jusqu'à l'instant de l'observation dans le lieu ζ'2.

$$R' = \overset{(R'\,1)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} - \overset{(R'\,2)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} - \overset{(R'\,3)}{\frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}},$$

$$S' = \overset{(S'\,1)}{\frac{qs\omega}{r^2}} + \overset{(S'\,2)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} - \overset{(S'\,3)}{\frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}},$$

$$T' = \overset{(T'\,1)}{\frac{ps}{r}} + \overset{(T'\,2)}{\frac{ch\rho q}{r^3}} + \overset{(T'\,3)}{\frac{b'^{*2}\gamma}{3600''^2}}.$$

Il suit de ce qui a été démontré précédemment, que l'on a les équations suivantes,

$$(1)\ b = -\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta\ \text{fin. (latitude de la Lune)}}{r} - \frac{\zeta\pi S}{r^2}\right)$$
$$\mp\frac{3600''}{n'}\sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi-\frac{T\pi}{r}\right)^2-\left(\frac{\psi\ \text{fin. (latit. ☾)}}{r}-\frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)^2\right]}.$$

(2) Heure que l'on comptoit dans le lieu ζ' 1 à l'inst. de la conjonc. $= \zeta\, 1 - b$.

$$(3)\ b' = -\frac{3600''}{n'}\left(\frac{\theta\ \text{fin. (latitude de la Lune)}}{r} - \frac{\zeta\pi S'}{r^2}\right)$$
$$\mp\frac{3600''}{n'}\sqrt{\left[\frac{\lambda'^2}{r^2}\left(\xi-\frac{T'\pi}{r}\right)^2-\left(\frac{\psi\ \text{fin. (latit. ☾)}}{r}-\frac{\zeta\pi R'}{r^2}\right)^2\right]}.$$

(4) Heure que l'on comptoit dans le lieu ζ'2 à l'inst. de la conjonc. $= \zeta\, 2 - b'$.

(5) Longitude ζ' 1 — longitude ζ' 2 $= \zeta\, 1 - \zeta\, 2 - b + b'$.

(52.) Les valeurs de b & de b' sont doubles. Il n'est pas indifférent de se servir de l'une ou de l'autre de ces valeurs. On fera usage des signes supérieurs de b, si à l'instant de l'observation dans le lieu ζ' 1, le centre de la Lune s'est trouvé dans l'*hémisphère précédent* du disque du Soleil; on fera usage des signes inférieurs dans le cas contraire. La même règle s'applique à l'expression de b'.

Je ne donnerai point de Type du calcul pour le Problème, qui nous occupe. Comme cela se réduit à faire deux fois

une opération peu différente de celle détaillée dans le *§. 68*
 de mon *VIIIe Mémoire;* je renvoie à ce paragraphe.

SECTION DEUXIÈME,

Dans laquelle on suppose connues la parallaxe de la Lune, & la distance de la conjonction à l'instant de l'observation dans l'un des deux Observatoires, & l'on cherche la latitude de la Lune, & la différence en Longitude des deux Observatoires.

(53.) Dans cette section je supposerai connues la parallaxe horizontale polaire de la Lune, & la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation faite dans l'un des deux Observatoires. Je me propose de déterminer en conséquence, la latitude de la Lune correspondante à l'instant de la conjonction, la différence en Longitude des deux Observatoires, & l'heure que l'on comptoit à l'instant de la conjonction dans l'autre Observatoire. Je conserverai toutes les définitions du *§. 51;* je supposerai de plus, que le lieu, relativement auquel on connoît la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation, est le lieu ζ' 1.

(54.) Il est évident que relativement à la question présente, l'équation (1) du *§. 51* peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{b}{3600''}\,\eta' r^2 + \theta r \text{ fin. (latitude de la Lune)} - \zeta\pi S$$

$$\pm \sqrt{[\lambda^2(\xi r - T\pi)^2 - (\psi r \text{ fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R)^2]} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\text{fin.}^2 \text{ (latit. de la ☾)} + 2P \text{ fin. (latit. de la ☾)} + Qr = 0;$$

en supposant d'ailleurs

$$G = \overset{(G\,1)}{\frac{b}{3600''}\,\eta'} - \overset{(G\,2)}{\frac{\zeta\pi S}{r^2}}$$

$$P = \overset{(P1)}{\frac{G\theta}{r}} - \overset{(P2)}{\frac{\zeta\psi\pi R}{r^3}},$$

$$Q = \overset{(Q1)}{\frac{\zeta^2 R^2 \pi^2}{r^5}} + \overset{(Q2)}{\frac{G^2}{r}} - \overset{(Q3)}{\frac{\lambda^2 (\xi - \frac{T\pi}{r})^2}{r^3}}.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on connoîtra la latitude de la Lune. On déterminera ensuite le nombre de secondes horaires écoulées depuis l'instant de la conjonction jusqu'à l'instant de l'observation dans le lieu ζ' 2, l'heure que l'on comptoit dans ce lieu à l'instant de la conjonction, & la différence en longitude des lieux ζ' 1, ζ' 2, au moyen des équations (3), (4), (5) du *§. 51.* Dans l'usage de ces formules, on doit sur-tout ne point perdre de vue, les remarques du *§. 52.*

(55.) L'équation du *§. 54,* donne deux valeurs de sin. (latitude de la Lune); il y a donc deux latitudes de la Lune qui peuvent satisfaire au Problème. L'une suppose qu'à l'instant de l'observation dans le lieu ζ' 1, le centre de la Lune s'est trouvé dans l'*hémisphère précédent* du disque du Soleil; l'autre suppose qu'à l'instant de l'observation dans le lieu ζ' 1, le centre de la Lune étoit dans l'*hémisphère suivant.* Au reste, il est toujours facile de se déterminer sur le choix de ces deux latitudes, par le moyen suivant. Lorsque, conformément à la remarque du *§. 52,* on aura déterminé laquelle des deux valeurs de *b* l'on doit employer dans le cas particulier dont il s'agit, on portera successivement dans cette expression, les deux valeurs de la latitude de la Lune; celle qui rendra nulle cette expression, est celle qui satisfait au Problème, pour le cas dont il s'agit.

EXEMPLE.

(56.) *Je suppose que le 1.er Avril 1764, on ait observé à Londres, une distance des centres de 30′ 44″,3, à 9h 4′ 33″ du matin, 4615″ avant la conjonction, le centre de la Lune*

étant alors dans l'hémisphère précédent du disque du Soleil; que de plus on ait observé sous le même parallèle, une distance des centres de $1' \, 21'',4$, *lorsque l'on comptoit dans ce dernier lieu* $10^h \, 30' \, 44''$ *du matin, le centre de la Lune étant dans l'hémisphère suivant du disque du Soleil. On demande quelle étoit la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction, & la différence en longitude des deux Observatoires, en supposant d'ailleurs la parallaxe horizontale polaire de la Lune, de* $54' \, 1'',5$, *à l'instant de la conjonction.*

SOLUTION. Dans le cas particulier dont il s'agit, Londres est le lieu désigné par $\zeta' 1$, l'autre lieu est désigné par $\zeta' 2$; on a donc

$$b = -\ 4615''. \qquad \text{Log.}\ b = 6{,}6641717.$$
$$R = +\ 85836. \qquad \text{Log.}\ R = 9{,}9336695.$$
$$S = -\ 2554. \qquad \text{Log.}\ S = 8{,}4072209.$$
$$T = +\ 52000. \qquad \text{Log.}\ T = 9{,}7160033.$$
$$\xi - \frac{T\pi}{r} = +\ 99176. \qquad \text{Log.}\ \xi - \frac{T\pi}{r} = 9{,}9964066.$$
$$\lambda = \text{tang.}\ 0^d\, 30'\, 44'',3. \qquad \text{Log.}\ \lambda = 7{,}9514300.$$

Donc

TYPE du Calcul.

$$G = -(G\,1) + (G\,2).$$

(G 1)	*(G 2)*
6,6641717 . . . log. b.	9,9986603 . . . log. ζ.
7,9002877 . . . log. n'.	8,1963030 . . . log. π.
3,4436975 comp. arith. log. 3600''.	8,4072209 . . . log. S.
8,0081569 . . . log. 1018,95.	6,6021842 . . . log. 40,01.

$G = -\ 978{,}94.$ Log. $G = 7{,}9907561.$ $\frac{G^2}{r} = 9{,}58.$

$$P = -(P1) - (P2)$$

(P1)	(P2)
7,9907561 . . . log. G.	9,9986603 . . . log. ζ.
9,0001044 . . . log. θ.	8,1963030 . . . log. π.
6,9908605 . . . log. 97,92.	9,9336695 . . . log. R.
	9,9978165 . . . log. ψ.
	8,1264493 . . . log. 1337,97.

$P = -1435,89$. $P = 8,1571242$.

$$Q = +(Q1) + (Q2) - (Q3) \ldots (Q2) = 9,58.$$

(Q1)	(Q3)
9,9973206 . . . log. ζ^2.	5,9028600 . . . log. λ^2.
6,3926060 . . . log. π^2.	9,9928132 . . . log. $(\xi - \frac{T\pi}{r})^2$.
9,8673390 . . . log. R^2.	
6,2572656 . . . log. 18,08.	5,8956732 . . . log. 7,86.

$Q = +19,80$. Log. $Q = 6,2966652$. Log. $\sqrt{(Qr)} = 8,1483326$.

L'équation qui satisfait à la question particulière dont il s'agit, est donc

$$\text{sin.}^2 (\text{latit.} ☾) - 2 \times 1435,89 \text{ sin.} (\text{latit.} ☾) + 19,80 \times r = 0.$$

Donc conformément au *§. 45 de mon IVe Mémoire* *Année 1766.*

8,1483326 . . . log. $\sqrt{(Qr)}$.
1,8428758 . . . comp. arith. log. P.

9,9912084 . . . log. sin. $\left\{ \begin{matrix} B \\ B' \end{matrix} \right\}$

$B = 78^d\ 30'\ 40''$.	$B' = 101^d\ 29'\ 20''$.
$\frac{B}{2} = 39.\ 15.\ 20.$	$\frac{B'}{2} = 50.\ 44.\ 40.$
9,9123262 . . . log. tang. $\frac{B}{2}$.	10,0876738 . . . log. tang. $\frac{B'}{2}$.
8,1483326 . . . log. $\sqrt{(Qr)}$.	8,1483326 . . . log. $\sqrt{(Qr)}$.
8,0606588 . . . log. sin. (latit. ☾).	8,2360064 . . . log. sin. (latit. ☾)
sin. (latit. de la Lune)...positif.	sin. (latit. de la Lune)...négatif.
Latitude de la Lune $= 39'\ 31'',8$.	Latitude de la Lune $= 59'\ 12''$.

(57.) Pour déterminer laquelle des deux latitudes satisfait au Problème; conformément à ce qui est prescrit §. 55, je porte les deux latitudes de la Lune dans la première des deux valeurs de b de l'équation (1) du §. 51; c'est celle que l'on doit employer dans le cas dont il s'agit, puisqu'à l'instant de l'observation le centre de la Lune étoit dans l'*hémisphère précédent* du disque du Soleil; je donne d'ailleurs à π les valeurs convenables. La seule latitude de 39′ 31″,8 rend nulle cette équation; cette latitude est donc celle qui satisfait véritablement à l'observation dont il s'agit.

(58.) Pour déterminer maintenant la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation dans le lieu $\zeta'2$, l'heure que l'on comptoit dans ce lieu à l'instant de la conjonction, & la différence en longitude des deux observatoires; on fera usage, ainsi que je l'ai dit, des équations (3), (4), (5) du §. 51. Je ne donnerai point de Type du reste du calcul; il ne peut avoir aucune difficulté, après les exemples détaillés dans le cours de cet ouvrage.

SECTION TROISIÈME,

Dans laquelle on suppose connues la latitude de la Lune correspondante à l'instant de la conjonction, ainsi que la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation dans l'un des deux Observatoires, & l'on cherche la parallaxe de la Lune, & la différence en longitude des deux Observatoires.

(59.) Dans cette section je supposerai connues la latitude de la Lune correspondante à l'instant de la conjonction, & la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation faite dans l'un des deux Observatoires; je me propose de déterminer en conséquence, la parallaxe horizontale polaire de la Lune correspondante à l'instant de la conjonction, la différence en longitude des deux Observatoires, & l'heure que l'on comptoit à l'instant de la

conjonction dans l'autre Observatoire. Je conserverai toutes les définitions du §. 51; je supposerai de plus que le lieu, relativement auquel on connoît la distance de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation, est désigné par z' 1.

(60.) Relativement à la question présente, l'équation (1) du §. 51, peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{b}{3600''} \times n' r^2 + \theta r \text{ sin. (latitude de la Lune)} - \zeta \pi S$$

$$\pm \sqrt{[\lambda^2 (\xi r - T\pi)^2 - (\psi r \text{ sin. (latit. ☾)} - \zeta \pi R)^2]} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\pi^2 + 2P\pi + Qr = 0;$$

en supposant d'ailleurs

$$G = \overset{(G1)}{\frac{b}{3600''} \times n'} + \overset{(G2)}{\frac{\theta \text{ sin. (latitude de la Lune)}}{r}},$$

$$N + \overset{(N1)}{\frac{\zeta^2 R^2}{r^3}} + \overset{(N2)}{\frac{\zeta^2 S^2}{r^3}} - \overset{(N3)}{\frac{\lambda^2 T^2}{r^3}},$$

$$P = \overset{(P1)}{\frac{\lambda^2 T \xi}{N r^2}} - \overset{(P2)}{\frac{G \zeta S}{N r}} - \overset{(P3)}{\frac{\psi R \zeta \text{ sin. (latit. de la ☾)}}{N r^2}},$$

$$Q = \overset{(N1)}{\frac{G^2}{N}} + \overset{(N2)}{\frac{\psi^2 \text{ sin.}^2 \text{ (latitude de la Lune)}}{N r^2}} - \overset{(N3)}{\frac{\lambda^2 \xi^2}{N r^2}}.$$

(61.) L'équation du §. 60 donne deux valeurs de π, il y a donc deux parallaxes de la Lune qui peuvent satisfaire au Problème. L'une suppose qu'à l'instant de l'observation dans le lieu z' 1, le centre de la Lune s'est trouvé dans l'*hémisphère précédent* du disque du Soleil; l'autre suppose qu'à l'instant de l'observation dans le lieu z' 1, le centre de la Lune étoit dans l'*hémisphère suivant.* Au reste, il est toujours facile de se déterminer sur le choix de ces deux parallaxes, par le moyen suivant. Lorsque, conformément à la remarque du §. 52, on aura déterminé laquelle des deux valeurs de b l'on doit employer dans le cas particulier dont il s'agit, on portera successivement dans cette

expreſſion, les deux valeurs de la parallaxe de la Lune: celle qui rendra nulle cette expreſſion, eſt celle qui ſatisfait au Problème, pour le cas dont il s'agit.

Nous remarquerons ici que ſi l'une des deux valeurs de la parallaxe étoit négative, le choix des deux valeurs ſeroit bien facile, puiſque la parallaxe négative ne peut avoir lieu pour les éclipſes de Soleil.

Je ne donnerai point de Type du calcul relatif à la queſtion préſente; le Type précédent doit guider.

Remarques relatives à toutes les queſtions dans leſquelles la parallaxe de la Lune eſt une des inconnues du Problème.

(62.) On pourroit faire la difficulté ſuivante, relativement à toutes les queſtions dans leſquelles la parallaxe de la Lune eſt une des inconnues du Problème. Dans les formules précédentes, la diſtance obſervée des centres eſt une des données; mais au premier coup-d'œil cette diſtance paroît dépendre de la parallaxe. Suppoſons en effet qu'il s'agiſſe d'un contact des limbes; la réduction de l'obſervation dépend du diamètre apparent de la Lune, que l'on pourroit regarder comme une fonction de la parallaxe. Quoiqu'il fût très-facile de faire entrer cette conſidération dans les calculs, ſans les compliquer, examinons ſi dans l'état actuel de l'Aſtronomie, on doit y avoir égard.

Le demi-diamètre apparent de la Lune dépend de deux choſes; du demi-diamètre horizontal, & de l'augmentation du demi-diamètre horizontal, relativement à l'élévation de la Lune ſur l'horizon. La valeur moyenne du demi-diamètre horizontal de la Lune, eſt d'environ 16 minutes; ſa plus grande augmentation, relativement à l'élévation de la Lune ſur l'horizon, eſt d'environ un ſoixantième de ſa grandeur totale; elle eſt donc d'environ 16 ſecondes; elle eſt d'ailleurs proportionnelle à la parallaxe, dont la valeur moyenne eſt d'environ 57 degrés. On voit par-là qu'il faudroit ſuppoſer une très-grande erreur dans la parallaxe des Tables pour en occaſionner

une

une d'une ſeconde dans cette augmentation. On peut donc, dans les queſtions où l'on regarde la parallaxe de la Lune comme une des inconnues du Problème, partir de l'hypothèſe de la parallaxe des Tables, pour calculer l'augmentation du diamètre de la Lune. Je ferai voir par la ſuite, comment ſans compliquer les calculs, on pourroit même regarder la parallaxe comme inconnue, relativement à cet élément.

Quant au diamètre horizontal de la Lune, les Aſtronomes ont établi un rapport entre la parallaxe horizontale de cet aſtre & ſon diamètre. Il paroîtroit donc, au premier coup-d'œil, que lorſqu'on ne fait point uſage de la parallaxe des Tables, on ne doit point employer le diamètre conclu de cette parallaxe. Je ne ſai cependant ſi cette concluſion ne ſeroit pas précipitée. Lorſque les Aſtronomes ont établi le rapport dont je viens de parler, ils ont comparé le diamètre de la Lune actuellement meſuré, avec la parallaxe actuelle des Tables; & de cette comparaiſon faite dans toutes les poſitions de la Lune, ils en ont fait réſulter le rapport qu'ils ont adopté, entre le demi-diamètre horizontal de la Lune & ſa parallaxe. Ce rapport eſt donc relatif à la parallaxe ſuppoſée des Tables, de ſorte qu'il y a compenſation entre l'erreur de la parallaxe & l'erreur de ce rapport. Il faut donc, ſuivant moi, adopter dans tous les cas le demi-diamètre horizontal de la Lune, tiré des Tables.

SECTION QUATRIÈME,

Dans laquelle on ſuppoſe connues la parallaxe horizontale polaire de la Lune correſpondante à l'inſtant de la conjonction, & la différence en longitude des deux Obſervatoires; & l'on demande la latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction, & l'heure que l'on comptoit à cet inſtant dans chacun des deux Obſervatoires.

(63.) Dans cette ſection, je ſuppoſerai connues la

parallaxe horizontale polaire de la Lune correſpondante à l'inſtant de la conjonction, & la différence en longitude des deux Obſervatoires; je me propoſe de déterminer en conſéquence la latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction, & l'heure que l'on comptoit à cet inſtant dans chacun des deux Obſervatoires. Je conſerverai toutes les définitions du *§. 51.*

(64.) Des équations (1) & (3) du *§. 51*, l'on tire

$$(1)\ +\psi^2 r^2 \text{ſin.}^2(\text{latit.} ☾) - 2\psi r\zeta R\pi \text{ ſin.}(\text{latit.} ☾) + \zeta^2\pi^2 R^2 + \theta^2 r^2 \text{ſin.}^2(\text{latit.} ☾) - 2\theta r\zeta S\pi \text{ ſin.}(\text{latit.} ☾) + \zeta^2\pi^2 S^2 - \frac{2b}{3600''}\times n' r^2\zeta\pi S + \frac{2b}{3600''}\times n' r^3\theta \text{ ſin.}(\text{latit.} ☾) + \frac{b^2}{3600''^2}\times n'^2 r^4 - \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 = 0.$$

$$(2)\ +\psi^2 r^2 \text{ſin.}^2(\text{latit.} ☾) - 2\psi r\zeta R'\pi \text{ ſin.}(\text{latit.} ☾) + \zeta^2\pi^2 R'^2 + \theta^2 r^2 \text{ſin.}^2(\text{latit.} ☾) - 2\theta r\zeta S'\pi \text{ ſin.}(\text{latit.} ☾) + \zeta^2\pi^2 S'^2 - \frac{2b'}{3600''}\times n' r^2\zeta\pi S' + \frac{2b'}{3600''}\times n' r^3\theta \text{ ſin.}(\text{lat.} ☾) + \frac{b'^2}{3600''^2}\times n'^2 r^4 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 = 0.$$

Si l'on ſouſtrait l'équation (1) de l'équation (2), on aura

$$(3)\ +2\psi r\zeta\pi \text{ ſin.}(\text{latit.} ☾)\times(R - R') + \zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2) + 2\theta r\zeta\pi \text{ ſin.}(\text{latit.} ☾)\times(S - S') + \zeta^2\pi^2(S'^2 - S^2) - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 - \frac{2b'}{3600''}\times n' r^2\zeta\pi S' + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 + \frac{2b}{3600''}\times n' r^2\zeta\pi S + 2n' r^3\theta \text{ ſin. latit.} ☾ \times \frac{b' - b}{3600''} + n'^2 r^4\left(\frac{b' - b}{3600''}\right)\times\left(\frac{b' + b}{3600''}\right) = 0.$$

On a de plus *(§. 46)*,

Longitude $\zeta' 1$ — longitude $\zeta' 2 = \zeta 1 - \zeta 2 - b + b'$.

Soit maintenant comme dans le *§. 46*,

$$(4)\ \Delta = \text{longitude } \zeta' 1 - \text{longitude } \zeta' 2 - \zeta 1 + \zeta 2;$$

on aura

$$(5)\ b' - b - \Delta = 0;$$

& par conféquent

$$b' - b = \Delta;\ b' = b + \Delta;\ b' + b = 2b + \Delta;$$

$$(b' - b) \times (b' + b) = \Delta^2 + 2b\Delta.$$

Si l'on fubftitue ces valeurs dans l'équation (3), elle deviendra

$$\begin{aligned}(6) &+ 2\psi r\zeta\pi \text{ fin. (latit. ☾)} \times (R - R') + \zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2) \\ &- \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 \\ &+ 2\theta r \text{ fin. (latit. ☾)} \times \left[\zeta\pi(S - S') + \frac{\Delta}{3600''} \times n' r^2\right] \\ &+ \left(\frac{\Delta}{3600''} \times n' r^2 - \zeta\pi S'\right)^2 - \zeta^2\pi^2 S^2 \\ &+ \frac{2b}{3600''} \times n' r^2 \left[\zeta\pi(S - S') + \frac{\Delta}{3600''} \times n' r^2\right] = 0;\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(7)\ \frac{b}{3600''} \times \Gamma n' + \varepsilon \text{ fin. (latit. de la ☾)} + \frac{\mu r}{2} = 0;$$

en fuppofant d'ailleurs

$$\Gamma = \overset{(\Gamma 1)}{\frac{\Delta}{3600''} n'} + \overset{(\Gamma 2)}{\frac{\zeta\pi(S - S')}{r^2}},$$

$$\Omega = \overset{(\Omega 1)}{\frac{\Delta}{3600''} n'} - \overset{(\Omega 2)}{\frac{\zeta\pi(S + S')}{r^2}},$$

$$\varepsilon = \overset{(\varepsilon 1)}{\frac{\psi\zeta\pi(R - R')}{r^3}} + \overset{(\varepsilon 2)}{\frac{\theta\Gamma}{r}},$$

$$\mu = \overset{(\mu 1)}{\frac{\zeta^2\pi^2(R' - R)\times(R' + R)}{r^5}} + \overset{(\mu 2)}{\frac{\Gamma\Omega}{r}} - \overset{(\mu 3)}{\frac{\lambda'^2}{r^3}\times\left(\xi - \frac{T'\pi}{r}\right)^2} + \overset{(\mu 4)}{\frac{\lambda^2}{r^3}\times\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2}.$$

Maintenant, fi dans l'équation (1) l'on élimine la quantité $\frac{b}{3600''} n'$ par le moyen de fa valeur

$$\frac{b}{3600''} n' = -\frac{\varepsilon \text{ fin. (latit. de la ☾)}}{\Gamma} - \frac{\mu r}{2\Gamma};$$

on aura

$$\text{ſin.}^2 (\text{latit. de la ☾}) - 2P\,\text{ſin.}(\text{latit. de la ☾}) + Qr = 0\,;$$

en ſuppoſant d'ailleurs

$$G = \overset{(G\,1)}{\theta} - \overset{(G\,2)}{\frac{\varepsilon r}{\Gamma}},$$

$$H = \overset{(H\,1)}{\frac{\zeta\pi S}{r^2}} + \overset{(H\,2)}{\frac{\mu r}{2\Gamma}},$$

$$N = \overset{(N\,1)}{\frac{\psi^2}{r}} + \overset{(N\,2)}{\frac{G^2}{r}},$$

$$P = \overset{(P\,1)}{\frac{\zeta\pi\psi R}{Nr^2}} + \overset{(P\,2)}{\frac{GH}{N}},$$

$$Q = \overset{(Q\,1)}{\frac{\zeta^2\pi^2 R^2}{Nr^4}} + \overset{(Q\,2)}{\frac{H^2}{N}} - \overset{(Q\,3)}{\frac{\lambda^2\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2}{Nr^2}}.$$

(65.) Après avoir déterminé la latitude de la Lune correſpondante à l'inſtant de la conjonction, on déterminera le temps écoulé depuis l'inſtant de la conjonction juſqu'à l'inſtant de l'obſervation faite dans le lieu $\zeta' 1$, au moyen de l'équation (7) du paragraphe précédent. Quant à l'heure que l'on comptoit dans ce lieu à l'inſtant de la conjonction, on a pour ſon expreſſion

(1) Heure que l'on comptoit dans le lieu $\zeta' 1$ à l'inſt. de la conjonc. $= \zeta\, 1 - b$;

on a de plus,

(2) $b' = b + \Delta$.

(3) Heure que l'on comptoit dans le lieu $\zeta' 2$ à l'inſt. de la conjonc. $= \zeta\, 2 - b'$.

(66.) L'équation du *§. 64*, donne deux latitudes de la Lune ; il y a donc deux latitudes lunaires qui peuvent ſatisfaire au Problème. Pour déterminer laquelle des deux valeurs ſatisfait à la queſtion dont il s'agit, au lieu de chercher les valeurs de b, b' par le moyen des équations (7) & (2) des *§. 64 & 65*, on cherchera ces valeurs au moyen des

équations (1), (3) du §. 51, que l'on conditionnera conformément à la remarque du §. 52. On portera, dans ces équations ainsi conditionnées, les deux valeurs de la latitude de la Lune; celle des deux latitudes qui rendra nulle l'équation $b' - b - \Delta = 0$, sera celle qui satisfait au Problème.

EXEMPLE.

(67.) *On suppose que le 1.er Avril 1764, on ait observé à Vienne en Autriche une distance des centres de 30′ 46″,7 à 10h 22′ 5″ du matin; le centre de la Lune étant alors dans l'hémisphère précédent du disque du Soleil; & une distance de 30′ 48″,1, à 1h 22′ 54″ du soir, le centre de la Lune étant dans l'hémisphère suivant du disque du Soleil: on demande quelle étoit la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction, & l'heure que l'on comptoit à Vienne à cet instant; en supposant d'ailleurs la parallaxe horizontale polaire de la Lune de 54′ 1″,5 à l'instant de la conjonction.*

SOLUTION. Puisque les deux observations ont été faites dans le même lieu, la différence en longitude des deux Observatoires est nulle; on a donc longitude $z'1$ — longitude $z'2 = 0$; d'ailleurs, pour éviter toute confusion, je supposerai que les quantités b, λ, $z1$, R, S, T, &c. appartiennent à l'observation de $10^h\ 22'\ 5''$ du matin, & que les quantités b', λ', $z2$, R', S', T', &c. appartiennent à l'observation de $1^h\ 22'\ 54''$ du soir; on a donc,

$z1 = 22^h\ 22'\ 5''$.
$R = +\ 73871$.
$S = +\ 8742$.
$\xi - \frac{T\pi}{r} = +\ 98930$.
λ = tang. $30'\ 46'',7$.
$z2 = 25^h\ 22'\ 54''$.
$R' = +\ 48911$.
$S' = +\ 53959$.
$\xi - \frac{T'\pi}{r} = +\ 98898$.
λ' = tang. $30'\ 48'',1$.
$R + R' = +\ 122782$.
$R - R' = +\ 24960$.
$R' - R = -\ 24960$.
$S + S' = +\ 62701$.
$S - S' = -\ 45217$.
$\Delta = +\ 10849''$.

Log.
$R = 9,8684740$.
$S = 8,9416108$.
$R + R' = 10,0891340$.
$R - R' = 9,3972446$.
$S + S' = 9,7972747$.
$S - S' = 9,6553017$.
$\xi - \frac{T\pi}{r} = 9,9953280$.
$\xi - \frac{T'\pi}{r} = 9,9951875$.
$\lambda = 7,9519700$.
$\lambda' = 7,9522900$.
$\Delta = 7,0353897$.

Donc

TYPE du Calcul.

$\Gamma = +\ (\Gamma 1) - (\Gamma 2)$

$(\Gamma 1)$	$(\Gamma 2)$
7,9002877 . . . log. n'.	9,9986603 . . . log. ζ.
7,0353897 . . . log. Δ.	8,1963030 . . . log. π.
3,4436975 . . . compl. log. 3600″	9,6553017 . . . log. $S - S'$.
8,3793749 . . . log. 2395,40.	7,8502650 . . . log. 708,37.

$\Gamma = +\ 1687$. Log. $\Gamma = 8,2271151$. Log. $2\ \Gamma = 8,5281451$.
Compl. arith. log. $\Gamma = 1,7728849$. Compl. log. $2\ \Gamma = 1,4718549$.

$\Omega = +\ (\Omega 1) - (\Omega 2)$

$(\Omega 1)$	$(\Omega 2)$
7,9002877 . . . log. n'.	9,9986603 . . . log. ζ.
7,0353897 . . . log. Δ.	8,1963030 . . . log. π.
3,4436975 . . . comp. log. 3600″.	9,7972747 . . . log. $S + S'$.
8,3793749 . . . log. 2395,40.	7,9922380 . . . log. 982,29.
$\Omega = +\ 1413,11$.	Log. $\Omega = 8,1501759$.

$$\varepsilon = + (\varepsilon 1) + (\varepsilon 2)$$

$(\varepsilon 1)$	$(\varepsilon 2)$
9,9986603...log. ζ.	9,0001044...log. θ.
8,1963030...log. π.	8,2271151...log. Γ.
9,9978165...log. ψ.	7,2272195...log. 168,74.
9,3972446...log. $R - R'$.	
7,5900244...log. 389,07.	

$\varepsilon = + 557{,}81$. Log. $\varepsilon = 7{,}7464866$.

$$\mu = - (\mu 1) + (\mu 2) - (\mu 3) + (\mu 4)$$

$(\mu 1)$	$(\mu 2)$
9,9973206...log. ζ^2.	8,2271151...log. Γ.
6,3926060...log. π^2.	8,1501759...log. Ω.
10,0891340...log. $R + R'$.	6,3772910...log. 23,839.
9,3972447...log. $R' - R$.	
5,8763053... log. 7,522.	

$(\mu 3)$	$(\mu 4)$
5,9045800...log. λ'^2.	5,9039400...log. λ^2.
9,9903750...log. $(\xi - \frac{T'\pi}{r})^2$.	9,9906560...log. $(\xi - \frac{T\pi}{r})^2$.
5,8949550...log. 7,851.	5,8945960...log. 7,845.

$\mu = + 16{,}311$. Log. $\mu = 6{,}2124805$.

$G = + (G 1) - (G 2) \ldots (G 1) = 10002$.

$(G 2)$

7,7464866...log. ε.
1,7728849...compl. log. Γ.

9,5193715...log. 33066.

$G = - 23064$. Log. $G = 9{,}3629346$.

$$\frac{G^2}{r} = 5319{,}4.$$

$$H = + (H\,2) + (H\,2)$$

$(H\,1)$

9,9986603 . . . log. ζ.
8,1963030 . . . log. π.
8,9416108 . . . log. S.

7,1365741 . . . log. 136,96.

$(H\,2)$

6,2124805 . . . log. μ.
1,4718549 . . . comp. log. 2 r.

7,6843354 . . . log. 483,43.

$$H = + 620{,}39 \ldots \text{Log. } H = 7{,}7926648.$$

$$N = + (N\,1) + (N\,2) = + 99000 + 5319{,}4 = + 104319{,}4.$$

Comp. log. N = 9,9816360.

$$P = + (P\,1) - (P\,2)$$

$(P\,1)$

9,9986603 . . . log. ζ.
8,1963030 . . . log. π.
9,9978165 . . . log. ψ.
9,8684740 . . . log. R.
9,9816360 . . . comp. log. N.

8,0428898 . . . log. 1103,80.

$(P\,2)$

9,3629346 . . . log. G.
7,7926648 . . . log. H.
9,9816360 . . . comp. log. N.

7,1372354 . . . log. 137,16.

$$P = + 966{,}64. \quad \text{Log. } P = 7{,}9852648.$$

Compl. log. P = 2,0147352.

$$Q = + (Q\,1) + (Q\,2) - (Q\,3)$$

$(Q\,1)$

9,9973206 . . . log. ζ^2.
6,3926060 . . . log. π^2.
9,7369480 . . . log. R^2.
9,9816360 . . . comp. log. N.

6,1085106 . . . log. 12,838.

$(Q\,2)$

5,5853296 . . . log. H^2.
9,9816360 . . . comp. log. N.

5,5669656 . . . log. 3,689.

$(Q\,3)$

5,9039400 . . . log. λ^2.
9,9906560 . . . log. $(\xi - \frac{T\pi}{r})^2$.
9,9816360 . . . comp. log. N.

5,8762320 . . . log. 7,520.

$Q = + 9{,}007$. Log. Q = 5,9545802 . . . log. $\sqrt{(Qr)} = 7{,}9772901$.

L'équation

L'équation qui satisfait à la question particulière dont il s'agit, est donc

$$\text{sin.}^2 (\text{latitude} ☾) - 2 \times 966,64\ \text{sin.} (\text{latitude} ☾) + 9,007 \times r = 0.$$

Donc (*§. 45 de mon IV.e Mémoire*) *Année 1766.*

7,9772901 . . . log. $\sqrt{(Qr)}$.
2,0147352 . . . comp. log. P.

9,9920253 . . . log. sin. $\left\{ \begin{matrix} B \\ B' \end{matrix} \right\}$.

$B = 79^d\ 3'\ 12''$	$B' = 100^d\ 56'\ 48''$
$\frac{B}{2} = 39.\ 31.\ 36.$	$\frac{B'}{2} = 50.\ 28.\ 24.$
9,9165130 . . . log. tang. $\frac{B}{2}$.	10,0834800 . . . log. tang. $\frac{B'}{2}$.
7,9772901 . . . . log. $\sqrt{(Qr)}$.	7,9772901 . . log. $\sqrt{(Qr)}$.
7,8938031 . . . log. sin. (latit. ☾).	8,0607701 . . log. sin. (latit. ☾).
Latit. de la Lune = 26′ 55″,2.	Latit. de la Lune = 39′ 32″,7.

Conformément a ce qui a été dit (*§. 66*), la latitude de 39′ 32″,7 est celle qui satisfait véritablement à la question. Si l'on substitue cette dernière latitude dans l'équation (7) du *§. 64*, on aura

$$b = -(b\,1) - (b\,2)$$

$(b\,1)$	$(b\,2)$
6,5563025 . . . log. 3600″.	6,5563025 . . . log. 3600″.
7,7464866 . . . log. ε.	6,2124805 . . . log. μ.
8,0607701 . . . log. sin. (latit ☾).	1,4718549 . . . comp. log. 2 r.
1,7728849 . . . comp. log. r.	2,0997123 . . . comp. log. n'.
2,0997123 . . . comp. log. n'.	6,3403502 . . . log. 2189″,5.
6,2361564 . . . log. 1722″,5.	

$$b = -3912''.$$

Heure que l'on comptoit à Vienne à l'instant de la conjonction $= 22^h\ 22'\ 5'' + 1^h\ 5'\ 12'' = 23^h\ 27'\ 17''$.

SECTION CINQUIÈME,

Dans laquelle on ſuppoſe connues la latitude de la Lune correſpondante à l'inſtant de la conjonction, & la différence en longitude des deux obſervatoires.

(68.) Dans cette ſection, je ſuppoſerai connues la latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction, & la différence en longitude des deux obſervatoires; je me propoſe de déterminer en conſéquence, la parallaxe horizontale polaire de cet aſtre correſpondante à l'inſtant de la conjonction, & l'heure que l'on comptoit à cet inſtant dans chacun des deux Obſervatoires.

(69.) Il eſt aiſé de voir que ſi l'on conſerve les définitions de Γ, Ω, ε, μ, G, H, N, P, Q du §. 64, l'équation

$$\text{ſin.}\,(\text{latitude de la } ☾) - 2P\,\text{ſin.}\,(\text{latitude de la } ☾) + Qr = 0,$$

peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(\psi^2 r^2 + G^2 r^2)\,\text{ſin.}^2(\text{lat. } ☾) - 2r(\zeta\pi\psi R + GHr^2)\,\text{ſin.}(\text{lat. } ☽)$$
$$+ \zeta^2\pi^2 R^2 + H^2 r^4 - \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 = 0,$$

ou

$$(Gr\,\text{ſin.}\,(\text{latit. } ☾) - Hr^2)^2 + (\psi r\,\text{ſin.}\,(\text{latit. } ☾) - \zeta\pi R)^2$$
$$- \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 = 0;$$

ou enfin

$$\left[\left(\theta r - \frac{\varepsilon r^2}{\Gamma}\right)\text{ſin.}\,(\text{latit. } ☾) - \zeta\pi S - \frac{\mu r^3}{2\Gamma}\right]^2$$
$$+ (\psi r\,\text{ſin.}\,(\text{latit. } ☾) - \zeta\pi R)^2 - \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 = 0.$$

À Γ, μ, ε, ſi l'on ſubſtitue leurs valeurs, on aura

$$\theta - \frac{\varepsilon r}{\Gamma} = \frac{\zeta\pi\psi(R' - R)}{\frac{\Delta}{3600''} \times n' r^2 + \zeta\pi(S - S')};$$

$$\zeta\pi S + \frac{\mu r^3}{2\Gamma} = \frac{2\zeta\pi S + \Omega r^2}{2}$$
$$+ \frac{\zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2) - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2}{2\left[\frac{\Delta}{3600''} n' r^2 + \zeta\pi(S - S')\right]}$$

$$= \frac{[\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2 + \zeta\pi(S - S')]^2 + \zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2) - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2}{2[\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2 + \zeta\pi(S - S')]}.$$

D'où l'on tire (1)

$$[(\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2 + \zeta\pi(S - S'))^2 + \zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2)$$
$$- \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 - 2\zeta\pi\psi r(R' - R)\text{ fin. (lat. ☾)}]^2$$
$$+ 4[\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2 + \zeta\pi(S - S')]^2$$
$$\times [(\psi r \text{ fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R)^2 - \lambda^2(\xi r - T\pi)^2] = 0,$$

équation que l'on pourroit résoudre, si des observations importantes l'exigeoient.

(70.) Puisque $\zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2) - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2$
$+ \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 - 2\zeta\pi\psi r(R' - R)$ fin. (latit. de la ☾)
$+ 2(\psi r$ fin. (latit. ☾) $- \zeta\pi R)^2 - 2\lambda^2(\xi r - T\pi)^2$
$= (\psi r$ fin. (latit. de la ☾) $- \zeta\pi R)^2 - \lambda^2(\xi r - T\pi)^2$
$+ (\psi r$ fin. (latit. de la ☾) $- \zeta\pi R')^2 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2$;
l'équation du *paragraphe précédent* peut être mise sous la forme qui suit;

(1) $[\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2 + \zeta\pi(S - S')]^4 + 2[\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2$
$+ \zeta\pi(S - S')]^2 \times [(\psi r$ fin. (latit. ☾) $- \zeta\pi R)^2$
$- \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 + (\psi r$ fin. (latit. de la ☾) $- \zeta\pi R')^2$
$- \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2] + [\zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2) - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2$
$+ \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 - 2\zeta\pi\psi r(R' - R)$ fin. (latit. ☾)$]^2 = 0.$

Mais
$\zeta^2\pi^2(R'^2 - R^2) - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2$
$- 2\zeta\pi\psi r(R' - R)$ fin. (lat. ☾) $= (\psi r$ fin. (lat. ☾) $- \zeta\pi R')^2$
$- \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 - (\psi r$ fin. (lat. ☾) $- \zeta\pi R)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2$;
donc (2.)

$$[\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2 + \zeta\pi(S - S')]^4 + 2[\frac{\Delta}{3600''}\, n' r^2 + \zeta\pi(S - S')]^2$$

$$\times\ [(\psi r \text{ fin. (latit. de la ☾)} - \zeta\pi R)^2 - \lambda^2(\xi r - T\pi)^2$$
$$+ (\psi r \text{ fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R')^2 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2]$$
$$+ [(\psi r \text{ fin. (lat. ☾)} - \zeta\pi R')^2 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2$$
$$- (\psi r \text{ fin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2]^2 = 0;$$

ou enfin (3)

$$\left(\frac{\Delta}{3600''} \times \eta' + \frac{\zeta\pi(S - S')}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{\psi \text{ fin. (lat. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R'}{r^2}\right)^2$$
$$- \frac{\lambda'^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T'\pi}{r}\right)^2 - \left(\frac{\psi \text{ fin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)^2$$
$$+ \frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2 \mp 2\left(\frac{\Delta}{3600''}\eta' + \frac{\zeta\pi(S - S')}{r^2}\right)$$
$$\sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2 - \left(\frac{\psi \text{ fin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)^2\right]} = 0,$$

équation qui ne me paroît pas réductible à une forme plus ſimple.

(71.) J'ai préféré de laiſſer l'équation du Problème ſous la forme précédente. En effet, toutes les quantités qui compoſent cette équation ſont faciles à évaluer. Comme d'ailleurs, dans l'état actuel de l'Aſtronomie, on connoît à peu-près la valeur de π qui réſout la queſtion; que de plus, à cauſe de la petiteſſe des coëfficiens λ^2, λ'^2, les quantités $\xi - \frac{T\pi}{r}$, $\xi - \frac{T'\pi}{r}$ peuvent, ſans erreur appréciable, s'évaluer en employant la parallaxe des Tables; il ſera très-facile de tomber ſans beaucoup de tâtonnement, ſur la véritable parallaxe qui rend nulle l'équation. Je ne m'étendrai point, quant-à-préſent, ſur cette analyſe. Je réſerve d'en parler plus au long, lorſque j'employerai un calcul analogue à la détermination des différens élémens de la Lune, au moyen de trois obſervations.

SECTION SIXIÈME,

Dans laquelle on ſuppoſe connues la diſtance de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation dans l'un des deux Obſervatoires, & la difference en longitude des deux Obſervatoires.

(72.) Dans cette ſection, je ſuppoſerai connues la diſtance

de l'inſtant de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation dans l'un des deux Obſervatoires, & la différence en longitude des deux Obſervatoires; je me propoſe de déterminer en conſéquence, la latitude de la Lune & ſa parallaxe horizontale polaire correſpondante à l'inſtant de la conjonction.

(73.) Si l'on conſerve les définitions de λ, R, S, T, b; λ', R', S', T', b', Δ, Γ, Ω, ε, μ, des *§. 51* & *64*, il eſt évident qu'en vertu des équations (1) & (7) du *§. 64*, on aura (1)

$$\left.\begin{array}{l} + (\psi r \text{ ſin. (latit. ☾)} - \zeta\pi R)^2 - \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 \\ + (\theta r \text{ ſin. (latit. ☾)} - \zeta\pi S + \frac{b}{3600''} \varkappa' r^2)^2 \end{array}\right\} = 0.$$

$$(2)\ \frac{b}{3600''} \times \varkappa' \Gamma + \varepsilon \text{ ſin. (latit. de la Lune)} + \frac{\mu r}{2} = 0.$$

Relativement au Problème qui nous occupe, les inconnues ſont π & ſin. (latitude de la Lune); quant à b & à Δ, ce ſont des connues du Problème; puiſque par la ſuppoſition on connoît la diſtance de l'inſtant de la conjonction à l'inſtant de l'obſervation dans l'un des deux Obſervatoires, ainſi que la différence en Longitude des deux Obſervatoires.

De l'équation (2) l'on tire

$$\text{ſin. (latit. ☾)} = -\frac{b}{3600''} \times \frac{\Gamma\varkappa'}{\varepsilon} - \frac{\mu r}{2\varepsilon}.$$

Si l'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation (1), on aura (3)

$$\left[\psi r\left(\frac{2b}{3600''} \times \Gamma\varkappa' + \mu r\right) + 2\zeta\pi\varepsilon R\right]^2$$
$$+ \left[\theta r\left(\frac{2b}{3600''}\Gamma\varkappa' + \mu r\right) - \frac{2b}{3600''}\varkappa' r^2 \varepsilon + 2\zeta\pi\varepsilon S\right]^2$$
$$- 4\varepsilon^2\lambda^2(\xi r - T\pi)^2 = 0.$$

À Γ, μ, ε, ſi l'on ſubſtitue leurs valeurs, on aura

$$\psi r^2\mu + 2\zeta\pi\varepsilon R = \frac{\psi}{r^3}\,[\zeta^2\pi^2(R'-R)^2 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2$$
$$+ \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 + (\frac{\Delta}{3600''}\eta' r^2 - \zeta\pi S')^2 - \zeta^2\pi^2 S^2]$$
$$+ \frac{2\zeta\pi\theta R.[\frac{\Delta}{3600''}\eta' r^2 + \zeta\pi(S-S')]}{r^3};$$

$$\theta r^2\mu + 2\zeta\pi\varepsilon S = \frac{\theta}{r^3}\,[(\frac{\Delta}{3600''}\eta' r^2 + \zeta\pi(S-S'))^2$$
$$+ \zeta^2\pi^2 R'^2 - \zeta^2\pi^2 R^2 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2]$$
$$+ \frac{2\zeta^2\pi^2\psi S(R-R')}{r^3};$$

$$\Gamma\theta - \varepsilon r = -\frac{\psi\zeta\pi(R-R')}{r^2};$$

$$\theta r^2\mu + 2\zeta\pi\varepsilon S + \frac{2b}{3600''}(\Gamma\theta\eta' r - \eta' r^2\varepsilon)$$
$$= \frac{\theta}{r^3}\,[(\frac{\Delta}{3600''}\eta' r^2 + \zeta\pi(S-S'))^2$$
$$+ \zeta^2\pi^2 R'^2 - \zeta^2\pi^2 R^2 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2 + \lambda^2(\xi r - T\pi)^2]$$
$$+ \frac{2\zeta\pi\psi(R-R')}{r} \times (\frac{\zeta\pi S}{r^2} - \frac{b}{3600''}\eta');$$

$$\psi r^2\mu + 2\zeta\pi\varepsilon R + \frac{2b}{3600''}\psi r\Gamma\eta'$$
$$= \frac{\psi}{r^3}\,[\zeta^2\pi^2(R'-R)^2 - \lambda'^2(\xi r - T'\pi)^2$$
$$+ \lambda^2(\xi r - T\pi)^2 + (\frac{\Delta}{3600''}\eta' r^2 - \zeta\pi S')^2 - \zeta^2\pi^2 S^2]$$
$$+ 2[\frac{\Delta}{3600''}\eta' r^2 + \zeta\pi(S-S')] \times (\frac{\zeta\pi\theta R}{r^3} + \frac{b}{3600''}\frac{\eta'\psi}{r});$$

$$\varepsilon = \frac{\psi\zeta\pi(R-R')}{r^3} + \frac{\theta}{r^3}(\frac{\Delta}{3600''}\eta' r^2 + \zeta\pi(S-S')).$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (3) du préſent paragraphe ; on aura évidemment une équation qui ne renfermera d'inconnue que la parallaxe, & que l'on pourra réſoudre lorſque des obſervations importantes l'exigeront.

Obſervation relative à la remarque du §. 62.

(74.) J'ai remarqué *(§. 62)* que, quoique dans le

calcul de la diſtance obſervée des centres, j'aie preſcrit de faire uſage de la parallaxe tirée des Tables, on pouvoit cependant, relativement à cet élément, regarder la parallaxe comme inconnue, ſans compliquer le réſultat. Voici la démonſtration de cette propoſition, qui s'applique également à toutes les queſtions de ce Mémoire.

Soit

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\text{ſinus (demi-diamètre horizontal de la Lune)}}{\text{ſinus (parallaxe horizontale polaire de la Lune)}}.$$

∂ = coſinus (ſomme du demi-diamètre du Soleil & du demi-diamètre horizontal de la Lune).

∂' = coſinus (différence du demi-diamètre du Soleil & du demi-diamètre horizontal de la Lune).

σ = ſinus } demi-diamètre du Soleil.
τ = coſinus }

τ' = coſinus (demi-diamètre horizontal de la Lune).

J'ai démontré *(Ve Mémoire, §. 46 & ſuivans)* que l'on a les équations ſuivantes: *Année 1767.*

Contacts intérieurs des limbes.

$$\lambda\,(\xi r - T\pi) = \frac{\sigma\tau'}{\partial'}\,(\xi r - T\pi) - \frac{a'}{b'}\,\tau r\pi.$$

Contacts extérieurs des limbes.

$$\lambda\,(\xi r - T\pi) = \frac{\sigma\tau'}{\partial}\,(\xi r - T\pi) + \frac{a'}{b'}\,\tau r\pi.$$

Comme donc la quantité $\frac{a'}{b'}$ eſt une quantité connue, que d'ailleurs les quantités σ, τ', ∂', ∂, ξ, ſont pareillement connues, on voit que ſi dans les équations du préſent Mémoire, l'on ſubſtitue à $\lambda\,(\xi r - T\pi)$ la valeur qui lui eſt égale, les dimenſions de la parallaxe ne ſeront point augmentées.

(75.) Je ne répeterai point ce que j'ai dit dans le cours de cet Ouvrage, & particulièrement dans les *§. 49 & ſuiv.* de mon *Ve Mémoire*, pour démontrer que les équations du paragraphe précédent, repréſentent toute eſpèce de diſtance des

centres. Il me ſuffit d'avoir fait voir que, géométriquement parlant, la réduction des obſervations eſt indépendante de la parallaxe de la Lune. Au reſte, cette remarque eſt de pure théorie ; car dans l'état actuel de l'Aſtronomie, il me paroît hors de doute que l'on doit partir de la parallaxe tirée des Tables, pour calculer l'augmentation du diamètre apparent de la Lune, relativement à ſon élévation ſur l'horizon.

SECTION SEPTIÈME.

Méthodes pour déterminer les mouvemens horaires.

(76.) J'ai toujours regardé juſqu'ici les mouvemens horaires comme bien déterminés par les Tables aſtronomiques. Quelque fondée que me paroiſſe cette opinion, ſur-tout ſi l'on a égard aux remarques des *§. 87 & ſuiv.* de mon *IXe Mémoire;* comme cependant il pourroit arriver que l'on eût quelque doute ſur cet élément, je vais donner des méthodes pour déterminer les mouvemens horaires. On ne doit point oublier que ces mêmes Problèmes ſe réſolvent par les formules de mes *VIIIe & IXe Mémoires,* d'une manière moins directe, à la vérité, mais également certaine. Cette réflexion me diſpenſera d'épuiſer la matière. Je me contenterai d'appliquer le calcul, aux circonſtances qui m'ont paru les plus générales.

Année 1771.

(77.) Soit

$$A' = \pm \sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2 - \left(\frac{\psi \text{ ſin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)^2\right]};$$

$$B'r = \left(\frac{\psi \text{ ſin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R'}{r^2}\right)^2 - \frac{\lambda'^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T'\pi}{r}\right)^2$$

$$- \left(\frac{\psi \text{ ſin. (latit. ☾)}}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - T\pi\right)^2.$$

L'équation (3) du *§. 70* deviendra

$$\left(\frac{\Delta}{3600''}n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}\right)^2 \pm 2A'\left(\frac{\Delta}{3600''}n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}\right) + B'r = 0,$$

équation qui n'eſt que du ſecond degré, par rapport à la quantité $\frac{\Delta}{3600''}n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}$.

(78.)

(78.) Cette dernière équation fait voir que si l'on avoit observé deux distances des centres, soit dans le même lieu, soit dans deux Observatoires différens dont la position respective fût bien déterminée, & que l'on connût d'ailleurs la latitude & la parallaxe de la Lune correspondantes à l'instant de la conjonction, sans même connoître l'instant précis de la conjonction, on détermineroit le mouvement horaire par de simples équations du second degré; en effet, l'équation du *§. 77* apprendroit à connoître les quatre valeurs de $\frac{\Delta}{3600''}\,n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}$. Soit C' une quelconque de ces quatre valeurs, comme d'ailleurs *(§. 1.er)*

$$n' = \frac{\xi}{\psi} \text{ sin. (mouvem. hor. ☾ en longit. — mouvem. hor. du ☉)},$$

on aura

$$\text{sinus (mouv. hor. composé)} = \frac{3600''}{\Delta} \times \frac{\psi}{\xi}\left(C' - \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}\right).$$

(79.) Avec les observations précédentes, si l'on combinoit une plus courte distance des centres observée, soit dans le même lieu, soit dans un autre lieu dont il n'est pas même nécessaire de connoître la longitude, on pourroit ne pas supposer connue la latitude de la Lune correspondante à l'instant de la conjonction & sa parallaxe, pourvu toutefois que l'une de ces deux quantités fût déterminée. En effet, les équations des *§. 31 & 166* de mon *IX.e Mémoire,* déterminent indifféremment l'une des deux quantités, pourvu que l'autre soit connue; on sera donc dans le cas du *§. 78* du présent Mémoire.

Année 1771.

(80.) Je ne m'étendrai pas davantage sur la question des mouvemens horaires. J'ai développé le cas particulier où l'Analyse & l'Astronomie m'ont paru conspirer à donner à la fois le calcul le plus simple & le résultat le plus certain; c'est aux Astronomes à décider dans quelles circonstances ces formules doivent être employées de préférence. Je remarquerai seulement que plus la Lune aura passé près du centre du Soleil dans les différentes observations, moins la Latitude

de la Lune influera ſur l'exactitude des réſultats. Cette circonſtance jointe à la deſcription d'une plus grande corde ſur le diſque ſolaire, paroît au premier coup-d'œil devoir faire préférer ces obſervations. Je remarquerai cependant qu'il eſt difficile de dépouiller entièrement les réſultats, de l'incertitude de la grandeur préciſe des diamètres du Soleil & de la Lune, & du rapport des axes de la Terre, quantités qui ont un rapport fini avec l'incertitude des mouvemens horaires.

ARTICLE CINQUIÈME,

Dans lequel on développe une méthode pour déterminer à la fois ſans compliquer les calculs, la latitude de la Lune & ſa parallaxe horizontale polaire correſpondantes à l'inſtant de la conjonction, ainſi que l'inſtant de la conjonction.

(81.) Je me propoſe de développer dans cet Article, la méthode la plus directe, ſuivant moi, pour déterminer à la fois, ſans trop compliquer les calculs, la latitude de la Lune & ſa parallaxe horizontale polaire correſpondantes à l'inſtant de la conjonction, ainſi que l'inſtant précis de la conjonction. Quoique, quant à préſent, je n'applique cette théorie qu'aux Éclipſes de Soleil, il eſt aiſé de ſentir que j'ai particulièrement en vue la détermination de la parallaxe du Soleil, par les obſervations du paſſage de Vénus ſur le diſque de cet Aſtre.

(82.) On peut ſe rappeler que la comparaiſon de deux diſtances quelconques des centres obſervées, ſoit dans le même lieu, ſoit dans deux obſervatoires différens, dont on connoît toutefois la poſition reſpective, nous a conduit *(§. 70)* à l'équation ſuivante

$$(1)\ \left(\frac{\Delta}{3600''}\,n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{\psi\,\text{fin.}\,(\text{lat.}\,☾)}{r} - \frac{\zeta\pi R'}{r^2}\right)^2$$
$$- \frac{\lambda'^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T'\pi}{r}\right)^2 - \left(\frac{\psi\,\text{fin.}\,(\text{latit.}\,☾)}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)^2$$
$$+ \frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2 \mp 2\left(\frac{\Delta}{3600''}\,n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}\right)$$
$$\sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2 - \left(\frac{\psi\,\text{fin.}\,(\text{latit.}\,☾)}{r} - \frac{\zeta\pi R}{r^2}\right)^2\right]} = 0.$$

Suppoſons maintenant que dans un autre lieu quelconque, on ait obſervé une plus courte diſtance des centres, ou une diſtance quelconque des centres combinée avec l'obſervation ſimultanée de l'angle de comparaiſon; il eſt évident que relativement à ce lieu.

Soit

$z'3$ ce dernier lieu.

$z3$ l'heure que l'on comptoit dans ce lieu à l'inſtant de l'obſervation.

$b''*$ le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction donné par les Tables aſtronomiques, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation.

Quantités à évaluer relativement au lieu z'3.

$$R'' = \overset{(R''1)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} - \overset{(R''2)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} - \overset{(R''3)}{\frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}},$$

$$T'' = \overset{(T''1)}{\frac{ps}{r}} + \overset{(T''2)}{\frac{ch\rho q}{r^3}} + \overset{(T''3)}{\frac{b''^{*2}\gamma}{3600''^2}}.$$

m'' le ſinus, n'' le coſinus } de l'angle de comparaiſon.

Je renvoye au *§. 25 de mon IXe Mémoire,* pour l'évaluation de cet angle lorſqu'il n'eſt point donné immédiatement par l'obſervation. *Année 1771.*

Il ſuit du *§. 31* de mon *IXe Mémoire*, que

$$(2)\ \psi r^2\,\text{fin.}\,(\text{lat.}\,☾) - \zeta\pi R''r - \lambda''m''\xi r + \lambda''m''T''\pi = 0.$$

Au moyen de cette dernière équation, ſi l'on élimine la quantité $\frac{\psi\,\text{fin.}\,(\text{latitude de la}\,☾)}{r}$ dans l'équation (1) du préſent paragraphe, elle deviendra

$$(3)\left(\frac{\Delta}{3600''}n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}\right)^2 + \left[\frac{\zeta\pi(R''-R')}{r^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda''m''}{r^2}\left(\xi - \frac{T''\pi}{r}\right)\right]^2 - \left[\frac{\zeta\pi(R''-R)}{r^2} + \frac{\lambda''m''}{r^2}\left(\xi - \frac{T''\pi}{r}\right)\right]^2$$
$$-\frac{\lambda'^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T'\pi}{r}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2$$
$$\mp 2\left(\frac{\Delta}{3600''}n' + \frac{\zeta\pi(S-S')}{r^2}\right)\sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2\right.}$$
$$\overline{\left.-\left(\frac{\zeta\pi(R''-R)}{r^2} + \frac{\lambda''m''}{r^2}\left(\xi - \frac{T''\pi}{r}\right)\right)^2\right]} = 0,$$

équation qui ne me paroît pas réductible à une forme plus ſimple.

(83.) J'ai préféré de laiſſer l'équation du Problème ſous la forme précédente; en effet, toutes les quantités qui compoſent cette équation ſont faciles à évaluer. Comme d'ailleurs dans l'état actuel de l'Aſtronomie; on connoît à peu-près la valeur de π qui réſout la queſtion; que de plus, à cauſe de la petiteſſe des coëfficiens λ^2, λ'^2, $\lambda''m''$, les quantités $\xi - \frac{T\pi}{r}$, $\xi - \frac{T'\pi}{r}$, $\xi - \frac{T''\pi}{r}$, peuvent ſans erreur appréciable, s'évaluer en employant la parallaxe des Tables; il ſera très-facile de tomber, ſans beaucoup de tâtonnemens, ſur la véritable parallaxe qui rend nulle l'équation. Lorſqu'on aura déterminé la parallaxe horizontale polaire de la Lune, qui ſatisfait au Problème, on déterminera la latitude correſpondante à l'inſtant de la conjonction, & l'heure que l'on comptoit à cet inſtant dans chacun des deux Obſervatoires $z'1$, $z'2$, au moyen des équations de la *Section quatrième de l'Article IV* du préſent Mémoire.

Je remarquerai qu'il n'eſt pas néceſſaire de connoître la longitude du lieu $z'3$, où l'on a fait l'obſervation de la plus courte diſtance des centres; il ſuffit de connoître le parallèle ſous lequel l'obſervation a été faite. On pourra même déterminer la Longitude de ce dernier lieu, par la formule du *§. 33* de mon *IX.e Mémoire*, puiſque les calculs précédens auront fait connoître les élémens de l'Éclipſe. Un exemple va rendre ces raiſonnemens ſenſibles.

Année 1771.

EXEMPLE.

(84.) *On suppose que le 1.er Avril 1764, on ait observé à Vienne en Autriche, une distance des centres de 30′ 46″,7 à 10h 22′ 5″ du matin, le centre de la Lune étant alors dans l'hémisphère précédent du disque du Soleil; & une distance de 30′ 48″,1 à 1h 22′ 54″ du soir, le centre de la Lune étant dans l'hémisphère suivant du disque du Soleil; que d'ailleurs on ait observé sous le parallèle boréal de 51d 31′ 0″, une plus courte distance des centres de 1′ 21″,4 à 10h 30′ 44″ du matin; on demande, 1.° la parallaxe horizontale polaire de la Lune correspondante à l'instant de la conjonction; 2.° sa latitude; 3.° l'heure que l'on comptoit à Vienne à l'instant de la conjonction; 4.° la différence en longitude entre Vienne & le lieu où l'on a observé la plus courte distance des centres, sous le parallèle boréal de 51d 31′ 0″.*

SOLUTION. Puisque les deux premières observations ont été faites dans le même lieu, la différence en longitude des deux Observatoires est nulle; on a donc

$$\text{longitude } z'1 - \text{longitude } z'2 = 0.$$

Si d'ailleurs, pour éviter toute confusion, l'on suppose que les quantités λ, $z1$, R, S, T, &c. appartiennent à l'observation de $10^h 22' 5''$ du matin, & que les quantités λ', $z2$, R', S', T', &c. appartiennent à l'observation de $1^h 22' 54''$ du soir; on aura

$z1 = 22^h 22' 5''.$	$z2 = 25^h 22' 54''.$
$R = +73871.$	$R' = +48911.$
$S = +8742.$	$S' = +53959.$
$\xi - \frac{T\pi}{r} = +98930$*.	$\xi - \frac{T'\pi}{r} = +98898$ *.
$\Delta = +10849''.$	$S - S' = -45217.$
$\lambda = \text{tang. } 30' 46'',7.$	$\lambda' = \text{tang. } 30' 48'',1.$
$\frac{\Delta}{3600''} \times \pi' = +2395,400.$	$\frac{\lambda^2}{r^3}(\xi - \frac{T\pi}{r})^2 - \frac{\lambda'^2}{r^3}(\xi - \frac{T'\pi}{r})^2 = -0,0064.$

* Dans l'évaluation de ces quantités, je pars de l'hypothèse de la parallaxe des Tables, conformément à la remarque du §. 83.

Supposons maintenant que les quantités λ'', m'', R'', T'' &c. appartiennent à l'observation faite à 10^h 30′ 44″ sous le parallèle boréal de 51^d 31′ 0″; on aura

$R'' = + 75435.$ $\quad$ $R'' - R = + 1564.$

$m'' =$ sin. 281^d 39′ 49″... nég. $\quad$ $R'' - R' = + 26524.$

$\lambda'' =$ tang. 0^d 1′ 21″,4... posit. $\quad$ $\frac{\lambda'' m''}{r^2}(\xi - \frac{T''\pi}{r}) = - 38,369$ *.

$\xi - \frac{T''\pi}{r} = + 98980$ *.

$$\text{Log.} \begin{cases} \zeta(S - S') = 9,6539620. \\ \zeta(R'' - R) = 8,1928970. \\ \zeta(R'' - R') = 9,4222998. \end{cases}$$

Si l'on suppose d'abord $\pi =$ sinus 54′ 1″,5; c'est-à-dire, si l'on part de l'hypothèse de la parallaxe des Tables; on aura

$$\frac{\zeta\pi}{r^2}(S - S') = - 708,380.$$

$$\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R) = + 24,502.$$

$$\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R') = + 415,530.$$

$$\frac{\zeta\pi}{r^2}(S - S') + \frac{\Delta}{3600''} \times n' = + 1687,020.$$

$$\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R) + \frac{\lambda'' m''}{r^2}(\xi - \frac{T''\pi}{r}) = - 13,867.$$

$$\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R') + \frac{\lambda'' m''}{r^2}(\xi - \frac{T''\pi}{r}) = + 377,161.$$

$$[\frac{\zeta\pi}{r^2}(S - S') + \frac{\Delta}{3600''} n']^2 = + 28,4603.$$

$$[\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R') + \frac{\lambda'' m''}{r^2}(\xi - \frac{T''\pi}{r})]^2 = + 1,4225.$$

$$[\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R) + \frac{\lambda'' m''}{r^2}(\xi - \frac{T''\pi}{r})]^2 = + 0,0019.$$

$$2\,[\frac{\Delta}{3600''} n' + \frac{\zeta\pi(S - S')}{r^2}]\,\sqrt{[\frac{\lambda^2}{r^2}(\xi - \frac{T\pi}{r})^2 - (\frac{\zeta\pi(R'' - R)}{r^2} + \frac{\lambda'' m''}{r^2}(\xi - \frac{T''\pi}{r}))^2]} = 29,8811.$$

* Voyez la Note de la page précédente.

L'équation (3) du *§. 82,* deviendra donc

$$+28,4603 + 1,4225 - 0,0019 - 0,0064 \mp 29,8811 = 0.$$

Si l'on fait uſage des ſignes ſupérieurs, tous les termes ſont très-près de ſe détruire, & l'on n'a qu'un reſte négatif de — 0,0066. Ce premier calcul fait donc voir que la parallaxe des Tables ne ſatisfait pas précisément aux trois obſervations; mais qu'elle eſt très-près d'y ſatisfaire.

Si l'on eſſaie une nouvelle parallaxe, par exemple celle de 54′ 6″, l'équation (3) du *§. 82,* deviendra

$$+28,4273 + 1,4269 - 0,0019 - 0,0064 \mp 29,8637 = 0.$$

Si l'on fait uſage des ſignes ſupérieurs, tous les termes ſont près de ſe détruire, mais moins que dans l'hypothèſe précédente, puiſque l'on a un reſte négatif de — 0,0178. Ce calcul fait donc voir que la parallaxe de 54′ 6″ approche moins de ſatisfaire aux obſervations, que celle de 54′ 1″,5; une ſimple proportion fait voir que la parallaxe de 53′ 59″,1 y ſatisfait exactement.

(85.) Après avoir déterminé la parallaxe horizontale polaire de la Lune, qui ſatisfait aux trois obſervations, il reſteroit à déterminer ſa latitude, l'heure que l'on comptoit à Vienne à l'inſtant de la conjonction, & la différence en longitude entre Vienne & le lieu où l'on a obſervé une plus courte diſtance des centres de 1′ 21″,4 à 10^h 30′ 44″ du matin, ſous le parallèle boréal de 51^d 31′0″; je ſupprime ces calculs, attendu qu'ils ſont un cas particulier de ceux de la *Section quatrième de l'Article IV* du préſent Mémoire, & de ceux de la *Section première de l'Article II* de mon *IX.e Mémoire.*

(86.) On pourroit être curieux de ſavoir quelles ſont les autres valeurs de la parallaxe qui rendent nulle l'équation (3) du *§. 82:* la méthode générale eſt d'eſſayer différentes parallaxes, & de voir celles qui réduiſent l'équation à zéro, ainſi qu'il eſt preſcrit dans les traités d'Algèbre. Voici une méthode particulière, relative à la forme de l'équation (3) du *§. 82,* qui réuſſira toutes les fois que l'on pourra ſuppoſer

la quantité $\frac{\zeta\pi(R''-R)}{r^2}$ aſſez petite relativement aux autres quantités, pour que la valeur de

$$\sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi-\frac{T\pi}{r}\right)^2-\left(\frac{\zeta\pi(R''-R)}{r^2}+\frac{\lambda''m''}{r^2}\left(\xi-\frac{T''\pi}{r}\right)\right)^2\right]},$$

dépende très-peu de celle de la parallaxe. En effet, dans ce cas, l'équation (3) du *§. 82,* pourra être regardée comme une équation du ſecond degré; puiſque la quantité ſous le ſigne radical ſera une quantité connue, que l'on évaluera en employant la parallaxe tirée des Tables.

(87.) Si l'on applique la remarque précédente, à l'équation (3) du *§. 82*, & que l'on ſuppoſe

$$C=\sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi-\frac{T\pi}{r}\right)^2-\left(\frac{\zeta\pi(R''-R)}{r^2}+\frac{\lambda''m''}{r^2}\left(\xi-\frac{T''\pi}{r}\right)\right)^2\right]};$$

on aura

$$\begin{aligned}
&+\frac{\zeta^2\pi^2}{r^4}\left[(S-S')^2+(R''-R')^2-(R''-R)^2\right]\\
&+2\frac{\zeta\pi}{r^2}\left[\left(\frac{\Delta}{3600''}\times n'\mp C\right)\times(S-S')\right.\\
&\left.+\frac{\lambda''m''}{r^2}\left(\xi-\frac{T''\pi}{r}\right)\times(R-R')\right]\\
&+\frac{\Delta^2}{3600''^2}\times n'^2+\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi-\frac{T\pi}{r}\right)^2\\
&-\frac{\lambda'^2}{r^2}\left(\xi-\frac{T'\pi}{r}\right)^2\mp 2\frac{\Delta}{3600''}n'C=0,
\end{aligned}$$

équation double, à cauſe des doubles ſignes de *C,* & dont la ſolution, dans l'hypothèſe du *§. 86,* donnera les quatre valeurs approchées de la parallaxe.

(88.) Dans le cas particulier des obſervations que nous venons de diſcuter *§. 84,* on aura, en employant les ſignes ſupérieurs,

$$\pi^2-2\times 2528{,}95\times\pi+54{,}7647\times r=0;$$

&

& en employant les ſignes inférieurs

$$\pi^2 - 2 \times 5454{,}92 \times \pi + 365{,}7300 \times r = 0.$$

De la première équation l'on tire

$$\pi = \text{ſin. } 53'\ 59'', \qquad \pi = \text{ſin. } 1^d\ 59'\ 55''.$$

Les racines de la ſeconde équation ſont imaginaires.

On peut voir combien l'approximation dont il s'agit eſt convergente dans l'exemple du *§. 84*, puiſqu'elle donne à 0",1 près, le même réſultat que la ſolution rigoureuſe. Au reſte il eſt aiſé de voir ſi l'on peut s'en tenir à cette approximation; en effet, ſi l'on ſubſtitue dans l'expreſſion de C ou de

$$\sqrt{\left[\frac{\lambda^2}{r^2}\left(\xi - \frac{T\pi}{r}\right)^2 - \left(\frac{\zeta\pi\,(R'' - R)}{r^2} + \frac{\lambda'' m''}{r^2}\left(\xi - \frac{T''\pi}{r}\right)\right)^2\right]},$$

les valeurs de π que l'on vient de déterminer, & que cette ſubſtitution faſſe retomber à très-peu-près dans l'expreſſion dont on eſt parti, il eſt bien évident que l'approximation ſera ſuffiſante; & c'eſt ce qui arrive dans le cas des trois obſervations que nous avons calculées. On pourroit auſſi recommencer les calculs en partant d'une nouvelle ſuppoſition ſur π, & l'on ſera aſſuré de tomber bien-tôt par ce procédé ſur la véritable valeur.

(89.) J'ai inſiſté ſur la queſtion précédente, parce qu'il m'a paru que c'étoit une des méthodes les plus ſimples & les plus générales que l'on puiſſe tirer de mes équations, pour déterminer la parallaxe du Soleil, par des formules obtenues en éliminant les variables. Toutes les conditions me paroiſſent même pouvoir être remplies par un ſeul Obſervateur. Il faut que la différence en longitude des deux Obſervatoires $\zeta' 1$, $\zeta' 2$, ſoit bien connue, & que le temps écoulé entre les deux obſervations ſoit le plus grand poſſible. Quelle plus grande certitude peut-on porter dans ces données, que d'obſerver dans le même lieu les contacts intérieurs ou extérieurs des limbes, lorſque Vénus entre ſur le diſque du Soleil, & lorſqu'elle en ſort? Je demande enfin, une obſervation exacte d'une plus courte diſtance des centres, faite, ſoit dans le même lieu, ſoit dans un autre Obſervatoire, dont

il n'eſt pas même néceſſaire de connoître la Longitude. La quantité de la phaſe étant ſtationnaire pendant quelque temps vers le milieu de l'Éclipſe, rien n'empêche d'avoir avec beaucoup d'exactitude, la plus courte diſtance des centres, puiſque l'on peut répéter l'obſervation. On dira peut-être que le véritable inſtant de la plus grande phaſe eſt difficile à ſaiſir; mais au moins doit-on convenir par la même raiſon, que toutes les diſtances des centres, voiſines de la plus grande phaſe, étant à peu-près égales entr'elles, on peut ſe flatter de connoître cette plus courte diſtance avec une exactitude aſſez grande, pour que l'équation (2) du *§. 82,* ſoit à très-peu-près rigoureuſe, puiſque j'ai démontré dans mon *IX.*[e] *Mémoire*, que cette équation étoit vraie dans tous les inſtans voiſins de la plus grande phaſe. On doit ſe rappeler auſſi que j'ai fait voir *(§. 115 du même Mémoire)*, que quoique la parallaxe entrât dans l'expreſſion de l'*angle de comparaiſon*, cet angle étoit déterminé avec une exactitude ſuffiſante pour tous les cas, en employant les élémens hypothétiques. Cette remarque s'applique avec encore plus d'avantage, aux paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil.

Année 1771.

De l'influence des Obſervations ſur la détermination de la parallaxe.

(90.) On m'a objecté que la méthode précédente, bonne en théorie, pouvoit dans la pratique exiger des Obſervations trop exactes pour être employées avec ſuccès; j'ai cru en conſéquence devoir examiner l'influence des obſervations ſur la détermination de la parallaxe. Cette recherche mettra à portée, dans tous les cas, de juger du degré de confiance que l'on doit accorder à la détermination de la parallaxe.

(91.) Pour plus grande ſimplicité, je donnerai à l'équation (3) du *§. 82* la forme ſuivante:

$$\frac{\zeta^2\pi^2}{r^4}\left[(S - S')^2 + (R'' - R')^2 - (R'' - R)^2\right]$$

$$+ 2\frac{\zeta\pi}{r^2}\left[\frac{\Delta}{3600''} \times n'(S - S') + \frac{\lambda'' m''}{r}(R - R')\right]$$

$$+ \frac{\Delta^2}{3600''^2} \times n'^2 + \lambda^2 - \lambda'^2 \mp 2C\left[\frac{\zeta\pi}{r^2}(S - S') + \frac{\Delta}{3600''} n'\right] = 0;$$

en supposant d'ailleurs

$$C = \sqrt{\left[\lambda^2 - \left(\frac{\zeta\pi(R'' - R)}{r^2} + \frac{\lambda'' m''}{r}\right)^2\right]}.$$

Cette forme est suffisamment exacte pour l'usage que nous nous proposons.

Si l'on différencie cette équation en regardant comme variables $C, \pi, \lambda, \lambda', \lambda''$, on aura

$$\left[\zeta C\pi\left((S - S')^2 + (R'' - R')^2 - (R'' - R)^2\right)\right.$$
$$+ Cr^2\left(\frac{\Delta}{3600''} n'(S - S') + \frac{\lambda'' m''}{r}(R - R')\right)$$
$$\mp C^2 r^2 (S - S') \pm r^2 (R'' - R) \times \left(\frac{\Delta}{3600''} n'\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\zeta\pi}{r^2}(S - S')\right) \times \left(\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R) + \frac{\lambda'' m''}{r}\right)\right] \zeta d\pi$$
$$+ \left[\zeta C\pi(R - R') \pm r^2 \left(\frac{\Delta}{3600''} n'\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\zeta\pi}{r^2}(S - S')\right) \times \left(\frac{\zeta\pi}{r^2}(R'' - R) + \frac{\lambda'' m''}{r}\right)\right] m'' r\, d\lambda''$$
$$+ \left[C \mp \left(\frac{\Delta}{3600''} n' + \frac{\zeta\pi}{r^2}(S - S')\right)\right] r^4 \lambda\, d\lambda - r^4 C\lambda'\, d\lambda' = 0,$$

équation qui fera juger du degré de confiance que l'on doit accorder au résultat, & qui déterminera en même temps les circonstances les plus favorables à la méthode. J'aurai occasion de parler plus au long de cette formule, lorsqu'il sera question des passages de Vénus sur le disque du Soleil; Problème que j'ai principalement en vue.

ARTICLE SIXIÈME.

Des changemens qu'il faut faire aux formules, pour les appliquer aux occultations des Étoiles & des Planètes par la Lune, & aux passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil.

(92.) Je vais m'occuper maintenant des changemens qu'il faut faire aux formules, pour les appliquer aux occultations des Étoiles & des Planètes par la Lune, aux passages de

Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil, & en général, au calcul d'une obſervation quelconque. Quoiqu'il y ait beaucoup d'analogie entre ces changemens, & que peut-être j'aurois pu, par cette conſidération, me diſpenſer d'une partie de ces recherches; j'ai cru devoir entrer dans un très-grand détail, pour ne laiſſer rien à deſirer ſur ce ſujet.

SECTION PREMIÈRE.

Des changemens qu'il faut faire aux formules pour les appliquer aux occultations des Étoiles & des Planètes par la Lune.

(93.) Je vais m'occuper dans cette Section, des changemens qu'il faut faire aux formules pour les appliquer aux occultations des Étoiles fixes & des Planètes par la Lune. Il eſt bien évident que ce que je dirai des occultations, s'applique également aux appulſes. Je ſuppoſe d'abord que l'on connoiſſe les élémens ſuivans.

Obliquité de l'Écliptique.

Longitude de l'Étoile ou de la Planète occultée.
Latitude de l'Étoile ou de la Planète occultée.
Aſcenſion droite de l'Étoile ou de la Planète occultée.
Déclinaiſon de l'Étoile ou de la Planète occultée.
} Ces quantités doivent être évaluées relativement au centre de la Terre, & ſe rapportent à l'inſtant de la conjonction géocentrique.

Heure de la conjonction de la Lune & de l'Étoile ou de la Planète occultée, vue du centre de la Terre.

Longitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction: elle eſt la même que celle de l'Étoile ou de la Planète occultée.

Latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction.

Mouvement horaire de la Lune en Longitude.

Mouvement horaire de la Lune en Latitude.

Rapport des axes de la Terre.

Parallaxe horizontale polaire de la Lune à l'inſtant de la conjonction.

Demi-diamètre horizontal de la Lune.

Variation horaire de la parallaxe horizontale polaire.

Aſcenſion droite du Soleil, à l'inſtant de la conjonction.

Mouvement horaire du Soleil en aſcenſion droite.

Différence entre la durée de l'heure vraie & la durée de l'heure moyenne pour le jour de l'occultation.

Parallaxe horizontale géocentrique de la Planète.
Mouvement horaire géocentrique de la Planète en longitude.
Mouvement horaire géocentrique de la Planète en latitude.
Mouvem. horaire géocentrique de la Planète en ascension droite.
Mouvement horaire géocentrique de la Planète en déclinaison.

Ces quantités sont nulles pour les Étoiles.

(94.) Avant que d'entrer dans quelque détail, il est à propos de se rappeler les constructions fondamentales.

Pour déterminer les circonstances d'une éclipse de Soleil, j'ai supposé que par le centre de la Lune l'on fit passer à chaque instant, perpendiculairement à l'Écliptique, un plan que j'ai appelé *plan de projection*, & dont l'intersection avec l'Écliptique fût perpendiculaire au rayon vecteur de la Terre, c'est-à-dire, à la droite qui joint les centres du Soleil & de la Terre; que par le Soleil l'on fit passer un cône dont le sommet fût au centre de cet astre, & qui eût pour base les différens plans des parallèles terrestres. Comme chaque Observateur attribue au Soleil le mouvement qui lui est propre, cet astre paroît se mouvoir dans l'intersection du plan de projection avec ce cône lumineux, tandis que le mouvement de la Lune paroît se faire uniformément dans la ligne droite, projection de la petite portion de son orbite relative parcourue pendant l'Éclipse. Ainsi donc, sur un plan qui représente le plan de projection, j'ai prescrit de tracer une droite AO, que je regarde comme l'intersection de ce plan avec l'Écliptique que le Soleil ne quitte jamais. Sur cette droite je prends un point G, que je regarde comme l'intersection du plan de projection avec la ligne qui joint les centres du Soleil & de la Terre. Par le point G, je tire une droite GX, qui représente l'intersection du cercle de déclinaison du Soleil avec le plan de projection. Ce cercle de déclinaison s'appelle ordinairement *le Méridien universel*, parce qu'il est midi ou minuit pour tous les lieux qui sont dans ce plan. Sur la droite GX, je marque un point X, tel que GX soit égal au demi-petit axe de la Terre. Par le point G, j'élève à la droite AO, une perpendiculaire GL, telle que le point L représente le lieu du centre de la Lune à l'instant de la conjonction. Par

Fig. 1.

Fig. 1. le point L je mène la droite LQ, projection de la petite portion de l'orbite relative de la Lune, parcourue pendant l'Éclipse. Enfin sur le même plan, je suppose tracée la projection orthographique des parallèles terrestres.

Pour déterminer les circonstances d'une occultation d'une Étoile fixe par la Lune, (je ne considère d'abord que ce cas, parce qu'il est le plus simple) les constructions sont absolument analogues. Je joins, par une ligne droite, les centres de la Terre & de l'Étoile occultée, comme dans les éclipses de Soleil. Cette droite ne sera pas dans le plan de l'Écliptique; mais dans le plan du grand cercle mené par le centre de la Terre & par l'Étoile, perpendiculairement au cercle de latitude de l'Étoile. Ce cercle, relativement aux occultations des Étoiles, tient lieu de l'Écliptique. Tout le reste d'ailleurs est entièrement semblable.

(95.) Cette construction donne lieu aux réflexions suivantes. Puisque le plan dont il s'agit n'est pas l'Écliptique, mais le grand cercle mené par l'Étoile occultée perpendiculairement au cercle de latitude; si du lieu L de la Lune, à l'instant de la conjonction, & du lieu K, une heure après la conjonction, l'on abaisse sur ce plan les droites LG, Kh, ces droites ne seront plus les sinus de la latitude de la Lune vue du centre de la Terre, évalués dans un cercle qui a pour rayon la distance de la Lune à la Terre; mais elles seront les sinus des différences de latitude de la Lune & de l'Étoile occultée. Par la même raison, la droite Gh ne sera plus le sinus du mouvement horaire composé en longitude, mais le sinus du mouvement horaire de la Lune rapporté au cercle dont est question.

(96.) Pour avoir l'expression de ce mouvement horaire, Fig. 2. je trace l'Écliptique EQ & le cercle BC; c'est celui auquel il faut rapporter le mouvement horaire de la Lune. Par le point P pôle de l'Écliptique, & par le lieu L de la Lune à l'instant de la conjonction, je mène le cercle de latitude PhH qui coupe l'Écliptique en H, & le cercle BC en h. Par le lieu L' de la Lune une heure après la conjonction,

je mène le cercle de latitude $Ph'H'$. Puiſqu'en vertu de cette conſtruction, l'angle en P du triangle ſphérique $h'Ph$ rectangle en h, meſure le mouvement horaire ſur l'Écliptique, l'arc hh' meſurera le mouvement horaire rapporté au cercle BC; d'ailleurs le côté hP eſt le complément de la latitude de l'Étoile; on aura donc *(Trigonométrie ſphérique)* Fig. 2.

$$\text{Tangente (mouvement horaire de la Lune rapporté au cercle } BC) = \frac{\text{coſinus (latitude de l'Étoile)} \times \text{tangente (mouvement horaire ſur l'Écliptique)}}{\text{rayon}}.$$

Quant au mouvement horaire en latitude, les conſtructions précédentes ne changent point cet élément; on a donc pour déterminer l'inclinaiſon de l'orbite relative,

$$\text{Tangente de l'inclinaiſon de l'orbite relative} = \frac{r^2}{206265''} \times \frac{\text{mouvem. horaire de la Lune en latitude évalué en ſecondes de degré}}{\text{ſinus (mouvement horaire de la Lune rapporté au cercle } BC)}.$$

θ eſt le ſinus & ψ eſt le coſinus de cette inclinaiſon, & l'on doit y appliquer quant aux ſignes, les remarques analogues aux éclipſes de Soleil. Nous remarquerons ici que le mouvement horaire que l'on vient de calculer, eſt le mouvement correſpondant à une heure moyenne *.

(97.) Lors des Éclipſes de Soleil, p & q ſont le ſinus & le coſinus de la déclinaiſon du Soleil; dans le cas dont il s'agit, ils ſont le ſinus & le coſinus de la déclinaiſon de l'Étoile occultée. L'on doit appliquer à ces quantités, des remarques analogues aux éclipſes de Soleil.

r, ϱ, s, c, ϖ, ont évidemment les mêmes définitions que pour les éclipſes de Soleil. Quant à ξ, il ſuit des conſtructions précédentes, qu'il eſt le coſinus de la différence en latitude de l'Étoile occultée & de la Lune, à l'inſtant de la conjonction; & comme d'ailleurs $\varpi' = 0$, puiſque les Étoiles n'ont point de parallaxe, $\zeta = r$.

(98.) Pour déterminer l'angle de l'orbite relative de la Lune, avec le fil parallèle ou équatorial de l'Obſervateur

* Si l'Étoile ou la Planète occultée, pouvoient avoir une très-grande latitude, les conſtructions ſur leſquelles la formule précédente eſt fondée ſeroient un peu différentes.

ſuppoſé au centre de la Terre, on eſt parvenu, dans les éclipſes de Soleil, à une équation de la forme ſuivante:

$$\omega = \frac{\theta\Omega}{q} + \frac{\psi\chi}{q}.$$

Dans cette équation, θ eſt le ſinus & ψ le coſinus de l'inclinaiſon de l'orbite relative; Ω eſt le coſinus de l'obliquité de l'Écliptique; & $\chi = \sqrt{(q^2 - \Omega^2)}$. Lors des occultations des Étoiles on parvient à une équation de la même forme. Il eſt bien évident, en effet, que dans le cas des Étoiles, le cercle BC tient lieu de l'Écliptique. L'équation ſera donc abſolument la même que ci-deſſus, ſi l'on entend par Ω le coſinus de l'inclinaiſon du cercle BC ſur l'Équateur. Ou plutôt, pour éviter toute confuſion, ſoit

θ le ſinus, ψ le coſinus } de l'inclinaiſon de l'orbite relative (§. 96).

p le ſinus, q le coſinus } de la déclinaiſon de l'Étoile occultée.

Ω' le coſinus de l'inclinaiſon du cercle BC ſur l'Équateur.

$\chi = \sqrt{(q^2 - \Omega'^2)}$.

On aura

$$\omega = \frac{\theta\Omega'}{q} + \frac{\psi\chi}{q}.$$

Il ne s'agit plus que de déterminer l'angle dont Ω' eſt le coſinus.

Fig. 3. (99.) Soit B l'Étoile, QEC l'Écliptique, AEC' l'Équateur qui coupe l'Écliptique au point E; $BC'C$ le cercle perpendiculaire au cercle de latitude paſſant par l'Étoile; ce cercle coupe l'Écliptique au point C, & l'Équateur au point C'; BQA le cercle de latitude paſſant par l'Étoile; Q le point où ce cercle de latitude coupe l'Écliptique; A le point où ce cercle de latitude coupe l'Équateur; Ba le cercle de déclinaiſon paſſant par l'Étoile; a le point où le cercle de déclinaiſon coupe l'Équateur. Il eſt évident, d'après cette conſtruction, que c'eſt l'angle $BC'A$ qu'il s'agit de déterminer. Ces cercles forment d'abord deux triangles ſphériques rectangles, ABa, QEA. Le côté QE eſt égal à la longitude

de

de l'Étoile; l'angle QEA eſt l'angle de l'obliquité de l'Écliptique, & le côté Ba eſt égal à la déclinaiſon de l'Étoile. Dans le triangle QEA, rectangle en Q, la Trigonométrie ſphérique nous apprend que l'on a

$$\text{coſ. } A = \frac{\text{coſ. (longitude de l'Étoile)} \times \text{ſin. (obliquité de l'Écliptique)}}{\text{rayon}}.$$

Dans le triangle ABa rectangle en a, & dans lequel on connoît le côté Ba égal à la déclinaiſon de l'Étoile, & l'angle A par l'équation précédente, la Trigonométrie ſphérique nous apprend que l'on a,

$$\text{ſin. } ABa = \frac{\text{rayon} \times \text{coſin. } A}{\text{coſinus (déclin. de l'Étoile)}}$$

$$= \frac{\text{coſin. (longit. de l'Étoile)} \times \text{ſin. (obliquité de l'Écliptique)}}{\text{coſin. (déclinaiſon de l'Étoile)}}.$$

Dans le triangle $BC'a$ rectangle en a, on connoît le côté Ba & l'angle aBC', puiſque l'angle ABC' eſt droit par la conſtruction, & que l'on vient de déterminer l'angle ABa. La Trigonométrie ſphérique nous apprend donc que l'on a

$$\text{coſ. } BC'a = \frac{\text{coſin. } Ba \times \text{ſin. } aBC'}{\text{rayon}};$$

mais d'ailleurs

ſin. aBC' = coſ. ABa; Ω' = coſ. $BC'a$; & coſ. Ba = coſ. (décl. de l'étoile).

Donc,

$$\Omega' = \frac{\sqrt{[r^2 \text{ coſ.}^2 \text{ (décl. de l'Étoile)} - \text{coſ.}^2 \text{ (longit. de l'Étoile)} \times \text{ſin.}^2 \text{ (obliq. Éclipt.)}]}}{r}.$$

Puiſque $\chi = \sqrt{(q^2 - \Omega'^2)}$; de cette dernière expreſſion de Ω', il ſuit que l'on peut avoir la valeur ſuivante de χ, plus ſimple que celle du §. 98,

$$\chi = \frac{\text{coſin. (longitude de l'Étoile)} \times \text{ſin. (obliquité de l'Écliptique)}}{r}.$$

Dans l'uſage de la formule du §. 98, χ eſt poſitif lorſque la longitude de l'Étoile eſt entre 0^d & 90^d, entre 270^d & 360^d; χ eſt négatif lorſque la longitude de l'Étoile eſt entre 90^d & 270^d.

(100.) Puiſque GL eſt le ſinus de la différence de la Fig. 1.

latitude de l'Étoile occultée & de la Lune, à l'inſtant de la conjonction vue du centre de la Terre, & que l eſt l'expreſſion numérique de GL ſur le plan de projection, on a; Fig. 1.

$$l = \frac{r \times \text{ſin. (latitude de la Lune au moment de la conjonct. — latit. de l'Étoile)}}{\text{ſin. (parallaxe horizontale polaire de la Lune à l'inſtant de la conjonction)}}.$$

L'on obſervera que l eſt poſitive, lorſqu'à l'inſtant de la conjonction la latitude de la Lune eſt plus boréale ou moins auſtrale que celle de l'Étoile; que l eſt négative dans les cas contraires.

(101.) L'angle horaire que l'on doit employer dans les formules, eſt l'angle horaire de l'Étoile; c'eſt-à-dire, la diſtance de l'Étoile au méridien, meſurée ſur l'Équateur. Ces heures ſont donc des heures du premier mobile; il faut donc réduire en temps du premier mobile, l'intervalle écoulé entre le paſſage de l'Étoile au méridien & le temps de l'obſervation. Voici une conſtruction qui ſatisfait à ce Problème.

Il eſt évident que la diſtance de l'Étoile au méridien, à l'inſtant de l'obſervation, eſt égale à l'angle horaire actuel du Soleil, plus l'aſcenſion droite actuelle du Soleil, moins l'aſcenſion droite de l'Étoile. Soit

A l'aſcenſion droite de l'Étoile.

A' l'aſcenſion droite du Soleil à l'inſtant de la conjonction.

B' le mouvement horaire du Soleil en aſcenſion droite.

b' le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction donné par les Tables, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation.

H l'heure de l'Étoile qu'il faut employer dans les calculs.

H' l'heure vraie à l'inſtant de l'obſervation.

Il eſt ſenſible que l'aſcenſion droite du Soleil à l'inſtant pour lequel on calcule $= A' + \frac{b'}{3600''} \times B'$.

Donc,

$$H = H' + A' - A + \frac{b'}{3600''} \times B'.$$

Dans cette formule, les aſcenſions droites de l'Étoile & du Soleil, le mouvement horaire du Soleil en aſcenſion

droite, & en général toutes les quantités qui la composent, doivent être évaluées en temps, & comptées de suite depuis $0^h\ 0'\ 0''$ jusqu'à 24^h.

S'il étoit question d'une Planète qui eût un mouvement en ascension droite. Soit

B le mouvement horaire de la Planète en ascension droite.

On auroit

$$H = H' + A' - A + \frac{b'}{3600''} B' - \frac{b'}{3600''} \times B.$$

On changeroit le signe du dernier terme de la formule, si le mouvement horaire de la Planète en ascension droite étoit rétrograde.

(102.) Il est aisé de voir que pour évaluer les quantités $b, v, \gamma, \varkappa, \varkappa'$, relativement aux occultations, on a

$b =$ le nombre de secondes de temps vrai, écoulées depuis l'instant de la conjonction jusqu'à l'instant de l'observation.

$v =$ l'arc du premier mobile correspondant à une heure vraie le jour de l'occultation. Cet arc a pour expression $15^d + B'$, s'il s'agit d'une Étoile, ou $15^d + B' - B$, s'il s'agit d'une Planète. Dans cette dernière formule, nous supposons B & B' évalués en arc de cercle.

$$\varkappa = \frac{r\xi}{\psi} \times \frac{\text{sinus (mouvement horaire de la Lune rapporté au cercle } BC)}{\text{sin. (parall. horiz. polaire de la Lune à l'instant de la conjonction)}},$$

$$\varkappa' = \frac{\xi}{\psi} \times \text{sinus (mouvement horaire de la ☾ rapporté au cercle } BC),$$

$$\gamma = \xi \times \frac{\text{sin. verse (mouvement horaire de la Lune, rapporté au cercle } BC)}{\text{sinus (parall. horiz. polaire de la Lune à l'instant de la conjonction)}},$$

On ne doit point oublier que $v, \varkappa, \varkappa', \gamma$ sont toujours positifs; que b est positif lorsque l'instant de la conjonction précède celui de l'observation; que b est négatif dans le cas contraire. On remarquera aussi, pour la plus grande exactitude, que le mouvement horaire déterminé dans le *§. 96*, est celui qui répond à une heure moyenne, & que celui qu'il faut employer dans les formules du présent paragraphe est le mouvement correspondant à une heure vraie. Il est également évident que g & h étant le sinus & le cosinus de

l'angle déterminé par la formule du §. *101*; g eſt poſitif lorſque cet angle eſt entre 0^d & 180^d; que g eſt négatif, lorſque cet angle eſt entre 180^d & 360^d; que h eſt poſitif, lorſque l'angle eſt entre 0^d & 90^d, entre 270^d & 360^d; qu'il eſt négatif, lorſque l'angle eſt entre 90^d & 270^d.

(103.) Lors des Étoiles, nous avons ſuppoſé le plan *BC* immobile; dans le cas des Planètes, on ſuppoſera ce plan mobile, en l'aſſujettiſſant d'ailleurs à paſſer toujours par la Planète occultée perpendiculairement au cercle de latitude: il faut voir quel changement la mobilité de ce plan introduit dans les formules.

(104.) Parmi tous ces plans, on choiſira celui qui répond à l'inſtant de la conjonction, vue du centre de la Terre, & l'on rapportera à ce plan particulier le mouvement en longitude de la Planète: on déterminera pareillement l'inclinaiſon de ce plan ſur l'Équateur, par le moyen de la formule

$$\Omega' = \frac{\sqrt{[r^2 \text{coſ.}^2 (\text{décl. Pl. à l'inſt. de la conj.}) - \text{coſ.}^2 (\text{long. Pl. à l'inſt. de la conj.}) \times \text{ſin.}^2 (\text{obl. Éclip.})]}}{r};$$

on aura auſſi pour expreſſion de χ

$$\chi = \frac{\text{coſin. (longit. de la Planète à l'inſt. de la conj.)} \times \text{ſin. (obliq. de l'Écliptique)}}{r}.$$

On ſent bien que quoique dans la rigueur géométrique, il faudroit autant de déterminations différentes que l'on peut imaginer de différens cercles *B C*, les déterminations précédentes pourront, ſans erreur appréciable, s'appliquer à toute la durée de l'occultation.

(105.) Des deux mouvemens horaires de la Lune & de la Planète, rapportés au cercle *B C*, on en fera réſulter un mouvement horaire compoſé, qui aura pour expreſſion

mouvement horaire compoſé ſuivant le cercle *BC* =
mouvem. horaire de la ☾ ſuivant *BC* — mouvement horaire de la Planète ſuivant *BC*.

Dans cette formule, ſi la Planète étoit rétrograde, on changeroit le ſigne du dernier terme.

Des deux mouvemens de la Lune & de la Planète en latitude, on en fera pareillement réſulter un mouvement horaire

composé en latitude, qui aura pour expression

mouvement horaire composé en latitude =

mouv. horaire de la Lune en latitude — mouvement horaire de la Planète en latitude.

Dans cette formule, on suppose que le mouvement horaire de la Lune & de la Planète en latitude, approche chacun de ces astres du pôle boréal de l'Écliptique; si l'on n'étoit pas dans ce cas, il faudroit changer le signe du mouvement horaire en latitude de celui des deux astres qui s'éloigneroit du pôle boréal de l'Écliptique.

Les mouvemens horaires que l'on vient de calculer, sont les mouvemens horaires correspondans à une heure moyenne.

(106.) Ces suppositions admises, toutes les quantités s'évaluent comme dans les occultations des Étoiles, en mettant toutefois dans les formules, la Planète occultée au lieu de l'Étoile, & les mouvemens horaires composés, soit en longitude, soit en latitude, au lieu des mouvemens horaires de la Lune. Quant à π' & à ζ, comme la parallaxe de la Planète n'est pas nulle, on a

π' = sinus de la parallaxe horizontale géocentrique de la Planète.

$$\zeta = r - \frac{\pi' \xi}{\pi}.$$

RÉCAPITULATION des Paragraphes précédens.

(107.) Pour récapituler ce qui vient d'être démontré dans les paragraphes précédens: Soit

r le demi-petit axe de la Terre, que je suppose d'ailleurs égal au rayon des Tables.

ρ le demi-grand axe.

v l'arc évalué par la formule du *§. 102*.

θ le sinus, ψ le cosinus de l'inclinaison de l'orbite relative.

Cette inclinaison se détermine par l'équation suivante;

Tangente de l'inclinaison de l'orbite relative =

$$\frac{r^2}{206265''} \times \frac{\text{mouv. hor. comp. en latit. évalué en secondes de degré}}{\text{sin. (mouvement horaire composé suivant } BC)};$$

ξ le cosinus de la différence de latitude de l'Astre occulté & de la Lune, à l'instant de la conjonction.

b le nombre de secondes de temps vrai, écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant pour lequel on calcule.

s le sinus, c le cosinus } de la latitude corrigée de l'Observateur (*2.d Mém. §. 20, Table I*).

g le sinus, h le cosinus } de l'angle horaire de l'astre occulté, à l'instant de l'observation. Cet angle se déduit de la formule du *§. 101*.

p le sinus, q le cosinus } de la déclinaison de l'astre occulté à l'instant pour lequel on calcule.

$$\Omega' = \frac{\sqrt{[r^2 \text{cos.}^2 (\text{décl. ast. à l'inst. conj.}) - \text{cos.}^2 (\text{long. ast. à l'inst. conj.}) \text{ sin.}^2 (\text{obl. Écl.})]}}{r}.$$

$$\chi = \frac{\text{cosin. (longit. astre à l'inst. de la conjonct.)} \times \text{sin. (obliquité de l'Écliptique)}}{r}.$$

ω le sinus, t la tangente, φ le cosinus } de l'angle de l'orbite relative de la Lune avec le fil parallèle ou équatorial de l'Observateur.

Cet angle se détermine par l'équation suivante,

$$\omega = \frac{\theta\,\Omega'}{q} + \frac{\psi\,\chi}{q}.$$

π le sinus de la parallaxe horizontale polaire de la Lune à l'instant pour lequel on calcule.

π' le sinus de la parallaxe horizontale géocentrique de l'Astre occulté.

$$\zeta = r - \frac{\pi'\xi}{\pi}.$$

$$l = r \times \frac{\text{sin. (latitude de la ☾ à l'inst. de la conj. — latitude de l'astre)}}{\text{sin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'instant de la conjonction}}.$$

$$n = \frac{r\xi}{\psi} \times \frac{\text{sin. (mouv. horaire composé suivant } BC)}{\text{sin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'instant de la conjonction}}.$$

$$n' = \frac{\xi}{\psi} \times \text{sin. (mouv. horaire composé suivant } BC).$$

$$\gamma = \xi \times \frac{\text{sin. verse (mouv. horaire composé suivant } BC)}{\text{sin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'instant de la conjonction}}.$$

Toutes les équations démontrées pour les Éclipses, auront également lieu pour les occultations.

(108.) Dans toutes les occultations de Planètes ou d'Étoiles, par la Lune, les quantités r, ρ, v, ψ, ξ, c, q, Ω', φ, π, π', ζ, n, n', γ, sont essentiellement positives; il n'en est pas de même des quantités θ, b, s, g, h, p, χ, t, ω, l.

l eſt poſitive lorſqu'à l'inſtant de la conjonction, la latitude de la Lune eſt plus boréale ou moins auſtrale que celle de l'aſtre occulté; l eſt négative dans le cas contraire.

θ a le même ſigne que le mouvement horaire composé en latitude, *§. 105*.

b eſt poſitif lorſque l'inſtant de la conjonction précède l'inſtant pour lequel on calcule; b eſt négatif dans le cas contraire.

s eſt poſitive lorſque la latitude de l'Obſervateur eſt boréale; s eſt négative dans le cas contraire.

g eſt poſitif lorſque l'angle déterminé par la formule du *§. 101*, eſt entre 0^d & 180^d; g eſt négatif lorſque l'angle eſt entre 180^d & 360^d.

h eſt poſitive lorſque l'angle déterminé par la formule du *§. 101*, eſt entre 0^d & 90^d, entre 270^d & 360^d; h eſt négative lorſque l'angle eſt entre 90^d & 270^d.

p eſt poſitif lorſque la déclinaiſon de l'aſtre occulté eſt boréale; p eſt négatif lorſque cette déclinaiſon eſt auſtrale.

χ eſt poſitif, lorſque la longitude de l'aſtre occulté eſt entre 0^d & 90^d, entre 270^d & 360^d; χ eſt négatif lorſque la longitude de l'aſtre eſt entre 90^d & 270^d.

Le ſigne de ω, & de t qui en eſt une conſéquence, eſt déterminé par la formule du *§. 107*.

(109.) Nous avons dit (*§. 107*) que toutes les équations démontrées pour les Éclipſes, avoient également lieu pour les occultations; on ne doit pas omettre cependant la remarque ſuivante, relativement aux Problèmes de la ſection cinquième de l'*article II* de mon *VIII.e Mémoire*, & de la ſection ſeptième de l'*article II* de mon *IX.e Mémoire*. Il eſt queſtion dans ces ſections, de déterminer l'erreur du terme hypothétique, en ſuppoſant que l'on ſe ſoit trompé de quelques ſecondes ſur l'heure préciſe de l'obſervation. Dans ces paragraphes nous avons confondu l'heure vraie de l'obſervation, avec l'heure correſpondante à l'angle horaire de l'aſtre occulté, heure que j'appellerai déſormais *heure de l'aſtre occulté*. Comme il s'agiſſoit du Soleil, ces deux quantités coincidoient. Il n'en eſt pas de

Année 1770.

Année 1771.

même des occultations. Il faut donc distinguer ce qui appartient à l'heure vraie de l'obſervation, d'avec ce qui appartient privativement à l'heure de l'aſtre occulté. On a vu *(§. 101)* que l'heure de l'aſtre égale l'heure vraie de l'obſervation, plus la différence d'aſcenſion droite du Soleil & de l'Aſtre à l'inſtant de l'obſervation; l'heure vraie de l'obſervation influe donc ſur l'heure de l'aſtre & ſur l'heure de l'obſervation; mais toute la partie qui dépend de la différence d'aſcenſion droite du Soleil & de l'Aſtre, n'affecte que l'heure de l'aſtre, ſans affecter l'heure de l'obſervation. Suppoſons maintenant que l'on ait déterminé Δ par les formules des ſections dont il s'agit; on en formera deux quantités, dont la première ſera Δ & dont la ſeconde ſera $\Delta - r$; la première aura pour multiplicateur d (heure vraie de l'obſervation), & la ſeconde aura pour multiplicateur d (diff. d'aſ. droite du ☉ & de l'aſtre, réduite en temps). La raiſon de ce procédé eſt facile à ſaiſir, en réfléchiſſant ſur les formules dont il s'agit. Comme en général ce dernier terme a un très-petit coëfficient, & qu'il dépend de la différence d'aſcenſion droite du Soleil & de l'aſtre occulté, correſpondante à l'inſtant de l'obſervation; on pourra le négliger lorſque l'on connoîtra cette différence d'aſcenſion droite avec exactitude. Cette ſuppoſition a lieu en général pour toutes les occultations d'Étoiles.

(110.) Lorſqu'il s'agit d'une Étoile, on n'oubliera pas que ſes mouvemens horaires en longitude, en latitude, en aſcenſion droite & en déclinaiſon, étant nuls, les mouvemens compoſés en latitude & ſuivant le cercle BC, ſont égaux aux ſeuls mouvemens horaires de la Lune en latitude & ſuivant le cercle BC. De plus la parallaxe de l'Étoile eſt nulle, on a donc $\pi' = 0$ & $\zeta = r$.

*Application de la théorie précédente à l'occultation d'*Antarès *par la Lune, du 10 Octobre 1763, & à la détermination de la longitude de* Foulpointe, *dans l'île de Madagaſcar.*

(111.) Pour donner un exemple de la théorie précédente, je

je vais l'appliquer à l'occultation d'*Antarès* par la Lune, du 10 Octobre 1763, & à la détermination de la longitude de *Foulpointe*, dans l'île de *Madagascar*, d'après les observations de M. le Gentil*.

Je suppose d'abord que l'on ait tiré des Tables astronomiques les élémens suivans:

Obliquité de l'Écliptique	23^d	28′	22″
Longitude d'*Antarès*	246.	27.	44
Latitude d'*Antarès*	4.	32.	13 Aust.
Ascension droite d'*Antarès*	243.	44.	12
Déclinaison d'*Antarès*	25.	53.	10 Aust.
Heure de la conjonction d'*Antarès* & de la Lune au méridien de Paris	2^h	28′	48″
Longitude de la Lune à l'instant de la conjonction.	8^f 6^d	27.	44
Latitude de la Lune à l'instant de la conjonction.	4.	11.	19 Aust.
Mouvement horaire de la Lune en longitude	0.	35.	43,8
Mouvement horaire de la Lune en latitude	0.	1.	58,0
La Lune s'éloignoit du pôle boréal de l'Écliptique.			
Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.			
Parallaxe horizontale polaire de la Lune à l'instant de la conjonction	0.	59.	24,3
La parallaxe horizontale pour le parallèle de Paris, étoit de 59′ 30″,8.			
Demi-diamètre horizontal de la Lune	0.	16.	15,4
Variation horaire de la parallaxe horizontale polaire.	0.	0.	2,3 nég.
Ascension droite du Soleil à l'instant de la conjonct.	195.	39.	45
Mouvement horaire du Soleil en ascension droite.	0.	2.	18,3
Différence entre la durée de l'heure vraie & la durée de l'heure moyenne le jour de l'occultation = − 0″,8 de temps.			

Quant à la parallaxe horizontale géocentrique d'*Antarès*, & à ses mouvemens horaires en longitude, en latitude, en déclinaison & en ascension droite, toutes ces quantités sont nulles.

* Ces observations ont déjà été calculées par M. de la Lande, dans nos Mémoires pour l'année 1767, mais d'une manière moins générale.

De ces élémens, on conclura

Mouvement horaire de la Lune, rapporté au cercle *BC*, & correſpondant à une heure moyenne....	0^d 35′ 37″,3
Mouvement horaire de la Lune, rapporté au cercle *BC*, & correſpondant à une heure vraie.....	0. 35. 36,7
Latitude de la Lune moins la latitude d'*Antarès*...	0. 20. 54 poſit.
Aſcenſion droite d'*Antarès* évaluée en temps....	16^h 14′ 57″
Aſcenſion droite du Soleil correſpondante à l'inſtant de la conjonction......................	13. 2. 39
Mouvement horaire du Soleil en aſcenſion droite, évalué en temps.....................	0. 0. 9

		Logarithme...	
r	$= +$ 100000.	r	$=$ 10,0000000.
ρ	$= +$ 100438.	ρ	$=$ 10,0018923.
v	$= +$ arc de 15^d 2′ 18″	v	$=$ 9,4190797.
θ	$= -$ ſinus. 3^d 9′ 40″	θ	$=$ 8,7414968.
ψ	$= +$ coſin. 3. 9. 40.	ψ	$=$ 9,9993387.
ξ	$= +$ coſin. 0. 20. 54.	ξ	$=$ 9,9999920.
p	$= -$ ſinus. 25. 53. 10.	p	$=$ 9,6400675.
q	$= +$ coſin. 25. 53. 10.	q	$=$ 9,9540802.
Ω'	$= +$ coſin. 27. 41. 16.	Ω'	$=$ 9,9471835.
χ	$= -$ 15907.	χ	$=$ 9,2015850.
ω	$= -$ ſinus. 13. 20. 40.	ω	$=$ 9,3632444.
t	$= -$ tang. 13. 20. 40.	t	$=$ 9,3751315.
φ	$= +$ coſin. 13. 20. 40.	φ	$=$ 9,9881129.
π	$= +$ ſinus. 0. 59. 24,3	π	$=$ 8,2375316.
π'	$=$ 0.		
ζ	$= r$.	ζ	$=$ 10,0000000.

Logar. ſin. (latit. de la ☾ à l'inſt. de la conjonct. — latit. d'*Antarès*) $=$ 7,7838697.
Logar. ſin. (mouv. hor. de la Lune, rapporté au cercle *BC*)..... $=$ 8,0153000.
Logar. ſin. verſe (mouv. hor. de la Lune, rapporté au cercle *BC*) $=$ 5,7300000.

$l = + 35183.$ | Logarithme... $l = 9{,}5463381.$
$n = + 60037.$ | $n = 9{,}7784217.$
$n' = + 1037{,}4.$ | $n' = 8{,}0159533.$
$\gamma = + 310.$ | $\gamma = 7{,}4915800.$

Paſſons maintenant au détail de l'obſervation.

*Occultation d'*Antarès *par la Lune, obſervée à* Foulpointe, *dans l'île de* Madagaſcar, *le 10 Octobre 1763, par M. le Gentil.*

(112.) Voici le détail de cette obſervation, tel qu'il m'a été communiqué par M. le Gentil.

« Le 10 Octobre 1763, à $6^h\ 19'\ 21''$ de ma pendule, immerſion d'*Antarès*, par la partie obſcure de la Lune. À $7^h\ 7'\ 25''$, émerſion par la partie éclairée. Le 10, à midi, ma pendule retardoit de $12'\ 13''$ ſur le temps vrai. Le 11, à midi, elle retardoit de $12'\ 21''$; donc, le 10, ſur les 6 heures du ſoir, elle retardoit de $12'\ 15''$. Donc,

	Temps vrai.
Immerſion d'*Antarès*....................	$6^h\ 31'\ 36''$
Émerſion..........................	7. 19. 40.

J'ai obſervé pareillement la latitude de *Foulpointe;* elle eſt de $17^d\ 40'\ 14''$ auſtrale. Lorſqu'*Antarès* a été occulté, on commençoit à diſtinguer, à la vue ſimple, le bord obſcur de la Lune. Cette obſervation a été faite avec une excellente lunette de trois pieds. La Lune n'avoit que trois jours, & ſes cornes étoient fort aiguës. L'émerſion eſt auſſi exacte que l'immerſion; l'une & l'autre m'ont paru arriver dans un clin d'œil, ou moins d'une demi-ſeconde ».

Calcul de l'obſervation précédente.

(113.) Puiſque la latitude vraie de Foulpointe eſt de $17^d\ 40'\ 14''$ auſtrale, ſa latitude corrigée eſt de $17^d\ 35'\ 54''$, & l'on a

$$\left.\begin{array}{l} s = -\ \text{sin.} \\ c = +\ \text{cosin.} \end{array}\right\} 17^d\ 35'\ 54'' \qquad \text{Log.}\left\{\begin{array}{l} s = 9,4805022. \\ c = 9,9791837. \end{array}\right.$$

L'immersion d'*Antarès* est arrivée à $6^h\ 31'\ 36''$, temps vrai; donc, si l'on suppose Foulpointe plus oriental que Paris, d'environ $3^h\ 4'$ de temps, & que par conséquent la conjonction soit arrivée lorsque l'on comptoit à Foulpointe $5^h\ 32'\ 48''$ du soir (il n'est pas nécessaire de connoître cette première longitude avec une précision plus grande que celle que donnent les Cartes les moins précises, attendu la petitesse du terme sur lequel elle influe); on aura, par la formule du *§. 101,*

$$H = 6^h\ 31'\ 36'' + 13^h\ 2'\ 39'' - 16^h\ 14'\ 57'' + 9'' = 3^h\ 19'\ 27''.$$

L'angle horaire correspondant étoit celui d'*Antarès,* à l'instant de l'immersion; donc, relativement à cette phase,

$$\left.\begin{array}{l} g = +\ \text{sin.} \\ h = +\ \text{cosin.} \end{array}\right\} 49^d\ 51'\ 45'' \qquad \text{Log.}\left\{\begin{array}{l} g = 9,8833770. \\ h = 9,8093065. \\ cg = 19,8625607. \\ ch = 19,7884902. \\ gs = 19,3638792. \\ hs = 19,2898087. \end{array}\right.$$

On trouvera de même, relativement à l'émersion,

$$H = 7^h\ 19'\ 40'' + 13^h\ 2'\ 39'' - 16^h\ 14'\ 57'' + 16'' = 4^h\ 7'\ 38''.$$

L'angle horaire correspondant étoit celui d'*Antarès*, à l'instant de l'émersion; donc, relativement à cette phase,

$$\left.\begin{array}{l} g = +\ \text{sin.} \\ h = +\ \text{cosin.} \end{array}\right\} 61^d\ 54'\ 30'' \qquad \text{Log.}\left\{\begin{array}{l} g = 9,9455648. \\ h = 9,6729135. \\ cg = 19,9247485. \\ ch = 19,6520972. \\ gs = 19,4260670. \\ hs = 19,1534157. \end{array}\right.$$

Année 1770. Maintenant, par les formules de mon *VIIIe Mémoire*, dans lesquelles, pour ne pas multiplier les calculs, nous n'aurons égard qu'aux erreurs de l'instant précis des observations, de la latitude de la Lune, de son mouvement horaire,

de son demi-diamètre, & de l'inflexion des rayons qui rasent le limbe de la Lune; cherchons l'expression la plus générale de la différence en longitude, entre le lieu qui comptoit $2^h\ 28'\ 48''$ à l'instant de la conjonction d'*Antarès* avec la Lune, & le lieu qui sous le parallèle austral de $17^d\ 40'\ 14''$ a observé l'immersion de cette Étoile, à $6^h\ 31'\ 36''$ du soir; entre le lieu qui comptoit $2^h\ 28'\ 48''$ à l'instant de la conjonction, & celui qui a observé l'émersion d'*Antarès*, à $7^h\ 19'\ 40''$ sous le même parallèle, ainsi que l'équation de condition entre ces deux observations. On aura *(VIII.e Mém. §. 122)*, *Année 1770.*

Pour la première Observation.

$Z = 2^h\ 28'\ 48''$, $z = 6^h\ 31'\ 36''$, $A = +\ 18487$,
$F = -\ 73213$, $E = +\ 98811$, $L = +\ 27363$*,
$C = +\ 67422$, $D = -\ 16847$, $G = +\ 823$,
$H = +\ 97113$, $\beta = +\ 2563$, $\Delta = +\ 63868$,
$\Xi = +\ 148853$, $\Theta = -\ 163217$, $\Sigma = +\ 225490$,

$Y = 6^h 31' 36'' - 2^h 28' 48'' - 1^h 13' 10'',0 + 0^h 20' 9'',6 = 3^h 9' 47'',6.$

$dY = +\ 1'',265 + 0,639\ d$(instant vrai de l'immersion)
$+\ 0,026\ d$(latitude de Foulpointe) . . . .
$+\ 1,489\ d$(mouvement horaire de la Lune) . . . .
$-\ 1,632\ d$(latitude de la Lune à l'instant de la conjonc.)
$-\ 2,255\ d$(inflexion) . . . .
$+\ 2,255\ d$(demi-diamètre de la Lune).

Pour la seconde Observation.

$Z = 2^h\ 28'\ 48''$, $z = 7^h\ 19'\ 40''$, $A = +\ 22953$,
$F = -\ 85853$, $E = +\ 99070$, $L = +\ 27363$*,
$C = +\ 52374$, $D = -\ 25473$, $G = +\ 4831$,
$H = +\ 95697$, $\beta = -\ 5428$, $\Delta = +\ 94082$,
$\Xi = +\ 282746$, $\Theta = +\ 246793$, $\Sigma = -\ 303860$;

$y = 7^h 19' 40'' - 2^h 28' 48'' - 1^h 25' 47'',9 - 0^h 14' 53'',1 = 3^h 10' 11''$;

---

* Comme les Étoiles n'ont pas de diamètre apparent, dans l'évaluation de L *(VIII.e Mémoire, §. 61)* j'ai supposé $\sigma = 0$, $\tau = r$; on en verra facilement la raison, en jetant les yeux sur ce paragraphe. Dans les calculs j'ai supposé que l'inflexion des rayons qui rasent le limbe de la Lune, étoit nulle.

$dy = -$ 2″,260 $+$ 0,941 d (inſtant vrai de l'émerſion)
$-$ 0,054 d (latitude de Foulpointe) . . . .
$+$ 2,827 d (mouvement horaire de la Lune) . . . .
$+$ 2,468 d (latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonc.)
$+$ 3,039 d (inflexion) . . . .
$-$ 3,039 d (demi-diamètre de la Lune).

*Équation de condition entre l'immerſion & l'émerſion d'*Antarès.

$$y - Y + dy - dY = 0.$$

$+$ 23″,4 $+$ 0,941 d (inſtant de l'émerſion) . . . .
$-$ 0,639 d (inſtant de l'immerſion) . . . .
$-$ 0,080 d (latitude de Foulpointe) . . . .
$+$ 1,338 d (mouvement horaire de la Lune) . . . .
$+$ 4,100 d (latitude de la Lune) . . . .
$+$ 5,294 d (inflexion) . . . .
$-$ 5,294 d (demi-diamètre de la Lune) $= 0$.

(114.) De l'équation précédente l'on tire

d (latitude de la ☾) $= -$ 5″,707 $-$ 0,230 d (inſt. de l'émerſion)
$+$ 0,160 d (inſtant de l'immerſion) . . . .
$+$ 0,002 d (latitude de Foulpointe) . . . .
$-$ 0,326 d (mouvement horaire de la Lune) . . . .
$-$ 1,292 d (inflexion) . . . .
$+$ 1,292 d (demi-diamètre de la Lune).

Si l'on ſubſtitue cette valeur de d (latitude de la Lune) dans l'expreſſion de $Y + dY$ du paragraphe précédent, on aura

Expreſſion la plus générale de la Longitude de Foulpointe.

Différence en longitude entre Foulpointe & le lieu qui comptoit 2^h 28′ 48″ du ſoir, à l'inſtant de la conjonction d'*Antarès* & de la Lune, le 10

Octobre 1763 = $3^h\ 9'\ 58'',179$ ....

$+$ 0,378 d (inſtant de l'immerſion) ....

$+$ 0,375 d (inſtant de l'émerſion) ....

$+$ 0,023 d (latitude de Foulpointe) ....

$+$ 2,021 d (mouvement horaire de la Lune) ....

$-$ 0,157 d (inflexion) ....

$+$ 0,157 d (demi-diamètre de la Lune).

Arrêtons-nous ſur cette expreſſion.

(115.) Comme M. le Gentil croit être ſûr des véritables inſtans de l'immerſion & de l'émerſion d'*Antarès*, ainſi que de la latitude de Foulpointe, qui d'ailleurs a un très-petit coëfficient; que de plus l'inflexion des rayons ou la diminution du demi-diamètre de la Lune, n'influe pas ſenſiblement ſur l'expreſſion précédente, nous n'inſiſterons point ſur les quantités que ces ſuppoſitions affecteroient. Le mouvement horaire dont j'ai fait uſage, eſt celui que l'on déduit des nouvelles Tables de M. Clairaut; ſi l'on emploie le mouvement horaire que l'on concluroit des nouvelles Tables de M. Mayer, que je crois préférables pour cet élément, on aura d(mouvement horaire de la Lune) $= -\ 1'',200$. Il faudra donc diminuer de $2'',428$ la longitude de Foulpointe, & l'équation précédente deviendra

Différence en longitude entre Foulpointe & le lieu qui comptoit $2^h\ 28'\ 48''$ du ſoir, à l'inſtant de la conjonction d'*Antarès* & de la Lune, le 10 Octobre 1763 = $3^h\ 9'\ 56'' + a$.

J'ai ajouté la quantité a, pour avoir égard aux petites erreurs que l'on pourroit découvrir par la ſuite, ſoit ſur la latitude de Foulpointe, ſoit ſur l'heure préciſe des obſervations. Cette quantité a pour expreſſion,

a = 0,378 d(inſtant de l'immerſion) $+$ 0,375 d(inſtant de l'émerſion) $+$ 0,023 d(latitude de Foulpointe).

Mais quel lieu comptoit $2^h\ 28'\ 48''$ du ſoir, à l'inſtant de la conjonction? c'eſt ce qu'il n'eſt pas facile de déterminer,

quand l'on n'a, comme dans le cas préſent, que les obſervations faites dans le lieu dont on veut calculer la longitude, ou que l'on ne connoît pas d'ailleurs la poſition exacte de la Lune. On peut, il eſt vrai, avoir recours aux Tables aſtronomiques; mais alors l'exactitude de la détermination eſt précaire, & dépend de l'exactitude des Tables: elle dépend auſſi de l'exactitude de la poſition de l'Étoile. Imaginons maintenant que relativement à un Obſervatoire déterminé, & en ſuppoſant à l'Étoile une certaine poſition pareillement déterminée, on ait calculé par de certaines Tables, l'heure que l'on comptoit dans cet Obſervatoire, à l'inſtant de la conjonction; ſoit de plus,

d (longitude de l'Étoile) l'erreur ſur la longitude de l'Étoile exprimée en ſecondes de degré.

d (longitude de la Lune) l'erreur ſur la longitude de la Lune, exprimée en ſecondes de degré.

Il eſt bien évident que pour cet Obſervatoire particulier, on aura

$$\text{Heure vraie de la conj.} = \text{Heure hypoth.} + \frac{3600''}{\text{mouv. hor. comp. ☾ ſuiv. } BC} \times d(\text{longit. de l'étoile}) - \frac{3600''}{\text{mouv. hor. comp. ☾ ſuiv. } BC}\, d(\text{longit. de la ☾}).$$

Donc

Différence en longitude entre cet Obſervatoire & le lieu qui comptoit véritablement l'heure hypothétique à l'inſtant de la conjonction

$$= \frac{3600''}{\text{mouv. hor. comp. ☾ ſuiv. } BC}\, d(\text{longitude de l'Étoile}) - \frac{3600''}{\text{mouv. hor. comp. ☾ ſuiv. } BC}\, d(\text{longitude de la Lune}).$$

Donc

Différence en longitude entre Foulpointe & l'Obſervatoire de Paris

$$= 3^h\, 9'\, 56'' + a + \frac{3600''}{\text{mouv. hor. comp. ☾ ſuiv. } BC}\, d(\text{longit. de la ☾}) - \frac{3600''}{\text{mouv. hor. comp. ☾ ſuiv. } BC}\, d(\text{longitude d'}\textit{Antarès})$$

$$= 3^h\, 9'\, 56'' + a + 1{,}680\, d(\text{longit. ☾}) - 1{,}680\, d(\text{longit. d'Antarès}),$$

puiſque

puisque d'ailleurs $\frac{3600''}{\text{mouv. hor. comp. ☾ suiv. } BC} = 1,680.$

(116.) Suivant les nouvelles Tables de M. Clairaut, qui m'ont servi à déterminer l'équation précédente, la longitude de la Lune étoit de $246^d\ 27'\ 44''$, le 10 Octobre 1763, à $2^h\ 28'\ 48''$ du soir, temps vrai au méridien de Paris. Suivant les nouvelles Tables de Mayer, la longitude de la Lune étoit au même instant, de $246^d\ 28'\ 1''$.

J'ai fait usage dans le calcul, de la position d'*Antarès*, telle qu'elle se trouve dans la Connoissance des Temps, en ayant égard à toutes les corrections relatives à la précession, la nutation & à l'aberration des Étoiles; & je n'ai aucun motif pour la suspecter: je supposerai donc d (longitude d'*Antarès*) $= 0$. Si donc l'on fait usage des nouvelles Tables de M. Clairaut, on aura de plus d (longit. ☾) $= 0$; & la différence en longitude entre Foulpointe & l'Observatoire de Paris, sera de $3^h\ 9'\ 56''$. Si l'on fait usage au contraire des nouvelles Tables de M. Mayer, on aura d(longitude de la ☾) $= + 17''$, & la différence en longitude entre Foulpointe & l'Observatoire de Paris, sera de $3^h\ 10'\ 24''$.

On voit par-là, que dans les deux cas, la longitude de Foulpointe est plus orientale de plus de trois quarts de degré que celle déterminée par M. de la Lande. Ma détermination est d'ailleurs entièrement conforme à l'opinion de M. le Gentil, fondée sur un très-grand nombre d'observations faites à Foulpointe & à l'Isle de France.

Sur les méthodes pour déterminer la distance absolue de la Lune à la Terre.

(117.) Ce seroit peut-être ici le lieu de donner les méthodes pour déterminer la distance de la Lune à la Terre, par des observations correspondantes de la Lune, faites dans des méridiens dont la position respective est connue. On sait que ce Problème astronomique a fait un des objets du voyage de M. l'Abbé de la Caille au cap de Bonne-espérance. Il entre donc dans le plan que je me suis proposé, de

résoudre cette question. La longueur de ce Mémoire m'oblige de remettre cette discussion à un autre temps. Au reste, il est aisé de sentir que les méthodes que j'ai données, résolvent ce Problème ; & que le travail que je pourrai faire, ne sera que les applications des formules, dans lesquelles je compare plusieurs observations, pour en déduire la parallaxe.

SECTION SECONDE.

Application de la méthode de la Section première, au cas général de la réduction des lieux observés de la Lune.

(118.) Je vais faire voir dans cette Section, que la méthode précédente peut être considérée comme le cas général de la réduction des lieux observés de la Lune. Quoique je me propose de résoudre le même Problème, par d'autres considérations plus analogues aux méthodes actuellement en usage en Astronomie, je n'ai pas cru devoir omettre celle qui se conclut le plus naturellement de mes principes. Dans tout ce que je vais dire, je supposerai bien connus le lieu apparent de la Lune dans le ciel, sa déclinaison apparente, son angle horaire, sa latitude, sa longitude ; toutes ces quantités doivent être dépouillées de la réfraction : je supposerai aussi bien connues l'heure vraie de l'observation & la latitude du lieu où l'on observe, & je me propose les trois questions suivantes.

Déterminer la différence entre la longitude observée & la longitude vraie, entre la latitude observée & la latitude vraie.

Déterminer la longitude du lieu où l'on a observé, en supposant d'ailleurs exacte la longitude de la Lune, tirée des Tables.

Déterminer l'erreur des Tables, soit en longitude, soit en latitude, en supposant connue la longitude du lieu où l'on a observé.

La solution de ces questions renferme évidemment tout ce que l'on peut dire sur ce sujet.

(119.) Puisque l'on connoît la position apparente de la Lune dans le ciel, c'est-à-dire, sa longitude & sa latitude apparentes, sa déclinaison & son angle horaire apparens, il est évident que s'il existoit une Étoile qui eût précisément la même position que la position apparente de la Lune, cette

Étoile éprouveroit une éclipse centrale à l'instant donné. Le Problème se réduit donc à déterminer les questions précédentes, au moyen de l'occultation centrale de l'Étoile dont il s'agit. Cette première considération fait voir que puisqu'il s'agit d'une Éclipse centrale, & par conséquent d'une plus grande phase, ce ne sont point les méthodes de mon *VIII.e Mémoire* qu'il faut employer, mais celles du *IX.e Mém.* Ces méthodes sont même plus simples que les méthodes générales de mon *IX.e Mémoire,* puisque dans le cas particulier que nous discutons, la distance apparente de la Lune & de l'Étoile occultée est nulle. Si donc l'on reprend les définitions de mon *IX.e Mémoire,* & que dans les différentes équations l'on suppose $\lambda = 0$, $\frac{\psi l}{\zeta} - R = 0$; on résoudra toutes les questions relatives à la réduction des lieux observés de la Lune. On remarquera seulement, conformément à ce qui a été dit dans la Section précédente, 1.° que par sinus (latit. de la Lune), on doit entendre le sinus de la différence de la latitude vraie & de la latitude apparente de la Lune. 2.° Que dans l'évaluation des différentes quantités, g est le sinus & h est le cosinus de l'angle horaire apparent de la Lune; p est le sinus & q est le cosinus de la déclinaison apparente; & qu'en un mot, il faut substituer par-tout la position apparente de la Lune à celle de l'Étoile. 3.° Que pour évaluer l'angle horaire apparent, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la formule du *§. 101*, puisque cet angle est donné immédiatement par l'observation. 4.° Que dans les formules de mon *IX.e Mémoire*, les angles Z, z se rapportent aux heures vraies, soit de la conjonction de la Lune avec le lieu apparent, vue du centre de la Terre, soit de l'observation. On pourra donc, au moyen des réflexions précédentes & des formules de mon *IX.e Mémoire (§. 31 & suivans),* déterminer la différence entre la latitude vraie correspondante à l'instant de la conjonction, & la latitude observée; le nombre b de secondes horaires écoulées entre l'instant de la conjonction de la Lune avec son lieu apparent, vue du centre de la Terre, & l'instant

Année 1771.

de l'obſervation; la longitude du lieu où l'on a obſervé; l'heure que l'on comptoit dans ce lieu à l'inſtant de la conjonction. On pourra même regarder ce premier réſultat comme purement hypothétique, & y appliquer les différentes corrections de mon *IX.ᵉ Mémoire*, en ſuppoſant des erreurs dans l'angle horaire apparent de la Lune, ſa déclinaiſon apparente, ſa parallaxe, la latitude du lieu, l'heure vraie de l'obſervation. En un mot, toutes les équations relatives aux plus courtes diſtances des centres, s'appliqueront aux queſtions dont il s'agit.

Année 1771.

(120.) On pourra également déterminer la relation entre le lieu vrai & le lieu apparent de la Lune. En effet, par les équations précédentes, on connoîtra le nombre b de ſecondes horaires écoulées depuis l'inſtant de la conjonction de la Lune avec le lieu apparent, vue du centre de la Terre, juſqu'à l'inſtant de l'obſervation; d'ailleurs, on connoît le mouvement horaire de la Lune, ſoit en longitude, ſoit en latitude, on aura donc,

Longitude vraie de la Lune à l'inſtant de l'obſervation =

Longitude apparente $+ \frac{b}{3600''}$ mouvement horaire de la ☾ en longit.

Latitude vraie de la Lune à l'inſtant de l'obſervation =

Latitude apparente $+ \mathrm{A} + \frac{b}{3600''}$ mouvem. hor. de la ☾ en latit.

Conformément à ce qui a été démontré dans le *§. 32* de mon *IX.ᵉ Mém.* j'apelle A un angle dont le ſinus égale $\frac{\zeta \pi R}{\downarrow r}$.

Année 1771.

On déterminera enfin l'erreur des Tables, en comparant la longitude & la latitude vraies de la Lune à l'inſtant de l'obſervation, avec la longitude & la latitude calculées pour le même inſtant.

(121.) Pour avoir une obſervation complète d'un lieu apparent de la Lune, c'eſt-à-dire, pour pouvoir faire uſage des méthodes précédentes, ce que l'on peut exiger de l'Obſervateur, eſt de connoître l'heure vraie de l'obſervation, la latitude du lieu où il obſerve, la hauteur vraie de la Lune

corrigée de la réfraction, & l'angle du vertical de la Lune avec le Méridien, que l'on appelle l'*azimuth de la Lune.* De ces données il ſaut conclure l'angle horaire apparent de la Lune, ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon apparentes. De plus, quelle que ſoit la méthode d'obſervation qu'on emploie; de l'angle horaire & de la déclinaiſon apparentes de la Lune, il ſaut conclure la latitude & la longitude apparentes. Quoiqu'il ſoit entièrement du reſſort de la Trigonométrie ſphérique, de déterminer ces relations, voici des formules dont on pourra faire uſage. J'en ai ſupprimé les démonſtrations qui m'écarteroient trop de mon objet.

Formules pour conclure la déclinaiſon & l'angle horaire apparens de la Lune, en ſuppoſant connus ſon azimuth & ſa hauteur ſur l'horizon.

$$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{diſtance apparente de la Lune au pôle élevé de l'Équateur})$$
$$= \frac{\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{compl. latit. du lieu} + \text{diſtance de la Lune au zénith}) \times \text{ſin.}\ B}{r},$$

l'angle B étant déterminé par l'expreſſion ſuivante,

$$\text{coſ.}\ B = \frac{\sqrt{[\text{ſin.}^2\ \tfrac{1}{2}\ (\text{azimuth de la} ☾) \times \text{coſ.}\ (\text{latit. du lieu}) \times \text{ſin.}\ (\text{diſt.}\ ☾\ \text{au zénith})]}}{\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{comp. latit. du lieu} + \text{diſtance de la Lune au zénith})}.$$

On a d'ailleurs

$$\text{ſin.}\ (\text{angle hor. appar. de la}\ ☾) \times \text{ſin.}\ (\text{diſt. appar.}\ ☾\ \text{au pôle élevé de l'Équat.})$$
$$= \text{ſin.}\ (\text{azimuth de la Lune}) \times \text{ſin.}\ (\text{diſtance de la Lune au zénith}).$$

Quant à l'aſcenſion droite apparente de la Lune, elle eſt égale à l'angle horaire du Soleil à l'inſtant de l'obſervation, plus l'aſcenſion droite du Soleil au même inſtant, moins l'angle horaire apparent de la Lune.

Formules pour conclure la latitude & la longitude d'un aſtre, en ſuppoſant connues ſa déclinaiſon & ſon aſcenſion droite; & réciproquement.

$$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{diſtance de l'aſtre au pôle boréal de l'Écliptique})$$
$$= \frac{\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{obliquité de l'Éclipt.} + \text{diſtance de l'aſtre au pôle boréal de l'Équat.})\ \text{ſin.}\ B}{r},$$

l'angle B étant déterminé par l'expreſſion ſuivante,

$$\text{coſ.}\, B = \frac{\sqrt{[\text{coſ.}^2 \tfrac{1}{2} (90^d + \text{aſcenſ. dr. de l'aſt.}) \times \text{ſin. (obl. de l'Écl.)} \times \text{coſin. (déclinaiſon de l'aſtre.)}]}}{\text{ſin.} \tfrac{1}{2} \text{(obliquité de l'Écliptique} + \text{diſtance de l'aſtre au pôle boréal de l'Équateur)}}$$

$$\text{ſin.} \tfrac{1}{2} \text{(diſtance de l'aſtre au pôle boréal de l'Équateur)}$$

$$= \frac{\text{ſin.} \tfrac{1}{2} \text{(obliquité de l'Éclipt.} + \text{diſt. de l'aſtre au pôle boréal de l'Éclipt.)}\ \text{ſin.}\, B}{r};$$

l'angle B étant déterminé par l'expreſſion ſuivante,

$$\text{coſ.}\, B = \frac{\sqrt{[\text{ſin}^2 \tfrac{1}{2} (90^d + \text{longitude de l'aſtre}) \times \text{ſin. (obliq. de l'Écliptiq.)} \times \text{coſin. (latitude de l'aſtre)}]}}{\text{ſin.} \tfrac{1}{2} \text{(obliquité de l'Écliptique} + \text{diſtance de l'aſtre au pôle boréal de l'Écliptique)}}.$$

D'ailleurs,

coſinus (latitude de l'aſtre) × coſinus (longitude de l'aſtre)
= coſinus (déclinaiſon de l'aſtre) × coſinus (aſcenſion droite de l'aſtre).

Au moyen de ces formules, l'on peut réſoudre tous les cas qui ſe préſenteront.

(122.) Lorſque l'on compare la Lune à un point du ciel dont la poſition n'eſt pas ſenſible, & qu'il faut conclure de l'heure de l'obſervation; une ſeconde d'erreur ſur l'heure préciſe de l'obſervation, donne quinze ſecondes d'erreur ſur l'aſcenſion droite, & environ la même erreur ſur la longitude du point correſpondant du premier mobile. On voit donc combien l'erreur de la pendule peut changer les réſultats. La longitude du Soleil influe auſſi ſur ce réſultat. En général, ſoit

d (heure de l'obſervation) le nombre de ſecondes horaires dont l'inſtant de l'obſervation étoit plus avancé qu'on ne l'a ſuppoſé.

d (longitude du Soleil) le nombre de ſecondes de degré dont le Soleil étoit plus avancé qu'on ne l'a ſuppoſé.

On aura

$$\text{long. appar. vraie.} = \text{long. appar. hyp.} + 15\, d\text{(heure obſ.)} + d(\text{long.} \odot).$$

Il ſuit de-là que ſi l'on compte les longitudes terreſtres, en partant du lieu indéterminé z', qui comptoit une certaine heure déterminée z à l'inſtant de la conjonction de la Lune vue du centre de la Terre, avec ſon lieu apparent, & que l'on ſuppoſe d'ailleurs exactes les déterminations tirées des Tables, la longitude de ce lieu z' ſera plus orientale dans le ſecond

cas que dans le premier, de la quantité

$$- \frac{54000''}{\text{mouv. hor. ☾ en long.}} d(\text{heure obf.}) - \frac{3600''}{\text{mouv. hor. ☾ en long.}} d(\text{longit. ☉}).$$

Si l'on compte au contraire les longitudes terrestres, en partant d'un lieu déterminé, la longitude du lieu où l'on aura obfervé, fera plus orientale, par rapport à ce premier lieu, de la même quantité que ci-deffus.

SECTION TROISIÈME.

APPLICATION des méthodes précédentes aux occultations fucceffives de plufieurs Étoiles voifines les unes des autres.

(123.) Il arrive quelquefois que plufieurs Étoiles voifines les unes des autres, font occultées par la Lune, dans un intervalle de temps affez court. Ce phénomène a lieu, par exemple, lorfque la Lune traverfe les *Pléiades.* Je vais développer en peu de mots, l'efpèce d'analyfe que l'on doit employer dans ces circonftances. Je fuppoferai d'abord que l'on connoiffe la pofition de ces Étoiles, foit refpectivement entr'elles, foit relativement à l'Écliptique & à l'Équateur.

Il eft évident que, relativement à chacune de ces Étoiles, on pourra faire des calculs femblables à ceux que l'on a développés dans la Section première du préfent Article. Comme d'ailleurs les phénomènes fe paffent dans un intervalle de temps affez court, il eft fenfible que pour calculer les conjonctions fucceffives de la Lune avec ces Étoiles, & les différences en latitude correfpondantes à ces inftans, on pourra fe contenter d'un feul calcul du lieu de la Lune & de fes mouvemens horaires, pour l'inftant moyen entre tous ces phénomènes. Afin de nous fixer, fuppofons que l'on ait obfervé les immerfions & les émerfions de trois de ces Étoiles. Pour chacune de ces Étoiles, on aura une équation de condition de la forme de celle du *§. 122* de mon *VIII.ᵉ Mémoire.* On aura de plus une expreffion générale de la différence en longitude

entre le lieu où l'on aura obſervé l'immerſion ou l'émerſion de chacune des Étoiles, & le lieu qui comptoit une certaine heure aſſignée à l'inſtant de la conjonction; on aura donc trois équations de condition, & trois équations entre la longitude du lieu où l'on a obſervé & celle du lieu hypothétique qui comptoit une certaine heure aſſignée à l'inſtant de la conjonction. Il paroîtroit donc au premier coup d'œil que l'on auroit ſix équations; mais comme les trois équations à la longitude du lieu où l'on a obſervé, comparées entr'elles, donneront eſſentiellement des réſultats identiques avec les équations de condition, on ne pourra faire uſage que des trois équations de condition, & d'une ſeule des équations à la longitude du lieu où l'on aura obſervé. On pourra donc, théoriquement parlant, déterminer trois des élémens de la Lune, par les trois équations de condition & l'heure que l'on comptoit à l'inſtant de la conjonction dans le lieu où l'on a obſervé, par le moyen de la quatrième équation. On pourra auſſi déterminer la longitude du lieu où l'on a obſervé, ſi l'on a d'ailleurs des obſervations faites dans un lieu différent.

Il faut convenir que toutes ces généralités ne ſont bonnes qu'en théorie. Comme le genre de phénomènes que l'on diſcute dans cette Section, tient lieu d'obſervations faites dans différens Obſervatoires, il en a les inconvéniens; il en a même de particuliers, qui dérivent de ce que les obſervations étant faites dans le même lieu & à des intervalles de temps peu éloignés, on ne peut s'en ſervir que comme d'obſervations faites dans des lieux voiſins les uns des autres. Je croirois donc que ce ſeroit s'abuſer ſi l'on vouloit déterminer par cette méthode, un plus grand nombre d'élémens de la Lune, que par une ſimple occultation d'Étoile. Le ſeul avantage que l'on puiſſe tirer de ce genre d'obſervations, eſt de ſe rectifier ou de ſe confirmer dans ſes réſultats.

Je ne donnerai point d'exemple de cette méthode; elle n'a rien qui doive embarraſſer dans la pratique; ce ne ſeroit qu'une répétition des calculs des paragraphes précédens, appliqués ſucceſſivement à pluſieurs Étoiles. Je n'ai pas inſiſté non plus ſur la démonſtration, que pour les équations dont il s'agit,

il s'agit, les inconnues sont les mêmes, quoique les élémens de la Lune puissent être un peu différens, lors des conjonctions successives de cet astre avec les différentes Étoiles. La raison en est simple; comme ces phénomènes se passent dans des temps peu éloignés entr'eux, les différences entre les véritables élémens & les élémens des Tables, sont les mêmes pour tous ces instans.

SECTION QUATRIÈME,

Dans laquelle on déduit des méthodes précédentes, les formules des Parallaxes.

(124). On peut être curieux de voir comment on déduit des méthodes précédentes, les formules des Parallaxes *. Rien n'est plus simple que le procédé. Parmi cette multitude d'Astres possibles que l'on peut choisir arbitrairement pour y comparer la Lune, il est sensible que si on la compare au point du Ciel auquel elle seroit rapportée par un Observateur placé au centre de la Terre, on aura les formules des Parallaxes. Il est également sensible, d'après ces réflexions, qu'attendu l'identité du lieu de la Lune, vu du centre de la Terre, & du point du Ciel auquel on la compare, la Lune est perpétuellement en conjonction sans latitude; on a donc $b = 0$, $l = 0$. D'ailleurs, puisque le mouvement relatif de la Lune n'est d'aucune considération, on peut supposer indifféremment que son orbite relative fait avec le méridien universel un angle quelconque. L'angle dont ω est le sinus & φ le cosinus, est donc arbitraire. De plus, le point du Ciel auquel on compare la Lune, étant à une distance infinie & ayant la même position que le lieu de la Lune vu du centre de la Terre, on a

$\pi' = 0.$
$\zeta = r.$
$\xi = r.$

* Ces méthodes ne sont pas précisément les méthodes ordinaires des Parallaxes, mais elles sont analogues.

p = ſin. } q = coſin. } déclinaiſon de la Lune, vue du centre de la Terre.

g = ſin. } h = coſin. } angle horaire de la Lune, vu du centre de la Terre.

Il eſt évident enfin que l'angle dont λ eſt la tangente, eſt l'expreſſion de la différence entre le lieu vu de la ſurface de la Terre, & le lieu vu du centre de notre globe. Soit donc

r le demi-petit axe de la Terre.

ρ le demi-grand axe.

s le ſinus } c le coſinus } de la latitude corrigée de l'Obſervateur.

p le ſinus } q le coſinus } de la déclinaiſon de la Lune, vue du centre de la Terre.

g le ſinus } h le coſinus } de l'angle horaire de la Lune, vu du centre de la Terre.

ω le ſinus } φ le coſinus } d'un angle arbitraire.

π le ſinus de la Parallaxe horizontale polaire de la Lune.

λ la tangente de la différence entre le lieu vu du centre de la Terre, & le lieu vu de la ſurface.

On a

$$\lambda = \frac{\pi\sqrt{\left[\left(-\frac{qs\varphi}{r^2}+\frac{cg\rho\omega}{r^3}+\frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}\right)^2+\left(-\frac{qs\omega}{r^2}-\frac{cg\rho\varphi}{r^3}+\frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}\right)^2\right]}}{r-\frac{ps\pi}{r^2}-\frac{c\rho qh\pi}{r^4}}.$$

(125.) Comme ω & φ ſont le ſinus & le coſinus d'un angle arbitraire, rien n'empêche de prendre la ſuppoſition qui rend la formule la plus ſimple. Cette ſuppoſition eſt évidemment celle de $\omega = 0$ & de $\varphi = r$; ſoit donc

$$A = -\frac{qs}{r}+\frac{ch\rho\rho}{r^3},\ B = -\frac{cg\rho}{r^2},$$

$$E = r-\frac{ps\pi}{r^2}-\frac{c\rho qh\pi}{r^4},\ \text{tang.}\,H = \frac{Ar}{B};$$

on aura $\lambda = \frac{\pi\sqrt{(A^2+B^2)}}{E} = \frac{Ar\pi}{E\ \text{ſin.}\,H}$.

Cette ſuppoſition répond à la méthode connue en Aſtronomie, ſous le nom de *Méthode des Angles parallactiques*.

On auroit tort de regarder cette ſimplification, comme une méthode particulière & abſolument différente de celle où l'on donneroit à ω & à φ toutes autres valeurs, celles, par exemple, qui conviennent à l'angle du cercle de latitude avec le cercle de déclinaiſon, paſſant par le centre de la Lune.

(126.) Si l'on jette les yeux ſur le *paragraphe 36* de mon *III.e Mémoire*, il ſera aiſé de ſe convaincre qu'en général l'angle H du paragraphe précédent, eſt l'angle que fait avec l'orbite relative de la Lune, la droite qui joint le centre apparent de la Lune & le point du Ciel auquel on le compare. Dans le *§. 125*, nous avons ſuppoſé cette orbite perpendiculaire au Méridien univerſel. Si donc l'on veut décompoſer la Parallaxe totale λ, dans des Parallaxes partielles, dont l'une ſoit parallèle, & l'autre ſoit perpendiculaire au Méridien univerſel, on aura pour expreſſion de la Parallaxe parallèle au Méridien univerſel, ou, ce qui revient au même, on aura pour expreſſion de la Parallaxe de déclinaiſon,

Année 1765.

$$\text{Tang. (Parallaxe de déclinaiſon)} = \lambda \frac{\text{ſin. } H}{r} = \frac{A\pi}{E}.$$

(127.) Quant à la Parallaxe d'aſcenſion droite, je remarque que la Parallaxe, relativement au plan perpendiculaire au cercle de déclinaiſon mené par la Lune, a pour expreſſion de ſa tangente

$$\lambda \frac{\text{coſin. } H}{r} = \frac{A\pi}{E} \times \frac{\text{coſin. } H}{\text{ſin. } H} = \frac{A\pi}{E} \times \frac{r}{\text{tang. } H}$$

$= \frac{A\pi}{E} \times \frac{B}{A} = \frac{B\pi}{E}$; cette tangente, pour la rapporter à un angle meſuré ſur l'Équateur, doit être multipliée, *(Trigon. ſphérique)*, par $\frac{r}{\text{coſinus (déclinaiſon de la Lune)}}$; donc

$$\text{tang. (Parallaxe d'aſcenſion droite)} = \frac{Br\pi}{qE}.$$

(128.) Soit donc α un angle dont la tangente égale $\frac{A\pi}{E}$,

β un angle dont la tangente égale $\frac{Br\pi}{qE}$,

on aura

Déclinaiſon apparente de la Lune $=$ déclinaiſon vraie de la Lune $+ \alpha$.

Diſtance apparente de la Lune au pôle boréal de l'Équateur $=$ diſtance vraie de la Lune au pôle boréal de l'Équateur $- \alpha$.

Angle horaire apparent de la Lune $=$ angle horaire vrai de la Lune $- \beta$.

Aſcenſ. droite appar. de la Lune $=$ aſcenſ. droite vraie de la Lune $+ \beta$.

Dans ces dernières équations, on donnera à α & à β le même ſigne qu'aux tangentes qui déterminent ces angles; on n'oubliera pas auſſi qu'une déclinaiſon auſtrale eſt négative.

(129.) Si l'on donnoit à φ & à ω les valeurs qui conviennent à l'angle du cercle de latitude avec le cercle de déclinaiſon paſſant le centre vrai de la Lune; que l'on eût ſuppoſé d'ailleurs

$$A = -\frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{chp\rho\varphi}{r^4},$$

$$B = -\frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{chp\rho\omega}{r^4},$$

& que dans le dénominateur de l'expreſſion de β l'on eût ſubſtitué coſinus (latitude de la Lune) à coſinus (déclin. de la ☾); on auroit les formules des Parallaxes en longitude & en latitude. On auroit pareillement les formules des Parallaxes pour tout autre cercle, en donnant à φ & à ω, les valeurs convenables.

(130.) Pour déterminer maintenant le point du Ciel où les Aſtres n'ont point de parallaxe, je reprends l'équation

$$\lambda = \frac{\pi\sqrt{\left[\left(-\frac{qs}{r} + \frac{chp\rho}{r^3}\right)^2 + \frac{c^2g^2\rho^2}{r^4}\right]}}{E}.$$ Dans

cette équation je fais $\lambda = 0$, & j'en tire $g = 0$; $h = \pm r$; $qsr \pm cp\rho = 0$. On voit donc d'abord que l'Aſtre doit être dans le Méridien; on voit enſuite que ſa déclinaiſon doit être telle que $\frac{pr}{q} = \pm \frac{sr}{c} \times \frac{r}{\rho}$; il faut donc que l'Aſtre réponde aux points que j'ai définis *(IIe Mém. §.20)*, Zénith & Nadir corrigés de l'Obſervateur. La Parallaxe

Année 1764.

nulle, ne répond donc pas au Zénith & au Nadir vrais, dans l'hypothèſe de la Terre elliptique.

(131.) Cette remarque donne lieu à la réflexion ſuivante. *Fig. 4.* Je ſuppoſe que par le lieu apparent L de la Lune, & par le Zénith vrai Z de l'Obſervateur, on faſſe paſſer un arc de grand cercle ZL. L'arc ZL dans l'hypothèſe de la Terre elliptique, ne pourra jamais être conſidéré comme le lieu géométrique des déclinaiſons & des latitudes de la Lune, dépouillées de toute Parallaxe. On feroit donc une ſuppoſition incohérente, ſi ayant corrigé la hauteur apparente de la Lune, de l'effet LL' de la Parallaxe, & ayant mené par le lieu corrigé L' de la Lune, & par le pôle P, l'arc PL', on prenoit pour côté PL' du nouveau triangle ZPL', la déclinaiſon vraie de la Lune. Cette déclinaiſon ne peut être employée que dans le triangle $Z'PL''$ terminé par l'arc de grand cercle $Z'L$, mené par le lieu apparent de la Lune & par le Zénith corrigé de l'Obſervateur. Cette remarque, dont je ferai uſage par la ſuite, m'a paru d'autant plus intéreſſante, que j'ai vu quelques perſonnes dans l'erreur à ce ſujet.

(132.) L'expreſſion de λ du *§. 130*, donne la valeur de la Parallaxe totale, toute entière dans le cercle paſſant par le centre de la Terre & par le Zénith corrigé de l'Obſervateur. Quelque ſimple que ſoit cette expreſſion, elle peut être réduite à une forme plus ſimple & plus analogue aux expreſſions en uſage parmi les Aſtronomes.

Si l'on ſe rappelle les conſtructions primitives de cet ouvrage, il ſera aiſé de ſe convaincre que, ſi de l'Obſervateur on abaiſſe une perpendiculaire ſur l'horizon abſolu, & que du point où cette perpendiculaire rencontre l'horizon abſolu, l'on mène une droite au centre de la Terre, la quantité $\sqrt{\left[\left(-\frac{qs}{r}+\frac{chp\rho}{r^3}\right)^2+\frac{c^2g^2\rho^2}{r^4}\right]}$, ſera l'expreſſion de cette droite, & $\frac{ps}{r}+\frac{c\rho qh}{r^3}$ exprimera la diſtance de l'Obſervateur à l'horizon abſolu. Soit donc R' le rayon de l'ellipſoïde paſſant par l'Obſervateur, rayon dont on trouvera l'expreſſion, pour chaque latitude, dans

Année 1764. mon *II.e Mémoire, §. 20,* on aura

$$R' : \sqrt{\left[\left(-\frac{qs}{r} + \frac{chp\rho}{r^3}\right)^2 + \frac{c^2g^2\rho^2}{r^4}\right]} :: r : \text{sin. (dist. vr. ☾ au Zén. corr. Obs.)}$$

$$R' : \frac{ps}{r} + \frac{c\rho qh}{r^3} :: r : \text{cos. (dist. vraie de la ☾ au Zénith corr. de l'Observateur)}$$

donc

$$\lambda = \frac{\pi R'}{r} \times \frac{\text{sin. (distance vraie de la Lune au Zénith corrigé de l'Observateur)}}{r - \frac{\pi R'}{r^2} \times \text{cos. (dist. vraie de la ☾ au Zénith corrigé de l'Observ.)}}.$$

Soit maintenant A l'angle qui a λ pour tangente; on aura
Distance apparente de la Lune au zénith corrigé de l'Observateur
= distance vraie de la Lune au Zénith corrigé de l'Observateur + A.

Nous remarquerons ici que $\frac{\pi R'}{r}$ est l'expression de la Parallaxe horizontale, relativement au parallèle sous lequel on a observé.

SECTION CINQUIÈME.

Application des méthodes précédentes au cas général de la réduction des lieux observés de la Lune.

(133.) Quoique j'aie donné *(Section seconde)* des méthodes pour réduire les lieux observés de la Lune à la surface de la Terre, aux lieux vus du centre de cette Planète, on ne sera pas fâché de voir comment les méthodes des Parallaxes résolvent le même Problème. On trouvera peut-être quelqu'avantage dans cette nouvelle méthode, du côté de la simplification des calculs. Je suppose, comme dans la *Section seconde,* l'observation dépouillée de la réfraction, & la position apparente de la Lune exactement déterminée.

(134.) Lorsque l'on veut réduire une position apparente de la Lune, au lieu vrai vu du centre de la Terre, ce n'est ni son angle horaire vrai, ni sa déclinaison vraie, ni sa distance vraie au Zénith corrigé de l'Observateur, qui sont connus, puisque ce sont au contraire ces quantités que l'on cherche à déterminer. Dans les formules de la Section

précédente, ce ſont les angles horaires, les déclinaiſons, les diſtances vraies qui entrent dans les expreſſions des Parallaxes; il faut donc faire quelque petit changement à ces formules, pour les employer dans le cas dont il s'agit. Rien n'eſt plus ſimple que le procédé.

(135.) On a vu (*ſ. 128*) que

Déclinaiſon apparente de la Lune = déclinaiſon vraie de la Lune + α.

Diſtance apparente de la Lune au pôle boréal de l'Équateur = diſtance vraie de la Lune au pôle boréal de l'Équateur — α.

Angle horaire apparent de la ☾ = angle horaire vrai de la Lune — β.

Aſcenſion droite appar. de la ☾ = aſcenſion droite vraie de la ☾ + β.

α & β étant des quantités déterminées par les formules du *ſ. 128.*

Donc,

Déclinaiſon vraie de la Lune = déclinaiſon apparente de la Lune — α.

Diſtance vraie de la Lune au pôle boréal de l'Équateur = diſtance apparente + α.

Angle horaire vrai de la ☾ = angle horaire apparent de la ☾ + β.

Aſcenſion droite vraie de la ☾ = aſcenſion droite appar. de la ☾ — β.

Dans les formules du *ſ. 128*, α & β ſont évalués, en ſuppoſant que l'on faſſe uſage de la déclinaiſon vraie & de l'angle horaire vrai de la Lune. Comme dans le cas dont il s'agit, ces quantités ſont inconnues, il eſt évident que ſi l'on ſubſtitue dans les formules, la déclinaiſon & l'angle horaire apparens de la Lune, on n'aura pas les véritables valeurs de α & de β, mais des quantités α' & β' qui ſeront un peu différentes.

On fera donc un premier calcul, dans lequel on emploiera la déclinaiſon & l'angle horaire apparens de la Lune, & l'on aura les quantités α' & β'. On fera enſuite un ſecond calcul, lors duquel on ſubſtituera dans les formules, la diſtance apparente de la Lune au pôle boréal de l'Équateur + α', la déclinaiſon apparente — α', l'angle horaire apparent + β', & l'on concluera les véritables quantités α & β qu'il faudra ſubſtituer dans les équations du préſent paragraphe. On

pourroit même ne regarder ces dernières valeurs de α & de β que comme approchées, & chercher encore des valeurs plus exactes; mais cette exactitude seroit superflue. Lors du second calcul on peut employer la quantité *E* dont on aura fait usage lors du premier calcul, par les raisons détaillées dans mon *VIIIe Mémoire, §. 50.*

Année 1770.

(136.) Si l'on vouloit déterminer la distance vraie de la Lune au Zénith corrigé de l'Observateur, on auroit *(§. 132)*,

Distance vraie de la Lune au Zénith corrigé de l'Observateur
= distance apparente de la ☾ au Zénith corrigé de l'Observateur — Λ.

On évaluera donc une première quantité Λ′, en substituant dans l'expression de λ du *§. 132,* la distance apparente de la Lune; on fera ensuite un second calcul, lors duquel on substituera dans l'expression de λ, la distance apparente de la Lune — Λ′, & l'on aura la véritable quantité Λ, qu'il faudra substituer dans l'équation du présent paragraphe.

(137.) On a maintenant la relation entre l'ascension droite vraie de la Lune, & son ascension apparente; son angle horaire vrai, & son angle horaire apparent; sa distance vraie, & sa distance apparente au pôle de l'Équateur; sa déclinaison vraie, & sa déclinaison apparente. On n'auroit donc rien à desirer si les Tables astronomiques donnoient directement la déclinaison & l'ascension droite de la Lune, ou du moins, si ces quantités se trouvoient calculées d'avance dans quelques Éphémérides. Au défaut de ces calculs, il faudra conclure des élémens précédens, la longitude & la latitude vraies de la Lune, par les formules du *§. 121.* Alors, si l'on connoît la différence en longitude entre le lieu où l'on a observé, & celui pour lequel les Tables sont calculées, & que l'on compare les lieux calculés de la Lune avec les lieux observés, on déterminera l'erreur des Tables. Si, au contraire, on suppose les Tables exactes, & que la longitude du lieu où l'on observe soit inconnue, on déterminera cette longitude, en comparant l'heure de l'observation, avec l'heure que l'on compte dans le lieu

pour

pour lequel les Tables ſont calculées, à l'inſtant où la Lune a la longitude obſervée.

Remarque ſur le cas où l'obſervation eſt incomplète.

(138.) Il arrive quelquefois que l'obſervation eſt incomplète, lorſque l'on n'a obſervé, par exemple, que la hauteur apparente de la Lune, ſans obſerver ſon azimuth. Comme alors le Problème eſt indéterminé, on eſt obligé d'emprunter des Tables, la déclinaiſon de cet aſtre. Il peut arriver que l'on préfère cette méthode, ſur-tout ſi l'on a obſervé la hauteur méridienne de la Lune, & que l'on puiſſe ſe flatter de corriger la déclinaiſon des Tables, d'après cette obſervation. Il n'eſt pas même néceſſaire que la hauteur méridienne de la Lune ait été obſervée dans le lieu dont il s'agit, il ſuffit que par une obſervation quelconque on puiſſe connoître l'erreur des Tables en déclinaiſon. Quoi qu'il en ſoit, je ſuppoſe que l'on emprunte des Tables, ou d'une autre obſervation quelconque, la déclinaiſon de la Lune, & je vais preſcrire ce que l'on doit faire dans ce cas.

Soit L le lieu apparent de la Lune, Z le Zénith vrai de l'obſervateur, P le pôle boréal de l'Équateur. La méthode qui ſe préſente d'abord, eſt de corriger la hauteur apparente de la Lune, de l'effet de la Parallaxe, c'eſt-à-dire, de reporter la Lune de L en L', & dans le triangle ZPL', de prendre le côté PL' égal à la diſtance de la Lune au pôle boréal de l'Équateur, que l'on croit devoir employer. Mais il eſt aiſé de ſe convaincre, par les remarques du *§. 131*, que cette méthode eſt fautive. Au lieu donc de corriger la hauteur de la Lune de l'effet de la Parallaxe, il faut employer cet élément tel qu'il a été obſervé; mais avant de faire uſage de la diſtance de la Lune au pôle boréal de l'Équateur, il faut affecter cette diſtance de la Parallaxe. On calculera donc, d'après les Tables aſtronomiques, l'angle horaire de la Lune à l'inſtant de l'obſervation; & comme l'angle horaire calculé ne peut guère différer de plus d'une minute de l'angle horaire vrai, on aura *(§. 126 & 128)*, tous les élémens néceſſaires

Fig. 4.

pour affecter de la Parallaxe, la distance vraie de la Lune au pôle de l'Équateur. Maintenant, dans le triangle ZPL, dont on connoîtra les trois côtés, on calculera l'angle horaire apparent de la Lune, par le moyen de la formule suivante,

Fig. 4.

$$\text{cosin. } \tfrac{1}{2} \text{ angle horaire apparent} = \frac{r \times \sqrt{\left(\text{cos. }\left(90^d - \frac{\text{dist. app. ☾ au pôle bor. de l'Éq.} + \text{dist. zénith au pôle bor. de l'Éq.} + \text{dist. app. ☾ au zénith}}{2}\right) \times \text{cos. }\left(90^d - \frac{\text{dist. app. ☾ au pôle bor. de l'Éq.} + \text{dist. zénith au pôle bor. de l'Éq.} - \text{dist. app. ☾ au zénith}}{2}\right)\right)}}{\sqrt{[\text{sin. (distance apparente de la Lune au pôle boréal de l'Equateur)} \times \text{sin. (dist. du zénith au pôle boréal de l'Equateur)}]}}$$

Application de la méthode précédente, à la détermination de la longitude de la baie d'Antongil, dans l'île de Madagascar, d'après les observations faites par M. le Gentil, en Novembre 1762.

(139.) Pour donner un exemple de la théorie précédente, je vais l'appliquer à la détermination de la longitude de la baie d'Antongil, dans l'île de Madagascar, d'après les observations faites dans ce lieu par M. le Gentil. Voici comment elles sont rapportées par cet Astronome.

« Le 20 Novembre 1762, à $4^h\ 3'\ 24''$ temps vrai, j'ai » observé la hauteur méridienne du bord inférieur de la Lune, » de $78^d\ 37'\ 57''$. L'erreur de mon quart-de-cercle est de » $1'\ 9''$, qu'il faut soustraire en général de toutes les hauteurs » observées; & la réfraction est de $10''$ pour cette hauteur » particulière. Je n'ai point prétendu observer la Lune au » Méridien, pour en déduire exactement son ascension droite. » Comme je n'avois qu'un quart-de-cercle mobile, que j'étois » obligé de déranger continuellement, il m'eût été impossible » de le placer avec assez d'exactitude dans le plan du Méridien, » pour pouvoir répondre de l'instant précis du passage. Je n'ai » eu en vue que d'avoir la déclinaison de la Lune plus exac- » tement que par les Tables astronomiques. Le même jour » 20 Novembre, à $1^h\ 42'\ 56''$ temps vrai, par un milieu » entre plusieurs observations voisines & très-précises, j'ai

observé la hauteur du bord supérieur de la Lune, de 56ᵈ 10′. «
La réfraction est de 30″ pour cette hauteur. J'ai fait usage des «
Tables de réfraction de M. Bouguer, pour la Zone torride. «

Le 21 Novembre 1762, à $4^h 53' 48''$ temps vrai, j'ai observé «
la hauteur méridienne du bord inférieur de la Lune, de 81^d «
$27' 33''$; la réfraction est de $9''$ pour cette hauteur. Cette «
observation ne doit servir qu'à corriger la déclinaison des «
Tables. Le même jour 21 Novembre, à $2^h 16' 47''$ temps «
vrai, j'ai observé la hauteur du bord supérieur de la Lune, «
de 53 degrés; l'erreur de mon quart-de-cercle est toujours «
de $1' 9''$, qu'il faut soustraire des hauteurs observées; & la «
réfraction particulière est de 33 secondes pour cette hauteur, «
en employant les Tables de M. Bouguer. «

D'après des hauteurs observées du Soleil & de *Fomalhaut*, «
qui toutes s'accordent à donner la même latitude à 7 ou «
8 minutes près, la latitude de la baie d'Antongil est de 15^d
$27' 23''$ australe ».

Calcul des Observations du 20 Novembre 1762.

(140.) Si l'on suppose la baie d'Antongil plus orientale que Paris d'environ $3^h 10' 24''$ de temps (il n'est pas nécessaire que cette supposition soit de la dernière exactitude), on aura, d'après les nouvelles Tables de M. Clairaut,

Élémens pour l'instant du passage de la Lune par le Méridien d'Antongil.

Obliquité de l'Écliptique	23^d	$28'$	$20''$
Longitude de la Lune	294.	9.	10
Latitude de la Lune	5.	10.	26 Aust.
Distance de la Lune au pôle boréal de l'Écliptique	95.	10.	26
Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.			
Parallaxe horizontale pour le parallèle de Paris	0.	55.	14
Parallaxe horizontale pôlaire	0.	55.	7
Demi-diamètre horizontal de la Lune	0.	15.	5
Distance de la Lune au pôle boréal de l'Équateur	116.	24.	8

Puisque le demi-diamètre horizontal de la Lune étoit de

15′ 5″, & sa hauteur sur l'horizon d'environ 79 degrés; le demi-diamètre apparent de la Lune à l'instant de l'observation étoit de 15′ 19″; si donc l'on ajoute 15′ 19″, & que l'on soustraie 1′ 19″ pour corriger l'erreur du quart-de-cercle & de la réfraction, on aura 78^d 51′ 57″, pour la hauteur du centre apparent de la Lune affectée de la Parallaxe. La latitude de la baie d'Antongil est de 15^d 27′ 23″ australe; c'est la distance du point culminant de l'Équateur, au Zénith de ce lieu; la hauteur méridienne apparente du centre de la Lune étoit de 78^d 51′ 57″; le Zénith étant alors entre la Lune & le point culminant de l'Équateur. Donc, la déclinaison apparente de la Lune étoit de 26^d 35′ 26″ australe, & sa distance apparente au pôle boréal de l'Équateur, de 116^d 35′ 26″. Maintenant, si l'on applique le calcul à la formule du *§. 135*, on aura

$$a' = -10' 59'', \qquad a = -10' 49''.$$

Distance vraie ☾ au pôle boréal de l'Équateur = 116^d 24′ 37″.

L'erreur de la supposition étoit donc de 29 secondes, dont la distance vraie de la Lune au pôle boréal de l'Équateur surpassoit la distance calculée. Nous supposerons que la même erreur avoit lieu pour l'observation de 1^h 42′ 56″.

Elémens pour l'instant de l'Observation de 1^h 42′ 56″ temps vrai, dans la baie d'Antongil.

Obliquité de l'Écliptique	23^d	28′	20″
Longitude de la Lune	292.	56.	58
Latitude de la Lune	5.	9.	40 Aust.
Distance de la Lune au pôle boréal de l'Écliptique	95.	9.	40
Rapport des axes de la Terre, comme 229 à 230.			
Parall. horiz. de la Lune pour le parall. de Paris.	0.	55.	17
Parallaxe horizontale polaire de la Lune	0.	55.	10
Demi-diamètre horizontal de la Lune	0.	15.	7
Distance de la Lune au pôle boréal de l'Équateur.	116.	36.	14
La même distance corrigée des 29″ ci-dessus	116.	36.	43
Longitude du Soleil	238.	8.	28
Ascension droite du Soleil	235.	52.	55
Ascension droite de la Lune, conclue des Tables	295.	44.	39
Angle horaire de la Lune, conclu des Tables	325.	52.	16

Puisque le demi-diamètre horizontal de la Lune étoit de

15′ 7″, & ſa hauteur apparente ſur l'horizon d'environ 56 degrés, le demi-diamètre apparent de la Lune à l'inſtant de l'obſervation étoit de 15′ 19″. Si donc de 56^d 10′, l'on ſouſtrait 15′ 19″ d'une part, & 1′ 39″, pour tenir lieu de l'erreur du quart-de-cercle & de la réfraction, on aura 55^d 53′ 2″ pour la hauteur du centre apparent de la Lune affectée de la Parallaxe. Maintenant, conformément à ce qui eſt preſcrit *(§. 138)*, j'affecte de la Parallaxe, la diſtance vraie de la Lune au pôle boréal de l'Équateur, & j'ai

Diſtance apparente de la Lune au pôle boréal de l'Équateur
$= 116^d\ 36'\ 43'' + 6'\ 49'' = 116^d\ 43'\ 32''$.

Donc *(§. 138)*

Angle horaire apparent de la Lune . . $= 325^d\ 19'\ 58''$
Aſcenſion droite apparente de la Lune $= 296.\ 16.\ 57.$

Voilà donc le Problème ramené au cas général.

Maintenant, ſi par les formules du *§. 135* l'on dépouille les quantités précédentes de l'effet de la Parallaxe, on aura

Diſtance vraie de la ☾ au pôle boréal de l'Équat. $= 116^d\ 36'\ 43''$.
Angle horaire vrai de la Lune . . . . $= 325.\ 53.\ 56.$
Aſcenſion droite vraie de la Lune . . . . $= 295.\ 43.\ 0.$

De ces quantités l'on conclut, par les formules du *§. 121*,

Diſtance vraie de la ☾ au pôle boréal de l'Éclipt. $= 95^d\ 9'\ 26''$.
Longitude vraie de la Lune . . . . $= 292.\ 55.\ 30.$

Si l'on cherche, d'après les nouvelles Tables de M. Clairaut, quelle heure on comptoit à Paris lorſque la Lune avoit la longitude précédente, on trouvera 10^h 29′ 41″. La différence en longitude entre la baie d'Antongil & l'Obſervatoire de Paris, eſt donc de 3^h 13′ 15″, ſauf les erreurs des Tables & des obſervations.

Nous ſommes partis dans cette recherche, de l'hypothèſe qu'à l'inſtant du midi vrai au Méridien de Paris le 20 Novembre 1762, la longitude de la Lune étoit de 293^d 41′ 55″, & celle du Soleil de 238^d 12′ 9″; le mouvement horaire de la Lune en longitude étant d'ailleurs de 30′ 51″, & celui du Soleil, de 2′ 31″. Pour avoir égard à l'incertitude des réſultats, nous donnerons à l'expreſſion de la différence en

longitude entre la baie d'Antongil & Paris, la forme ſuivante :

Expreſſion la plus générale de la différence en longitude entre la baie d'Antongil & Paris.

Longitude de la baie d'Antongil — longitude de Paris = $3^h\ 13'\ 15''$
+ 1,945 *d*(longitude de la ☾) — 1,945 *d*(longit. ☉)
— 28,175 *d*(heure de l'obſervation).

Il faut entendre par

d(longitude de la Lune) le nombre de ſecondes de degré dont la Lune, à l'inſtant du midi vrai à Paris, étoit plus avancée qu'on ne l'a ſuppoſé dans les calculs.

d (longitude du Soleil) le nombre de ſecondes de degré dont le Soleil, à l'inſtant du midi vrai à Paris, étoit plus avancé qu'on ne l'a ſuppoſé.

d (heure de l'obſervation) le nombre de ſecondes horaires dont l'inſtant de l'obſervation étoit plus avancé qu'on ne l'a ſuppoſé.

Calcul des Obſervations du 21 Novembre 1762.

Les obſervations du 21 Novembre 1762, donnent

Longitude de la baie d'Antongil = $3^h\ 11'\ 11''$
+ 1,982 *d*(longitude de la ☾) — 1,982 *d*(longit. ☉)
— 28,730 *d*(heure de l'obſervation).

Ces calculs ſuppoſent qu'à l'inſtant du midi vrai à Paris, le 21 Novembre 1762, la longitude du Soleil étoit de $239^d\ 12'\ 51''$, & la longitude de la Lune, de $305^d\ 55'\ 39''$. Ces réſultats ſont fondés ſur l'analyſe ſuivante.

(141.) Soit A' le lieu où l'on a obſervé une certaine longitude A'' de la Lune, lorſque l'on comptoit dans ce lieu une certaine heure A. Soit B' le lieu relativement auquel on a calculé une longitude B'' de la Lune, que l'on a cru correſpondante à une heure B déterminée. Il eſt évident que ſi l'on s'eſt trompé ſur l'heure préciſe que l'on comptoit dans le lieu A' à l'inſtant de l'obſervation, & ſur la longitude du Soleil qui a ſervi à déterminer celle de la Lune, on aura, *§. 122,* pour expreſſion de la longitude de la Lune, correſpondante

à l'heure de l'obſervation, $A'' + 15\ d$(heure de l'obſervation) $+\ d$(longitude du Soleil); & l'heure vraie de l'obſervation aura pour expreſſion $A + d$(heure de l'obſerv.). Par la même raiſon, relativement au lieu B', la longitude de la Lune, correſpondante à l'heure B, ſera égale à $B'' + d$(longit. ☾). Maintenant ſi l'on nomme Y la différence en longitude des lieux A' & B', exprimée en temps, il eſt évident que Y ſera égal à la différence des heures, moins le temps que la Lune, en vertu de ſon mouvement horaire en longitude, a employé à parcourir la différence des longitudes correſpondantes aux heures $A + d$(heure de l'obſerv.) & B; on aura donc

$$Y = A - B + \frac{3600''}{\text{mouvement horaire de la Lune en longitude}}$$
$$\times \left(B'' - A'' + d(\text{longit. de la ☾}) - d(\text{longit. du Soleil})\right)$$
$$+ \left(1 - \frac{15 \times 3600''}{\text{mouv. hor. de la ☾ en longit.}}\right) d(\text{heure de l'obſervation}).$$

(142.) Si l'on prend le milieu entre les deux déterminations du *ſ. 140*, on aura $3^h\ 12'\ 13''$ pour différence en longitude entre la baie d'Antongil & Paris. Nous avons trouvé précédemment $3^h\ 10'\ 12''$ pour la longitude de Foulpointe. Antongil eſt donc plus oriental que Foulpointe, d'environ deux minutes d'heure. Ce réſultat eſt conforme à ce que l'on ſait d'ailleurs ſur la longitude reſpective de ces deux lieux; & les déterminations de Foulpointe & de la baie d'Antongil, ſe confirment auſſi parfaitement qu'on peut l'attendre d'obſervations délicates comparées aux ſeules Tables aſtronomiques. Au reſte, comme dans les équations, les lieux de la Lune & du Soleil, & les heures des obſervations ſont indéterminées, on pourra toujours corriger les réſultats, ſi l'on venoit à s'apercevoir par la ſuite, de quelques erreurs dans ces déterminations. La forme des équations démontre auſſi combien la méthode précédente, connue en Aſtronomie ſous le nom de *méthode des angles horaires*, exige de préciſion, ſur-tout dans la détermination exacte de l'heure vraie de l'obſervation. Cet inconvénient a toujours lieu, lorſque l'on compare la Lune à un point du Ciel, dont la

poſition n'eſt pas ſenſible & qu'il faut conclure de l'heure de l'obſervation; dans tous ces cas une ſeconde d'erreur ſur l'heure, donne quinze ſecondes d'erreur ſur la poſition du point correſpondant du premier mobile.

(143.) Dans les équations précédentes on peut remarquer que l'heure que l'on emploie dans le calcul, influe beaucoup ſur la longitude; on peut donc demander combien, indépendamment de l'erreur de la pendule, la hauteur obſervée & le demi-diamètre de la Lune, influent ſur la longitude. En général il eſt aiſé de démontrer que ſi l'on conſerve la définition de d (heure de l'obſervation) du §. *140*, on a l'équation ſuivante

$$d(\text{heure de l'obſervation}) = -\frac{r^3 \times \text{coſ. (haut. de la ☾)}\, d(\text{haut. de la ☾})}{15 \times c\varrho q g};$$

mais

$$d(\text{haut. de la ☾}) = \left\{\begin{matrix} d(\text{haut. du limbe ſup. de la ☾}) - d(\text{demi-diam. de la ☾}) \\ d(\text{haut. du limbe inf. de la ☾}) + d(\text{demi-diam. de la ☾}) \end{matrix}\right\}$$

donc

$$d(\text{heure de l'obſervation}) = -\frac{r^3 \text{ coſinus (hauteur de la Lune)}}{15 \times c\varrho q g}$$
$$\times \left\{\begin{matrix} d(\text{haut. du limbe ſupér. de la Lune}) - d(\text{demi-diam. de la Lune}) \\ d(\text{haut. du limbe infér. de la Lune}) + d(\text{demi-diam. de la Lune}) \end{matrix}\right\}$$

On avoit pour les obſervations du 20 & du 21 Novembre 1762,

$$d(\text{heure de l'obſerv.}) = +\ 0{,}072\ d(\text{haut. limbe ſupér. de la ☾})$$
$$-\ 0{,}072\ d(\text{demi-diamètre de la Lune}).$$

On pourra donc ajouter aux équations du §. *140*, les termes ſuivans

$$-\ 2{,}117\ d(\text{haut. du limbe ſupér. ☾}) + 2{,}117\ d(\text{demi-diam. ☾}).$$

En général, on aura égard à toutes les inexactitudes des obſervations, en combinant avec l'équation du §. *141*, le réſultat de l'équation r^3 ſin. (haut. ☾) $- c\varrho q h - p s r^2 = 0$, différentiée relativement à toutes les quantités qui la compoſent.

SECTION

SECTION SIXIÈME,

Dans laquelle on déduit des formules générales, les méthodes pour réduire les distances apparentes de la Lune à un Astre, aux distances vues du centre de la Terre.

(144.) On sait que les observations des distances de la Lune aux Étoiles & au Soleil, sont préférables à tout autre procédé astronomique, pour déterminer les longitudes en mer. Je dois donc faire voir comment on peut conclure de mes formules générales, les méthodes pour réduire ces distances.

Le Problème présenté sous une forme un peu différente, peut être résolu par les méthodes des *Sections II & V* du présent Article. En effet, puisque par la nature de la question on connoît la hauteur apparente de la Lune, la distance apparente de la Lune & de l'Astre auquel on la compare, ainsi que la hauteur apparente de l'Astre, on aura l'angle au Zénith formé par les deux verticaux menés par la Lune & par l'Astre. Si donc l'on corrige la hauteur apparente de la Lune, de l'effet de la réfraction; la hauteur de l'Astre, de l'effet de la réfraction & de la Parallaxe, (l'effet de la Parallaxe est nulle pour les Étoiles) & que l'on mène des cercles de déclinaison par ces lieux corrigés, & par le pôle du Vaisseau dont on connoît la latitude, on aura la position apparente de la Lune dans le Ciel *. D'ailleurs, on connoît l'heure vraie du Vaisseau; on déterminera donc (*Section II & V*) la longitude du lieu où l'on aura observé cette position apparente de la Lune, en supposant exacte

Fig. 5.

* Dans le triangle LZE dont on connoît les trois côtés, on calculera l'angle LZE. Dans le triangle EZP, dont on corrigera le côté EZ de l'effet de la réfraction & de la parallaxe, & dont on connoît les trois côtés, on calculera l'angle EZP, & l'on conclura l'angle LZP. Dans le triangle LZP dont on corrigera le côté ZL de l'effet de la réfraction, & dont on connoît les deux côtés ZP, ZL & l'angle compris LZP, on calculera le côté PL distance apparente de la Lune au pôle, & l'angle P son angle horaire apparent; on sera donc dans le cas discuté ci-dessus.

toutefois la longitude de la Lune tirée des Tables.

Je n'insisterai point sur cette solution, qui dispense à la vérité d'avoir recours aux distances de la Lune aux Étoiles, calculées dans le *Nautical Almanach*, mais qui par-là même engage dans des calculs beaucoup plus longs. Cet usage & plusieurs autres que l'on pourroit également faire des lieux calculés de la Lune, me fait regretter que ces lieux ne se trouvent pas calculés de six heures en six heures, dans l'Ouvrage que je viens de citer. Cette addition, sans augmenter la peine des Calculateurs (puisqu'ils n'ont pu se dispenser de ce travail) rendroit l'Ouvrage plus complet. Indépendamment du lieu de la Lune, de sa latitude, de sa longitude, de sa parallaxe; je desirerois aussi que l'on y trouvât ses mouvemens horaires pour les mêmes instans. Il seroit peut-être encore plus à desirer qu'on y insérât les ascensions droites & les déclinaisons de la Lune, avec les mouvemens horaires en ascension droite & en déclinaison. Cette addition vraiment utile, mettroit les Astronomes à portée de vérifier les Tables de la Lune, en les comparant avec la plus grande facilité aux lieux observés.

(145.) Pour rendre la solution du Problème dont il s'agit, la plus simple possible, & corriger par un seul calcul l'effet de la parallaxe & de la réfraction, je me contenterai de résoudre le Problème dans l'hypothèse de la Terre sphérique. Il pourroit également se résoudre dans l'hypothèse de la Terre elliptique, mais les calculs seroient infiniment plus compliqués. D'ailleurs, la méthode du *§. 144* le résout dans une hypothèse quelconque d'ellipticité de la Terre. De plus, je ne me propose que de parvenir à des résultats analogues à ceux que l'on a trouvés.

Fig. 6. Par le centre T de la Terre, je mène le plan $ATOO'A'$, parallèle à l'horizon de l'Observateur. Par le même point T je mène perpendiculairement à ce plan, la droite TZ qui représente le rayon de la Terre passant par l'Observateur, & qui répond au Zénith de l'Observateur. Par le lieu Z de l'Observateur je mène le plan $A''ZO''$, qui représente son

horizon. Par le lieu L de la Lune à l'instant de l'observation, je mène perpendiculairement aux plans $ATOO'A', A''ZO''$, le plan de projection $LA''A'O'O''$. Du lieu L je mène au centre T de la Terre la droite LT. De l'Observateur Z je mène au plan de projection la droite ZL' parallèle à la droite LT. Du centre T de la Terre je mène pareillement à l'Astre auquel on compare la Lune, la droite TS qui rencontre le plan de projection en un point S; & de l'Observateur Z je mène la droite ZS', parallèle à TS.

Fig. 6.

Il est évident, d'après cette construction, que l'angle LTS, ou son égal $L'ZS'$ est celui qu'il s'agit de déterminer. Si l'on suppose maintenant qu'un rayon LKZ émané de la Lune L, parvienne à l'Observateur Z, après avoir souffert une réfraction au point K, il est clair que l'Observateur rapportera la Lune au point L'' du plan de projection, dans le prolongement de la droite ZK. Par la même raison, l'Observateur rapportera l'Astre S au point S'', prolongement du rayon réfracté en K', & l'angle $L''ZS''$ sera la distance observée de la Lune & de l'Astre; distance d'où il faut conclure l'angle $L'ZS'$. Comme la position du plan de projection est encore arbitraire, puisqu'il n'est assujetti qu'à être perpendiculaire aux plans $ATOO'A'$, $A''ZO''$, pour simplifier les calculs je la suppose telle que $TA' = TO'$; & je prends $TA' = TO' = ZA'' = ZO''$ pour rayon du cercle auquel je rapporterai les calculs. Je mène enfin les droites $L''M''$, $L'M'$ parallèlement aux droites $A'O'$, $A''O''$.

(146.) Dans le triangle $L''ZS''$ on a *(Trigon. rectiligne)*
$$r(ZS''^2 + ZL''^2 - L''S''^2) - 2ZS'' \times ZL'' \times \text{cos}.\, L''ZS'' = 0.$$

Par la même raison, dans les triangles $L'ZS'$, $A''ZO''$; on a

$$\text{cosin.}\ L'ZS' = \frac{r(ZS'^2 + ZL'^2 - L'S'^2)}{2 \times ZS' \times ZL'},$$
$$\text{cosin.}\ A''ZO'' = \frac{r(ZA''^2 + ZO''^2 - A''O''^2)}{2 \times ZA'' \times ZO''};$$

Fig. 6. mais

$$L'S'^2 = L''S''^2 - (O''S'' - A''L'')^2 + (O''S' - A''L')^2,$$
$$A''O''^2 = L''S''^2 - (O''S'' - A''L'')^2.$$

Donc,

$$\text{cos}. L'ZS' = \frac{r[ZS'^2 + ZL'^2 - ZS''^2 - ZL''^2 + (O''S'' - A''L'')^2 - (O''S' - A''L')^2] + 2ZS'' \times ZL'' \times \text{cos}. L''ZS''}{2 \times ZS' \times ZL'}$$
$$= \frac{r(O''S' \times A''L' - O''S'' \times A''L'') + ZS'' \times ZL'' \text{ cos}. L''ZS''}{ZS' \times ZL'}.$$

D'ailleurs,

$$\text{cos}. (A''ZO'') = \frac{r[ZA''^2 + ZO''^2 - ZS''^2 - ZL''^2 + (O''S'' - A''L'')^2] + 2ZS'' \times ZL'' \times \text{cos}. L''ZS''}{2 \times ZA'' \times ZO''}$$
$$= -\frac{r \times O''S'' \times A''L'' - ZS'' \times ZL'' \times \text{cos}. L''ZS''}{ZA'' \times ZO''}.$$

Donc,

$$\text{cos}. L'ZS' = \frac{r \times O''S' \times A''L' + ZA'' \times ZO'' \times \text{cos}. (A''ZO'')}{ZS' \times ZL'}.$$

(147.) Il est évident, d'après les constructions précédentes, que

$$ZS' = \frac{r \times ZO''}{\text{cos. (haut. vr. de l'astre)}}; \quad ZS'' = \frac{r \times ZO''}{\text{cos. (haut. appar. astre)}};$$
$$ZL' = \frac{r \times ZA''}{\text{cos. (haut. vraie de la ☾)}}; \quad ZL'' = \frac{r \times ZA''}{\text{cos. (haut. appar. Lune)}};$$
$$O''S' = \frac{ZO'' \text{ sin. (haut. vr. astr.)}}{\text{cos. (haut. vr. de l'astr.)}}; \quad O''S'' = \frac{ZO'' \text{ sin. (haut. ap. astre)}}{\text{cos. (haut. appar. astre)}};$$
$$A''L' = \frac{ZA'' \text{ sin. (haut. vr. ☾)}}{\text{cos. (haut. vr. de la ☾)}}; \quad A''L'' = \frac{ZA'' \text{ sin. (haut. ap. ☾)}}{\text{cos. (haut. ap. de la Lune)}}.$$

Donc,

$$\text{cosin. (distance vraie de la Lune \& de l'astre)} = \frac{\text{cos. } A''ZO'' \times \text{cos. (hauteur vraie de l'astre)} \times \text{cos. (hauteur vraie de la Lune)}}{r^2}$$
$$+ \frac{\text{sin. (hauteur vraie de l'astre)} \times \text{sin. (hauteur vraie de la Lune)}}{r}.$$

On sait qu'en général (*Trigon. rect.*) r cosin. angle $=$ $2 \times \text{cosin.}^2 \left(\frac{\text{angle}}{2}\right) - r^2 = -2 \times \text{sin.}^2 \left(\frac{\text{angle}}{2}\right) + r^2$. Si

l'on élimine cof. $A'' Z O''$ par le moyen de la première Fig. 6. équation, on aura

$$\text{cofin. (diftance vraie de la Lune \& de l'aftre)}$$

$$= \frac{2 \times \text{cof.}^2 \frac{1}{2} A'' Z O'' \times \text{cof. (haut. vraie de l'aftre)} \times \text{cof. (haut. vraie de la Lune)}}{r^3}$$

$$- \frac{\text{cof. (haut. vr. de l'aftre)} \times \text{cof. (h. vr. Lune)} - \text{fin. (h. v. aft.)} \times \text{fin. (h. vr. ☾)}}{r}$$

$$= \frac{2 \times \text{cof.}^2 (\frac{1}{2} A'' Z O'') \times \text{cof. (haut. vr. de l'aftre)} \times \text{cof. (haut. vraie de la Lune)}}{r^3}$$

$$- \text{cofin. (haut. vraie de l'aftre + haut. vraie de la Lune).}$$

Si maintenant, dans cette dernière expreffion, l'on élimine cofin. (dift. vr. de la ☾ & de l'aftre) & cof. (haut. vr. ☾ + haut. vr. aftre) au moyen de l'équation $r \times \text{cofin. angle} = - 2 \times \text{fin.}^2 (\frac{\text{angle}}{2}) + r^2 = 2 \times \text{cofin.}^2 (\frac{\text{angle}}{2}) - r^2$; on aura

$$\text{fin.} (\frac{\text{diftance vraie de la Lune \& de l'aftre}}{2})$$

$$= \sqrt{(\text{cof.}^2 \frac{(\text{h. vr. aft.} + \text{h. v. ☾})}{2} - \frac{\text{cof.}^2 \frac{1}{2} A'' Z O'' \text{cof. (h. v. aft.) cof. (h. v. ☾)}}{r^2})}.$$

Soit maintenant un angle B tel que

$$\text{cof.}\, B = \frac{\sqrt{[\text{cof.}^2 \frac{1}{2} A'' Z O'' \times \text{cof. (haut. vr. de l'aftre)} \times \text{cof. (haut. vr. de la Lune)}]}}{\text{cofin.} \frac{1}{2} \text{(haut. vraie de l'aftre + haut. vraie de la Lune)}};$$

on aura

$$\text{fin.} \frac{1}{2} \text{(dift. vr. de la ☾ \& de l'aftre)} = \frac{\text{cof.} \frac{1}{2} \text{(haut. vr. aft. + haut. vr. ☾)} \times \text{fin.}\, B}{r}.$$

(148.) Il n'eft plus queftion que de trouver une expreffion fimple & commode de cof.$^2 \frac{1}{2} A'' Z O''$

Pour la déterminer, dans l'expreffion de cof. $(A'' Z O'')$ du *§. 146*, je fubftitue fa valeur tirée des équations du *§. 147*, & j'ai

$$\text{cof.}^2 \tfrac{1}{2} A'' Z O'' = \frac{r^2 (Z A'' \times Z O'' - O'' S'' \times A'' L'') + r \times Z S'' \times Z L'' \times \text{cof.}\, L'' Z S''}{2 \times Z A'' \times Z O''} =$$

$$\frac{r^2 [\text{cof. (haut. ap. aftre)} \times \text{cof. (haut. ap. ☾)} - \text{fin. (haut. ap. aftre)} \times \text{fin. (haut. ap. ☾)} + r\, \text{cof.}\, L'' Z S'']}{2 \times \text{cofin. (haut. apparente de l'aftre)} \times \text{cofin. (haut. apparente de la Lune)}} =$$

$$\frac{r^2 [\text{cof. (haut. appar. de l'aftre + haut. appar. ☾)} + \text{cof. (dift. appar. de l'aftre \& ☾)}]}{2 \times \text{cofin. (haut. apparente de l'aftre)} \times \text{cofin. (haut. apparente de la Lune)}} =$$

$$\frac{r^2\left\{\begin{array}{l}\text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{haut. appar. de l'aſt.} + \text{haut. appar. ☾} + \text{diſt. appar. de l'aſt. \& ☾})\\ \times\ \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{haut. appar. de l'aſt.} + \text{haut. appar. ☾} - \text{diſt. appar. de la ☾ \& de l'aſt.})\end{array}\right.}{\text{coſin. (haut. apparente de l'aſtre)} \times \text{coſin. (haut. apparente de la Lune)}}.$$

Telle eſt la ſolution que M. le Chevalier de Borda a donnée de ce Problème, & qu'il m'a fait l'amitié de me communiquer ſans démonſtration, en m'invitant à la déduire de mes méthodes.

(149.) Les formules du *§. 147,* peuvent ſervir à calculer avec beaucoup de facilité, dans un triangle ſphérique, le côté DC oppoſé à un angle connu A, lorſque l'on connoît d'ailleurs les côtés AD, AC, qui comprennent l'angle A; on voit en effet très-facilement que l'on a en général

$$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ DC = \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ \frac{(AD + AC) \times \text{ſin.}\ B}{r},$$

B étant un angle déterminé par l'expreſſion ſuivante,

$$\text{coſin.}\ B = \frac{\sqrt{(\text{coſin.}^2\ \tfrac{1}{2} A \times \text{ſin.}\ AD \times \text{ſin.}\ AC)}}{\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\ (AD + AC)}.$$

(150.) La formule du *§. 148,* peut auſſi ſervir à calculer, dans un triangle ſphérique, un angle quelconque A, lorſque l'on connoît d'ailleurs deux côtés AD, AC, qui comprennent cet angle, & le côté CD qui lui eſt oppoſé. On voit en effet que l'on a en général

$$\text{cof.}\ \tfrac{1}{2} A = r \times \frac{\sqrt{\left[\text{cof.}\left(90^d - \frac{AD + AC + CD}{2}\right) \times \text{cof.}\left(90^d - \frac{AD + AC - CD}{2}\right)\right]}}{\sqrt{(\text{ſin.}\ AD \times \text{ſin.}\ AC)}}.$$

J'ai fait uſage de ces formules dans les *§. 121 & 139* de ce Mémoire.

SECTION SEPTIÈME.

Des changemens qu'il faut faire aux formules pour les appliquer aux paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil.

(151.) Je vais m'occuper dans cette Section, des changemens qu'il faut faire aux formules, pour les appliquer aux

passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil. Je suppose que l'on connoisse par les Tables astronomiques, les élémens suivans.

Heure de la conj. de la Planète & du Soleil, vue du centre de la Terre.

Point de l'Écliptique dans lequel arrive la conjonction.

Nœud dans lequel le passage a lieu.

Distance de la Planète au Soleil à l'instant de la conjonction.

Latitude héliocentrique de la Planète.

Mouvement horaire héliocentrique de la Planète en longitude.

Mouvement horaire héliocentrique de la Planète en latitude.

Mouvement horaire du Soleil en longitude.

Mouvement horaire relatif de la Planète au Soleil, en longitude.

Distance moyenne de la Terre au Soleil.

Distance de la Terre au Soleil à l'instant de la conjonction.

Obliquité de l'Écliptique.

Parallaxe horizontale du Soleil.

Déclinaison du Soleil à l'instant de la conjonction.

Variation horaire de la déclinaison du Soleil.

Variation horaire de la distance de la Planète au Soleil.

Demi-diamètre du Soleil.

Demi-diamètre de la Planète.

Différence entre la durée d'une heure vraie & la durée d'une heure moyenne pour le jour de l'observation.

(152.) Pour déterminer les circonstances du passage de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, j'imagine, Fig. 1. comme dans les Éclipses de Soleil, que par le centre de la Planète l'on fasse passer à chaque instant, perpendiculairement à l'Écliptique, un plan que j'appelle *plan de projection*, & dont l'intersection avec l'Écliptique soit perpendiculaire au rayon vecteur de la Terre. Sur ce plan je trace une droite AO, que je regarde comme l'intersection de ce plan, avec l'Écliptique, & je marque un point G que je regarde comme le point commun à ce plan & au rayon vecteur de la Terre. Par le point G je mène une droite GX qui représente l'intersection du cercle de déclinaison du Soleil avec le plan de projection. Ce cercle de déclinaison s'appelle ordinairement le

Fig. 1. *Méridien universel.* Sur la droite GX, je marque un point X, tel que GX soit égal au demi-petit axe de la Terre. Par le point G, j'élève à la droite AO une perpendiculaire GL, telle que le point L représente le lieu du centre de la Planète à l'instant de la conjonction. Par le point L je mène la droite LQ, projection de la petite portion de l'orbite relative de la Planète, parcourue pendant son passage sur le disque du Soleil. Enfin, sur le même plan je suppose tracée la projection ortographique des parallèles terrestres.

(153.) Si l'on compare cette dernière construction avec celle des *§. 1 & 2 de mon II.e Mémoire*, il sera aisé de voir que la seule différence qui se trouve entre ces deux constructions, consiste en ce que dans les Éclipses de Soleil, la Planète dont on cherche à déterminer les mouvemens relatifs, a le centre de la Terre pour centre de ses mouvemens; dans les passages de Vénus & de Mercure, au contraire, le Soleil est le centre des mouvemens de ces Planètes. Leurs trajectoires, ainsi que la projection de ces trajectoires sur le plan de l'Écliptique, sont convexes vers la Terre.

Année 1764.

(154.) Si l'on jette les yeux sur les quantités définies dans le *§. 1.er du présent Mémoire*, & que l'on examine ce qui résulte des réflexions précédentes, il sera aisé de voir que plusieurs de ces quantités signifient absolument les mêmes choses que dans les Éclipses de Soleil, & s'évaluent d'une manière absolument semblable; ces quantités sont r, ϱ, υ, b, s, c, g, h, p, q, Ω, χ, ω, t, φ, π', σ, τ.

(155.) Les quantités qui doivent s'évaluer d'une manière un peu différente, sont celles qui dépendent du lieu & du mouvement de la Planète; ces quantités sont donc l'inclinaison de l'orbite corrigée, θ, ψ, ξ, ζ, π, l, γ, $\varkappa$, $\varkappa'$,

(156.) L'analogie des constructions nous fait voir tout de suite que pour évaluer l'inclinaison de l'orbite, il ne s'agit que de substituer dans l'équation du *§. 1.er* les mouvemens horaires héliocentriques de la Terre & de la Planète, aux mouvemens horaires géocentriques que l'on emploie lors des Éclipses

Éclipſes de Soleil; on aura donc

Tangente de l'inclinaiſon de l'orbite relative $= -$

$$\frac{r^2}{206265''} \times \frac{\text{mouv. hor. héliocent. de la Planète en latit. évalué en ſec. de degré}}{\text{ſin. } (-\text{ mouv. hor. } \odot + \text{ mouv. hor. hélioc. de la Planète en long.})} .$$

θ eſt le ſinus, & ψ eſt le coſinus de l'angle déterminé ci-deſſus. Comme dans cette dernière équation, le numérateur de la fraction qui exprime la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite relative, eſt négatif, θ eſt négatif lorſque le paſſage arrive dans le nœud aſcendant; θ eſt poſitif lorſque le paſſage arrive dans le nœud deſcendant. Quant à ψ, il eſt toujours poſitif.

(157.) Quoique peut-être, pour évaluer la quantité l, on put ſe diſpenſer de connoître la latitude géocentrique & la Parallaxe horizontale de la Planète; cependant, pour changer le moins qu'il eſt poſſible les définitions des différens Mémoires, j'ai cru plus à propos de conclure ces dernières quantités, de la latitude héliocentrique de la Planète, & de la Parallaxe du Soleil, au moyen des conſtructions ſuivantes.

Soit S le centre du Soleil, T le centre de la Terre, P le lieu de la Planète à l'inſtant de la conjonction, ST le rayon vecteur de la Terre, SP le rayon vecteur de la Planète, PG la perpendiculaire abaiſſée de la Planète ſur le plan de l'Écliptique, PP' l'orbite de la Planète, GG' la projection ortographique de l'orbite de la Planète ſur le plan de l'Écliptique; ſoit de plus, Fig. 7.

r le demi-petit axe de la Terre, que je ſuppoſe d'ailleurs égal au rayon des Tables.

π le ſinus de la parallaxe horizontale de la Planète.

π' le ſinus de la parallaxe horizontale du Soleil.

D la diſtance ST de la Terre au Soleil, à l'inſtant de la conjonction.

Δ la diſtance SP de la Planète au Soleil, à l'inſtant de la conjonction.

En vertu des conſtructions précédentes, on a

$SP : PG :: r :$ ſin. (latitude héliocentrique de la Planète);

$SP : SG :: r :$ coſin. (latitude héliocentrique de la Planète);

$TG : PG :: r :$ tang. (latitude géocentrique de la Planète);

$TG = ST - SG; TP = \sqrt{(TG^2 + PG^2)}$; donc,

Fig. 7. $\text{Tang. (latit. géoc. Planète)} = \frac{\Delta\, r\, \text{sin. (latit. héliocent. de la Planète)}}{D r - \Delta \times \text{cosin. (latit. hélioc. Planète)}}$;

$$TP = \frac{\sqrt{[r^2 (D^2 + \Delta^2) - 2\, r D \Delta\, \text{cosin. (latit. hélioc. de la Planète)}]}}{r};$$

(158.) Si la latitude héliocentrique de la Planète étoit assez petite pour que l'on pût supposer sans erreur sensible cosin. (latitude héliocentrique de la Planète) $= r$, les équations précédentes deviendroient

$$\text{Tang. (latit. géoc. Planète)} = \frac{\Delta \times \text{sin. (latit. héliocent. de la Planète)}}{D - \Delta};$$

$TP = D - \Delta$. Mais d'ailleurs $\frac{r^2}{\pi} = TP$; donc . . . $\pi = \frac{r^2}{D - \Delta} = \frac{r^2}{TP}$. On pourra maintenant, comme dans les Éclipses de Soleil, évaluer la quantité l par le moyen de l'équation

$$l = \frac{r\, \text{sin. (latitude géocentrique de la Planète à l'instant de la conjonction)}}{\text{sin. (parallaxe horizontale de la Planète à l'instant de la conjonction)}};$$

& l'on aura

$$\xi = \text{cosinus (latitude géocentrique de la Planète).}$$

Quant à ζ, l'on a, comme dans les Éclipses de Soleil,

$$\zeta = r - \frac{\pi' \xi}{\pi}.$$

(159.) Nous venons de voir que $\pi = \frac{r^2}{TP} = \frac{r^2}{D - \Delta}$; d'ailleurs $\pi' = \frac{r^2}{D}$. Donc $\pi : \pi' :: \frac{r^2}{D - \Delta} : \frac{r^2}{D} :: D : D - \Delta$; donc $\pi = \pi' \times \frac{D}{D - \Delta} = \frac{\pi' D}{TP}$. On voit par-là que dans les passages de Vénus & de Mercure, quoique la quantité absolue de la parallaxe du Soleil soit inconnue, le rapport de π' à π est cependant déterminé, puisqu'il dépend de celui de D à $D - \Delta$, ou de D à TP, & qu'il est donné par la théorie des trajectoires. ζ est donc une quantité absolument connue. On voit aussi que π & π' dépendent tellement l'un de l'autre, que lorsque l'une de ces quantités est connue, l'autre l'est pareillement. Cette remarque est

d'autant plus importante que d'après la forme de mes équations, c'eſt la parallaxe horizontale de Vénus ou de Mercure que j'apprendrai à connoître. De cette parallaxe l'on conclura celle du Soleil, au moyen de la formule $\pi' = \frac{\pi \times TP}{D}$. Cette dernière parallaxe du Soleil eſt celle qui répond au jour de l'obſervation. Fig. 7.

Si l'on vouloit avoir l'expreſſion de la parallaxe moyenne, ſoit

π'' le ſinus de la parallaxe horizontale moyenne du Soleil.

D' la diſtance moyenne de la Terre au Soleil.

On aura

$$\pi'' = \frac{\pi \times TP}{D'}.$$

(160.) Pour évaluer la quantité γ, ſoit P' le lieu de la Planète dans ſon orbite, une heure après la conjonction. Du point P' j'abaiſſe ſur le plan de l'Écliptique, la perpendiculaire $P'G'$; du point G' je mène la perpendiculaire $G'H$ ſur le rayon vecteur ST de la Terre, & les droites $G'S$, $G'T$, au Soleil & à la Terre. Il eſt ſenſible, d'après cette conſtruction, que GH eſt le ſinus verſe du mouvement horaire relatif héliocentrique de la Planète & de la Terre, en longitude, évalué dans un cercle dont le rayon égale SG'. D'après les conſtructions précédentes, on voit que $SG' : SP'$: : coſin (latitude héliocentrique de la Planète) : r; de plus $SP' = \Delta$; donc $SG' = \Delta \times \frac{\text{coſin. (latitude héliocentrique de la Planète)}}{r}$; donc GH ou γ ſon égal, eſt le ſinus verſe du mouvement horaire relatif héliocentrique de la Planète & de la Terre, en longitude, évalué dans un cercle qui a pour rayon . . . . $\Delta \times \frac{\text{coſin. (latitude héliocentrique de la Planète)}}{r} = \Delta$, puiſque dans cette recherche on peut ſuppoſer ſans erreur appréciable, coſinus (latitude héliocentrique de la Planète) $= r$. Mais (§. 159) $\Delta = D\left(\frac{\pi - \pi'}{\pi}\right) = \frac{r^2}{\pi'}\left(\frac{\pi - \pi'}{\pi}\right)$, puiſque $D = \frac{r^2}{\pi'}$. Cette quantité γ a donc pour expreſſion

Fig. 7. $\gamma = \frac{r}{\pi'} \left(\frac{\pi - \pi'}{\pi}\right) \times$ ſin. verſe (mouv. hor. rel. hélioc. en longit.).

Elle eſt négative, parce que l'orbite de la Planète eſt convexe vers la Terre.

(161.) Quoique pour évaluer les quantités $\varkappa$, $\varkappa'$, on puiſſe ſe diſpenſer de connoître le mouvement horaire relatif géocentrique de la Planète en longitude, cependant, pour conſerver l'analogie des précédens Mémoires, j'ai cru préférable de donner l'expreſſion de ce mouvement horaire.

En vertu des conſtructions des paragraphes précédens, on a

$SG' : G'H :: r :$ ſin. (mouv. hor. relatif héliocent.)

$TG' : G'H :: r :$ ſin. (mouv. hor. relatif géocent.)

$SG' : SP' ::$ coſin. (latitude héliocentrique de la Planète) $: r$.

$TG' : TP' ::$ coſin. (latitude géocentrique de la Planète) $: r$.

D'ailleurs, on peut ſuppoſer ſans erreur $SP' = SP$, $TP' = T'P$.

Donc,

$$\text{ſinus (mouvement horaire relatif géocentrique de la Planète)} = \text{ſin. (mouv. hor. relat. hélioc.)} \times \frac{SP\ \text{coſin. (latitude hélioc. de la Planète)}}{TP\ \text{coſin. (latitude géoc. de la Planète)}}.$$

On pourra maintenant, comme dans les Éclipſes de Soleil, évaluer les quantités $\varkappa$, $\varkappa'$, au moyen des équations ſuivantes.

$$\varkappa = \frac{r\xi}{\psi} \times \frac{\text{ſinus (mouvement horaire relatif géocent. de la Planète en longit.)}}{\text{ſin. (parall. horiz. de la Planète à l'inſtant de la conjonction)}},$$

$$\varkappa' = \frac{\xi}{\psi} \times \text{ſinus (mouvement horaire relatif géoc. Planète en longit.)}$$

(162.) Dans les Éclipſes de Soleil, le ſinus du mouvement horaire relatif en longitude eſt donné ſous une forme poſitive; lors des paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil, cette quantité eſt au contraire négative. La raiſon en eſt ſimple; en effet, ſi l'on compare le mouvement horaire relatif de la Planète dans ſon orbite, au mouvement horaire de l'Obſervateur dans ſon parallèle, lors de ſon paſſage par le Méridien ſupérieur, on verra que ces deux mouvemens

ſont dans le même ſens pour les Éclipſes de Soleil, & dans le ſens oppoſé pour les paſſages de Vénus & de Mercure. On doit donc ſuppoſer négatif le mouvement horaire relatif géocentrique de la Planète. Par la même raiſon n & n' ſont des quantités négatives. Pour avoir, avec la dernière exactitude, les valeurs de n & de n', il faut, conformément à la remarque du *§. 1.er*, employer les mouvemens horaires en longitude correſpondans à une heure vraie pour le jour du paſſage, & non pas les mouvemens horaires correſpondans à une heure moyenne.

RÉCAPITULATION des Paragraphes précédens.

(163.) Pour récapituler ce qui vient d'être démontré dans les paragraphes précédens; ſoit

r le demi-petit axe de la Terre, que je ſuppoſe d'ailleurs égal au rayon des Tables.

ρ le demi-grand axe.

v l'arc de 15^d rectifié, ou plus exactement, l'arc qui meſure le temps vrai correſpondant à une heure moyenne pour le jour du paſſage.

θ le ſinus, ψ le coſinus, de l'inclinaiſon de l'orbite relative. Cette inclinaiſon ſe détermine par la formule du *§. 156*.

b le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis la conjonction juſqu'à l'inſtant pour lequel on calcule.

s le ſinus, c le coſinus, de la latitude corrigée de l'Obſervateur.

g le ſinus, h le coſinus, de l'angle horaire du Soleil.

p le ſinus, q le coſinus, de la déclinaiſon du Soleil à l'inſtant pour lequel on calcule.

Ω le coſinus de l'obliquité de l'Écliptique.

$\chi = \sqrt{(q^2 - \Omega^2)}$.

ω le ſinus, t la tangente, φ le coſinus, de l'angle de l'orbite relative de la Lune avec le fil parallèle ou équatorial de l'Obſervateur.

Cet angle ſe détermine par l'équation ſuivante,

$$\omega = \frac{\theta\Omega}{q} + \frac{\psi\chi}{q}.$$

D' la diſtance moyenne de la Terre au Soleil.

D la diſtance actuelle de la Terre au Soleil.

Δ la diſtance actuelle de la Planète au Soleil.

π' le ſinus de la parallaxe horizontale actuelle du Soleil.

π'' le ſinus de la parallaxe horizontale moyenne du Soleil.

ξ le coſinus de la latitude géocentrique de la Planète à l'inſtant de la conjonction. On peut voir (*§. 157*) comment cette latitude ſe détermine.

π le ſinus de la parallaxe horizontale de la Planète. On peut voir (*§. 159*) comment cette Parallaxe ſe détermine.

$$\zeta = r - \frac{\pi' \xi}{\pi}.$$

$$l = r \times \frac{\text{ſin. (latitude géocentrique de la Planète à l'inſtant de la conjonc.)}}{\pi}.$$

$$\gamma = \frac{r}{\pi'} \left(\frac{\pi - \pi'}{\pi}\right) \times \text{ſin. verſe (mouvem. horaire relatif hélioc. en long.)}$$

$$\varkappa = \frac{r\xi}{\psi} \times \frac{\text{ſin. (mouv. horaire relatif géocentrique de la Planète en longit.)}}{\pi}.$$

$$\varkappa' = \frac{\xi}{\psi} \times \text{ſin. (mouv. hor. relatif géocent. de la Planète en longit.)}$$

On a vu (*§. 161*) comment on déterminoit le mouvement horaire relatif géocentrique de la Planète en longitude.

Toutes les équations démontrées pour les Éclipſes de Soleil, ont également lieu pour les paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque de cet aſtre.

Les ſuppoſitions primitives relatives aux ſignes des quantités, dont les définitions ne changent point dans les paſſages de Vénus & de Mercure & dans les Éclipſes de Soleil, ſont les mêmes pour ces deux phénomènes: il ſera donc utile de relire ce qui a été dit au commencement de ce Mémoire. Quant aux quantités qui ont une définition un peu différente, on a vu dans les paragraphes précédens quelles étoient les ſuppoſitions primitives relativement à leurs ſignes.

(164.) Lorſque l'on aura déterminé la latitude géocentrique de la Planète à l'inſtant de la conjonction, ainſi que le lieu de la conjonction dans l'Écliptique, on déterminera facilement le lieu du nœud de cette Planète. En effet, de la latitude géocentrique, on conclura (*§. 157*) la latitude héliocentrique; on aura alors à réſoudre un triangle ſphérique rectangle,

dont on connoîtra un des côtés, qui eſt la latitude, & un angle, qui eſt l'inclinaiſon de l'orbite ſur l'Écliptique; on déterminera donc le lieu du nœud. Si l'on ne connoiſſoit pas préciſément l'inclinaiſon de l'orbite, on détermineroit le rapport entre cette inclinaiſon & le lieu du nœud.

Remarque ſur une petite inégalité dans les mouvemens horaires, relative aux paſſages de Mercure ſur le diſque du Soleil.

(165.) On ſait que l'orbite de Mercure eſt fort excentrique. Quelques Aſtronomes ont obſervé que dans de certaines poſitions de cette Planète, lorſque ſur-tout le paſſage ſur le diſque du Soleil dure un temps conſidérable, les mouvemens héliocentriques de la Planète & les rapports des diſtances varient d'une manière aſſez ſenſible, du commencement à la fin du paſſage, pour mériter d'entrer en ligne de compte. Rien n'eſt plus ſimple que d'y avoir égard d'après mes méthodes.

On peut ſe rappeler que dans les *VIII.ᵉ & IX.ᵉ Mémoires*, j'ai donné des méthodes pour corriger les réſultats, en ſuppoſant qu'il ſe ſoit gliſſé quelqu'erreur dans le mouvement horaire hypothétique, & que la parallaxe ait varié depuis l'inſtant de la conjonction juſqu'à l'inſtant de l'obſervation. Il faut donc démontrer comment la correction dont il s'agit, ſe réduit à faire uſage de ces méthodes. Soit S le Soleil; P le lieu de la Planète à l'inſtant de la conjonction; P' le lieu de la Planète une heure après la conjonction; P'' le lieu de la Planète un temps conſidérable après la conjonction, par exemple, ſix heures après cet inſtant; SP, SP', SP'' les rayons vecteurs de la Planète; a, a' les angles traverſés depuis la conjonction juſqu'au premier inſtant, depuis la conjonction juſqu'au dernier inſtant; je ſuppoſe ces angles évalués en ſecondes de degrés, & meſurés ſur un cercle dont le rayon égale r. On démontre en Mécanique, que les aires décrites ſont comme les temps; on aura donc dans l'eſpèce dont il s'agit, aire SPP'' égale ſix fois aire SPP'; de plus par la théorie des trajectoires, l'aire SPP'' eſt à l'aire SPP' comme $a' \times SP''^2$ eſt à $a \times SP'^2$;

Années 1770 & 1771.

Fig. 8.

donc $a' \times SP''^2 : a \times SP'^2 :: 6 : 1$; $\frac{d}{6} = a \times \frac{SP'^2}{SP''^2}$; $\frac{d}{6} - a = a \times \frac{SP'^2}{SP''^2} - a$. Pour que les constructions primitives eussent lieu, on devroit avoir $\frac{d}{6} - a = 0$. Si donc on multiplie la quantité $\frac{d'}{6} - a$, ou son égale $a \times \frac{SP'^2}{SP''^2} - a$, par $\frac{SP}{TP} \frac{\text{cosinus (latitude héliocentrique de la Planète)}}{\text{cosinus (latitude géocentrique de la Planète)}}$ (§. 161), afin de réduire en mouvemens géocentriques, cette petite variation des mouvemens héliocentriques, & qu'on la prenne avec un signe contraire, attendu que dans les passages de Mercure sur le disque du Soleil, le mouvement horaire relatif est négatif, on aura l'expression de d (mouv. hor.) qu'il faudra substituer dans les formules des *VIII.e & IX.e Mémoires.*

(166.) Quant à la quantité dont la Parallaxe est affectée par le changement de distance de Mercure au Soleil, rien n'est plus simple que d'y avoir égard. En effet, nous avons vu (§. 159) que $\pi = \frac{\pi' D}{TP}$; on évaluera successivement cette quantité avec les distances qui ont lieu à l'instant de la conjonction & à l'instant de l'observation : on aura donc la variation de la Parallaxe horizontale de la Planète, dans l'intervalle de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation, & par conséquent l'expression de la variation de cette Parallaxe; c'est celle qu'il faudra substituer dans les formules des *VIII.e & IX.e Mémoires.*

Application de la théorie précédente aux passages de Vénus sur le disque du Soleil, des 6 Juin 1761 & 3 Juin 1769.

(167.) Pour compléter ce travail, je vais appliquer la théorie précédente aux passages de Vénus sur le disque du Soleil des 6 Juin 1761 & 3 Juin 1769 ; ou plutôt, attendu la longueur de ce Mémoire, je donnerai uniquement les quantités hypothétiques dont je ferai usage dans les formules démontrées précédemment. Je remarquerai, relativement

relativement à ces passages, qu'il ne peut être qu'infiniment avantageux de comparer les résultats de ces deux phénomènes. En effet, comme dans l'un de ces passages, Vénus a traversé l'hémisphère boréal du disque du Soleil; que dans l'autre, Vénus a traversé l'hémisphère austral, & que d'ailleurs le mouvement du nœud de Vénus sur l'Écliptique est connu dans le court intervalle de huit ans; ces deux passages comparés entr'eux, réunissent les avantages d'une Éclipse de Soleil observée dans la partie boréale & dans la partie australe du disque de cet astre. On peut voir ce que j'ai dit à ce sujet, *§. 97 de mon Ve Mémoire.* *Année 1767.*

Passage de Vénus du 6 Juin 1761, dans le nœud descendant.

(168.) J'ai supposé que l'on avoit pour ce passage les élémens suivans; on ne doit point oublier qu'il ne faut regarder ces élémens que comme hypothétiques.

Heure de la conjonction de Vénus & du Soleil, vue du centre de la Terre, au méridien de Paris.	5 Juin $17^h\ 56'\ 43''$.
Lieu de Vénus & de la Terre à l'inst. de la conj.	$8^s\ 15^d\ 36'\ 25''$.
Moyenne distance de la Terre au Soleil.......	23605 x 100000.
Distance de la Terre au Soleil à l'instant de la conjonction..........................	23605 x 101546.
Distance de Vénus au Soleil à l'inst. de la conj.	23605 x 72636.
Latitude héliocentrique de Vénus à l'instant de la conjonction........................	$0^d\ 3'\ 48'',60$ A.
Mouvement horaire héliocentrique de Vénus en longitude..........................	0. 3. 57,93
Mouvement horaire héliocentrique de Vénus en latitude..........................	0. 0. 14,20
Mouvement horaire du Soleil...............	0. 2. 23,40
Mouvement horaire relatif héliocentrique de Vénus en longitude......................	0. 1. 34,53
Obliquité de l'Écliptique.................	23. 28. 13,6
Parallaxe horizontale du Soleil dans ses moyennes distances........................	0. 0. 8,75
Parallaxe horizontale du Soleil le jour du passage..	0. 0. 8,62

Déclinaison du Soleil à l'instant de la conjonction. $22^d\ 41'\ 30''$.

Variation horaire de la déclinaison du Soleil $= +\ 16$ secondes.

Variation horaire de la distance de Vénus au Soleil $= 0$.

Demi-diamètre du Soleil tiré des Tables 0. 15. 46,9

Demi-diamètre de Vénus.................. 0. 0. 28,6

Différence entre la durée d'une heure vraie & la durée d'une heure moyenne le jour du passage $= +\ 0'',4$.

Mouvement horaire relatif héliocentrique de Vénus pour une heure vraie 0. 1. 34,57

Latitude géocentrique de Vénus............ 0. 9. 34,36 A.

Parallaxe horizontale de Vénus............. 0. 0. 30,23

Mouvement horaire géocentrique relatif de Vénus en longitude pour une heure vraie........ 0. 3. 57,61

		Log.
$r = +\ 100000.$		$r = 10,0000000.$
$\rho = +\ 100438.$		$\rho = 10,0018923.$
$v = +$ arc de 15^d rectifié.		$v = 9,4179686.$
$\vartheta = +$ sinus. $8^d\ 32'\ 40''$		$\vartheta = 9,1719503.$
$\psi = +$ cosin. 8. 32. 40.		$\psi = 9,9951528.$
$\xi = +$ cosin. 0. 9. 34.		$\xi = 9,9999983.$
$p = +$ sinus. 22. 41. 30.		$p = 9,5863305.$
$q = +$ cosin. 22. 41. 30.		$q = 9,9650107.$
$\Omega = +$ cosin. 23. 28. 14.		$\Omega = 9,9624940.$
$\chi = +\ 9904.$	Log.	$\chi = 8,9957902.$
$\omega = +$ sinus. 14. 42. 20.		$\omega = 9,4045801.$
$t = +$ tang. 14. 42. 20.		$t = 9,4190445.$
$\varphi = +$ cosin. 14. 42. 20.		$\varphi = 9,9855357.$
$D' = 23605 \times 100000.$		$D' = 14,3730000.$
$D = 23605 \times 101546.$		$D = 14,3796630.$
$\Delta = 23605 \times 72636.$		$\Delta = 14,2341519.$
$D - \Delta = 23605 \times 28910.$		$D - \Delta = 13,8340481.$
$\pi' = +$ sinus. 0. 0. 8,62		$\pi' = 5,6203370.$
$\pi = +$ sinus. 0. 0. 30,23		$\pi = 6,1659519.$
$\zeta = +\ 71530.$		$\zeta = 9,8544882.$

Logar. { sin. (latitude géocentrique de Vénus à l'instant de la conj.) = 7,4447545.
sin. (mouvement horaire relatif hélioc. de Vénus en longit.) = 6,6610000.
sin. verse (mouv. horaire relatif héliocentrique de Vénus)... = 2,9000000.
sin. (mouvement horaire relatif géoc. de Vénus en longit.) = 7,0614317.

$l = -\ 1900250.$		Logarithme...	$l = 11,2788026.$
$\gamma = -\ 136.$			$\gamma = 7,1342167.$
$\varkappa = -\ 794924.$			$\varkappa = 10,9003253.$
$\varkappa' = -\ 116,49.$			$\varkappa' = 7,0662772.$

Passage de Vénus du 3 Juin 1769, dans le nœud descendant.

(169.) J'ai supposé que l'on avoit pour ce passage les élémens suivans. On ne doit point oublier qu'il ne faut regarder ces élémens que comme hypothétiques.

Heure que l'on comptoit au méridien de Paris à l'instant de la conjonction de Vénus & du Soleil, vue du centre de la Terre..............	$10^h\ 15'\ 2''$ du soir.
Lieu de Vénus & de la Terre à l'instant de la conjonction..........................	$8^s\ 13^d\ 27'\ 31''$
Moyenne distance de la Terre au Soleil......	23605 x 100000.
Distance de la Terre au Soleil à l'instant de la conjonction..........................	23605 x 101515.
Distance de Vénus au Soleil à l'instant de la conjonction..........................	23605 x 72619.
Latitude héliocentrique de Vénus à l'instant de la conjonction..........................	$0^d\ 4'\ 8'',10$ B.
Mouvement horaire héliocentrique de Vénus en longitude..........................	0. 3. 58,14
Mouvement horaire héliocentrique de Vénus en latitude..........................	0. 0. 14,20
Mouvement horaire du Soleil..............	0. 2. 23,50
Mouvement horaire relatif héliocentrique de Vénus en longitude..........................	0. 1. 34,64
Obliquité de l'Écliptique.................	23. 28. 1.
Parallaxe horizontale du Soleil dans ses moyennes distances..........................	0. 0. 8,75
Parallaxe horizontale du Soleil le jour du passage.	0. 0. 8,62
Déclinaison du Soleil à l'instant de la conjonction.	22. 26. 30.

Variation horaire de la déclinaison du Soleil = + 16 secondes.

Variation horaire de la distance de Vénus au Soleil = 0.

Demi-diamètre du Soleil, tiré des Tables.....	$0^d\ 15'\ 47'',2$
Demi-diamètre de Vénus................	0. 0. 28,6
Différence entre la durée d'une heure vraie & la durée d'une heure moyenne le jour du passage = + 0",4.	
Mouvement horaire héliocentrique relatif de Vénus en longitude pour une heure vraie.........	0. 1. 34,68
Latitude géocentrique de Vénus............	0. 10. 23,50 B.
Parallaxe horizontale de Vénus............	0. 0. 30,25
Mouvement horaire géocentrique relatif de Vénus en longitude pour une heure vraie.........	0. 3. 57,94

		Log.	
r	= 100000.	r	= 10,0000000.
ρ	= 100438.	ρ	= 10,0018923.
v	= arc de 15^d rectifié.	v	= 9,4179686.
θ	= + sinus. $8^d\ 32'\ 0''$	θ	= 9,1713893.
ψ	= + cosin. 8. 32. 0.	ψ	= 9,9951654.
ξ	= + cosin. 0. 10. 23.	ξ	= 9,9999980.
p	= + sinus. 22. 26. 30.	p	= 9,5817707.
q	= + cosin. 22. 26. 30.	q	= 9,9657982.
Ω	= + cosin. 23. 28. 1.	Ω	= 9,9625076.
χ	= + 11335.	χ	= 9,0544215.
ω	= + sinus. 15. 34. 40.	ω	= 9,4290191.
t	= + tang. 15. 34. 40.	t	= 9,4452725.
φ	= + cosin. 15. 34. 40.	φ	= 9,9837466.
D'	= 23605 × 100000.	D'	= 14,3730000.
D	= 23605 × 101515.	D	= 14,3795270.
Δ	= 23605 × 72619.	Δ	= 14,2340500.
$D - \Delta$	= 23605 × 28896.	$D - \Delta$	= 13,8338377.
π'	= + sinus. 0. 0. 8,62.	π'	= 5,6204730.
π	= + sinus. 0. 0. 30,25.	π	= 6,1661623.
ζ	= + 71535.	ζ	= 9,8545186.

Logar.		
	sin. (latitude géocentrique de Vénus à l'instant de la conj.)	= 7,4804136.
	sin. (mouv. horaire relatif héliocent. de Vénus en longit.)	= 6,6616492.
	sin. verse (mouv. horaire relatif héliocentrique de Vénus.)	= 2,9000000.
	sin. (mouv. horaire relatif géocent. de Vénus en longit.)	= 7,0620450.

$l = + 2061820.$			$l = 11,3142513.$
$\gamma = - \quad 136.$	Logarithme...		$\gamma = 7,1342167.$
$\varkappa = - \quad 795638.$			$\varkappa = 10,9007153.$
$\varkappa' = - \quad 116,65.$			$\varkappa' = 7,0668776.$

Remarques relatives aux formules des VIIIe & IXe Mémoires.

(170.) Quoique rien n'empêche d'appliquer le calcul aux formules de mes *VIIIe & IXe Mémoires*, prises dans toute leur généralité, il y a cependant des considérations particulières, tirées de la distance de Vénus à la Terre, qui abrègent considérablement ces calculs. On peut négliger d'abord les termes qui dépendent de l'erreur de la latitude du lieu où l'on observe, & de la déclinaison du Soleil. En effet, j'ai vérifié que dans les cas les plus défavorables, une erreur de 573″ sur ces élémens, ne produit qu'une erreur d'une seconde sur la longitude du lieu qu'on en conclut. Comme la déclinaison du Soleil & la latitude du lieu où l'on observe, sont connus avec une précision infiniment plus grande, on peut négliger cette correction. Par des raisons entièrement semblables on négligera le terme affecté de l'erreur du rapport des axes de la Terre. On négligera pareillement la correction relative à la variation de la Parallaxe & de la déclinaison du Soleil, dans l'intervalle de l'instant de la conjonction à l'instant de l'observation.

Années 1770 & 1771.

(171.) Lors des Éclipses de Soleil, on avoit pour déterminer l'inclinaison de l'orbite relative, l'équation suivante,

$$\text{Tangente de l'inclinaison de l'orbite relative} = \frac{r^2}{206265''} \times \frac{\text{mouvement horaire de la ☾ en latitude, évalué en secondes de degré}}{\text{sin. (mouv. horaire de la ☾ en longit.} - \text{mouv. hor. du Soleil)}}.$$

Lors des passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, on a

$$\text{Tangente de l'inclinaison de l'orbite relative} = - \frac{r^2}{206265''} \times \frac{\text{mouv. hor. héliocent. de la Planète en latit. évalué en sec. de degré}}{\text{sin. (mouv. hor. hélioc. de la Planète en long.} - \text{mouv. hor. ☉)}}.$$

On aura donc, par une analyse entièrement semblable à celle

Année 1770.

du *§. 101 de mon VIIIe Mémoire*,

$$d(\text{inclinaiſon de l'orbite}) = 206265'' \, \frac{\psi\theta}{r^2} \left(\frac{d(\text{m. hor. hél. Pl. lat.})}{\text{m. hor. hélioc. Pl. lat.}} - \frac{d(\text{m. hor. Pl. longit.}) - d(\text{m. hor.} \odot)}{\text{m. hor hélioc. Pl. longit.} - \text{m. hor.} \odot} \right).$$

Lors des paſſages des 6 Juin 1761 & 3 Juin 1769, le calcul m'a fait voir que chaque centième de ſeconde dont on fait varier le mouvement héliocentrique de Vénus en latitude, altère de 3′ 36″ l'inclinaiſon de l'orbite, & que cette inclinaiſon eſt altérée de 32 ſecondes pour chaque centième de ſeconde dont on fait varier le mouvement horaire héliocentrique relatif de Vénus en longitude.

Années 1770 & 1771.

(172.) Dans les formules de mes *VIIIe & IXe Mémoires*, il eſt bien évident que la quantité qu'il faut ſubſtituer à d(mouv. hor. ☾ au ☉), eſt d(mouv. hor. relat. géoc. Planète). Je remarquerai que lors des paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil, le mouvement horaire relatif géocentrique de la Planète eſt négatif; d(mouv. hor. relatif géocentrique) pris négativement, indique donc que le véritable mouvement horaire géocentrique eſt plus grand qu'on ne l'a ſuppoſé, & réciproquement. Si l'on vouloit calculer l'erreur du mouvement horaire héliocentrique, rien n'eſt plus ſimple que le procédé. On a, en effet, avec une exactitude ſuffiſante *(§. 161)*.

$$d(\text{mouv. hor. relatif hélioc.}) = \frac{D - \Delta}{\Delta} \, d(\text{m. hor. relatif géoc.})$$

Par des raiſonnemens entièrement analogues, on prouvera que la quantité qu'il faut ſubſtituer dans les formules, à d(latit. ☾), eſt d (latit. géoc. de la Planète); & que ſi l'on veut conclure l'erreur de la latitude héliocentrique, on a

$$d(\text{latitude héliocentrique}) = \frac{D - \Delta}{\Delta} \, d(\text{latitude géocentrique}).$$

(173.) Si l'on jette les yeux ſur les formules de mes *VIIIe & IXe Mémoires*, il ſera aiſé de ſe convaincre que les termes multipliés par d(Parallaxe du Soleil), ſont venus de la différentiation de la quantité ζ. Lors des paſſages de Vénus & de Mercure, cette quantité eſt connue, puiſqu'elle dépend du rapport des Parallaxes du Soleil & de la Planète, rapport

déterminé, quoique les valeurs absolues des Parallaxes ne le soient pas. On effacera donc les termes multipliés par d(Parall. du ☉), & l'on substituera à d(Parall. horiz. polaire ☾), la quantité d(Parall. horizontale de la Planète). Si l'on vouloit conclure l'erreur de la Parallaxe horizontale moyenne du Soleil, on aura (*§. 159*)

$$d(\text{Parall. horiz. moyenne } \odot) = \frac{D - \Delta}{D'}\, d(\text{Parall. horiz. Planète}).$$

(174.) On peut encore abréger les calculs en supposant égale à r la quantité que j'ai définie E lors des Éclipses de Soleil. J'ai trouvé que cette supposition, dans les cas les plus défavorables, équivaut à une erreur de 0",156 sur la distance observée des centres du Soleil & de Vénus; on peut donc la négliger. Cette remarque démontre également que l'on peut supposer = 0 les quantités que j'ai définies T. Elle donne en même temps une manière d'évaluer plus simplement la quantité L. Soit en effet

λ la tangente de la distance observée des centres,

on aura en général

$$L = \frac{\lambda r^2}{\pi \zeta};$$

& comme le demi-diamètre de Vénus ne varie pas à raison de l'élévation de l'Observateur sur l'horizon, on aura

Contacts extérieurs.

λ = tang. (demi-diam. du Soleil + demi-diam. de la Planète).

Contacts intérieurs.

λ = tang. (demi-diam. du Soleil — demi-diam. de la Planète).

On pourra supposer enfin une inflexion dans les rayons solaires qui rasent le limbe de la Planète; une irradiation, ou toute autre cause physique que l'on voudra. On n'oubliera pas, conformément à la remarque du *§. 66 de mon VIII.e Mémoire*, qu'en général l'entrée de Vénus sur le disque du Soleil a lieu par l'hémisphère suivant du disque de cet astre; & la sortie par l'hémisphère précédent.

Année 1770.

Remarques sur la détermination de la Longitude de la baie d'Antongil, d'après les Observations de M. le Gentil, faites en Novembre 1762.

(175.) Lorsque dans les *§. 139 & suivans* de ce Mémoire, j'ai déterminé la Longitude de la baie d'Antongil, dans l'île de Madagascar, d'après les observations faites par M. le Gentil, en Novembre 1762, je n'ai point dissimulé que cette détermination étoit subordonnée à l'exactitude des nouvelles Tables de M. Clairaut. M. le Monnier a bien voulu me communiquer l'observation suivante, qu'il m'a donnée toute réduite, & qui peut servir de correspondante à celles de M. le Gentil, du 20 Novembre 1762.

Le 20 Novembre 1762, à $4^h 9' 35''$, temps vrai à Paris,

Longitude observée du centre de la Lune...... = 295^d 50′ 8″.
Distance observée de la ☾ au pôle bor. de l'Éclipt. = 95. 11. 49.

Suivant les nouvelles Tables de M. Clairaut, le 20 Novembre 1762, à l'instant du midi vrai à Paris, la Longitude du centre de la Lune étoit de $293^d 41' 55''$; sa distance au pôle boréal de l'Écliptique, étoit de $95^d 10' 10''$; son mouvement horaire en longitude, de $30' 51''$; la variation du mouvement horaire en Longitude, de — 1″,5; le mouvement horaire en Latitude, de 19″. La Longitude de la Lune étoit donc, suivant les nouvelles Tables de M. Clairaut, de $295^d 50' 5''$ à $4^h 9' 35''$, temps vrai à Paris, & sa distance au pôle boréal de l'Écliptique, de $95^d 11' 28''$. L'erreur de ces Tables seroit donc, d'après l'observation de M. le Monnier, de — 3″ en Longitude, & de — 21″ en Latitude.

Je remarquerai enfin, que les observations de M. le Gentil, donnent à la Lune une Latitude australe plus petite de 37 secondes, que l'observation de M. le Monnier, & que la Latitude des Tables de M. Clairaut est entre ces deux résultats.

MÉMOIRE

Fig. 2.

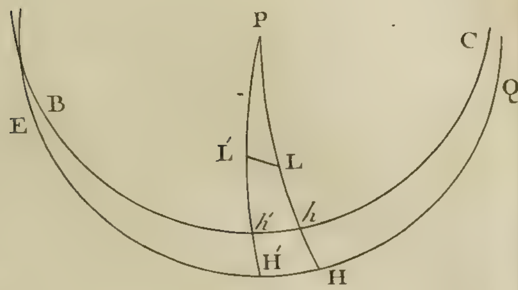




Fig. 3.

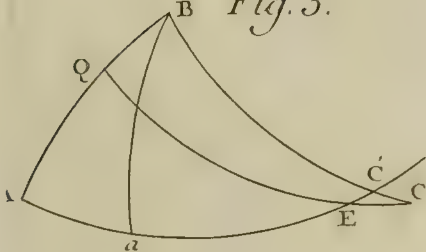
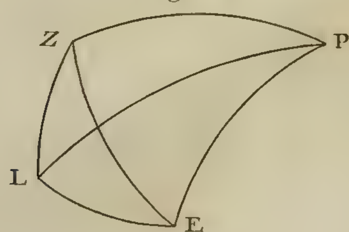
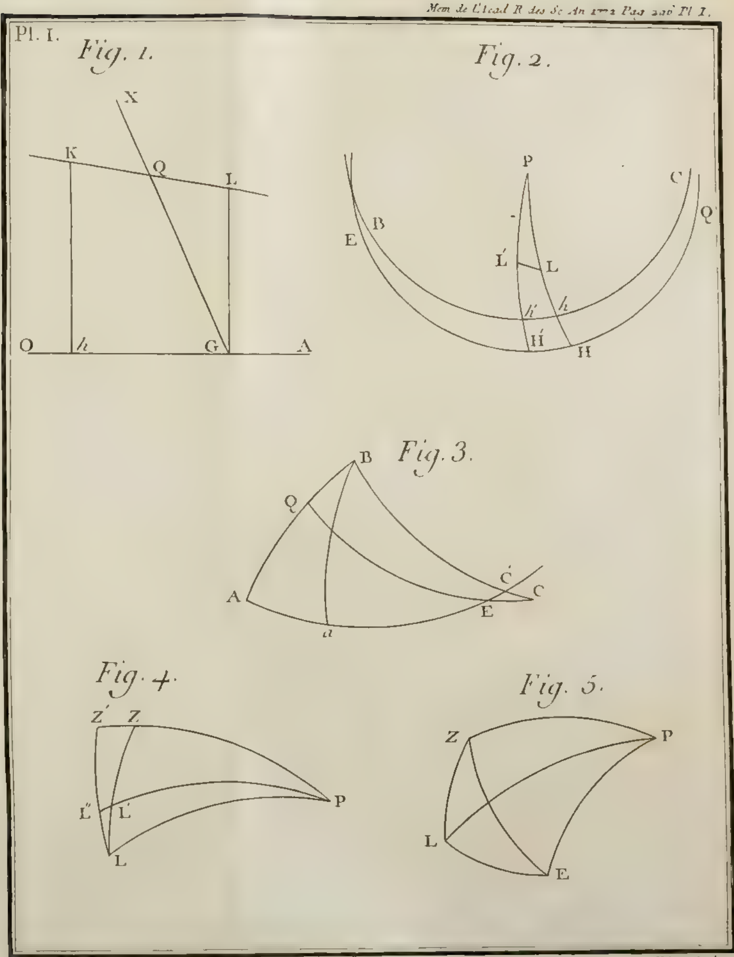


Fig. 5.



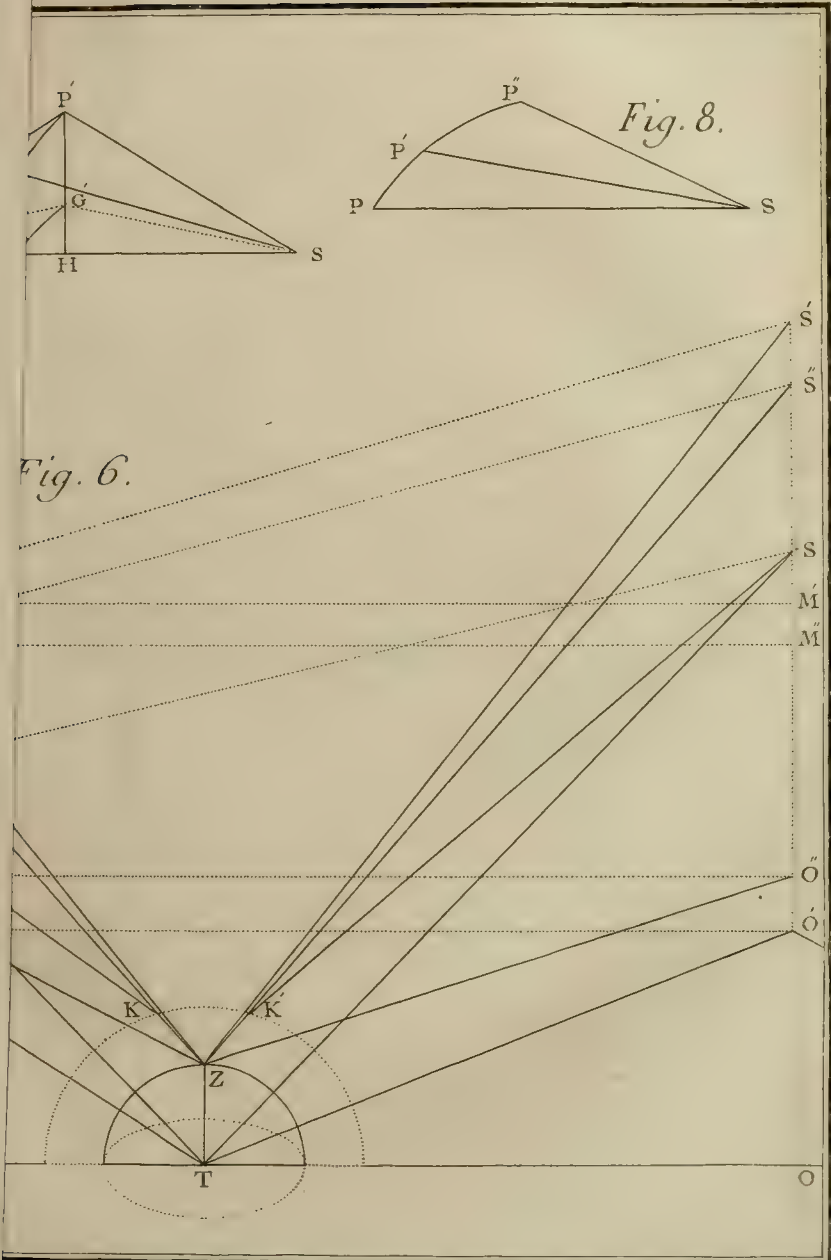


Y. le G. Sculp.



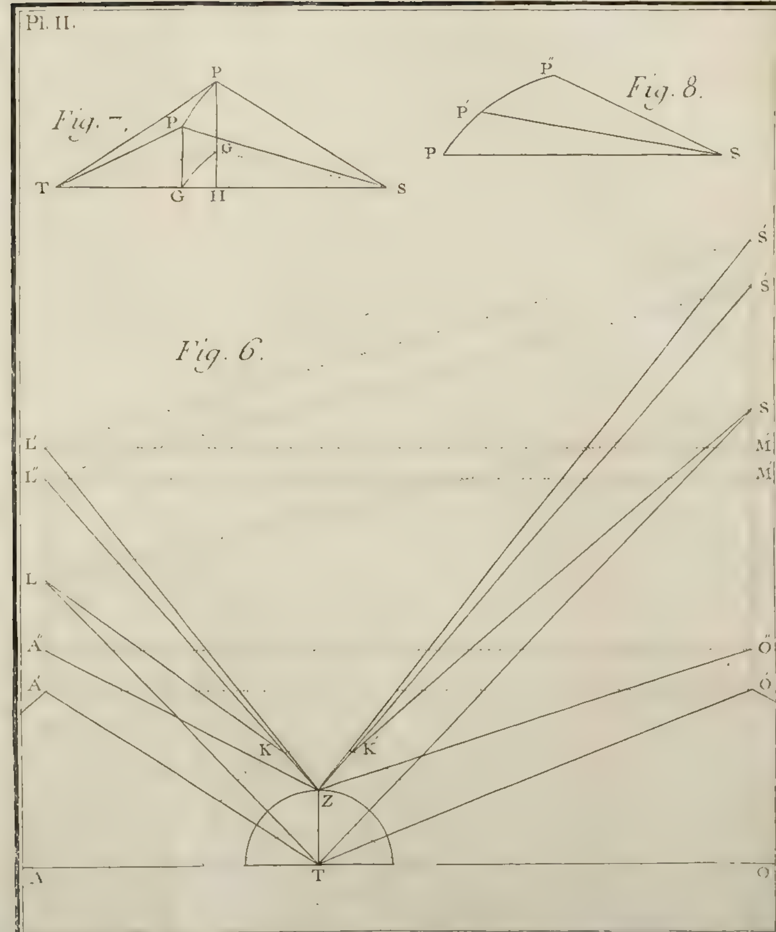
Pl. I.
Fig. 1.
X
K
Q
L
O
h
G
A
Fig. 2.
P
C
Q
B
E
L′
L
h′
h
H′
H
Fig. 3.
B
Q
C′
C
A
E
a
Fig. 4.
Z′
Z
L″
L′
P
L
Fig. 5.
Z
P
L
E

Y le tr Sculp.



Y. le G. Sculp.

Pl. II.



MÉMOIRE SUR LE FLUX ET LE REFLUX DE LA MER, ET SPÉCIALEMENT SUR LES MARÉES DES ÉQUINOXES.

Par M. DE LA LANDE.

14 Novemb. 1772.

LA connoissance des Marées, de leur cause, de leurs périodes & de leurs variations, est un des avantages que l'on a retirés de la découverte de l'attraction universelle; mais on n'a pas encore déduit de ce principe toutes les conséquences qu'il renferme, & il semble qu'on en ait tiré des conséquences qu'il ne renfermoit pas; sur-tout par rapport aux marées des Équinoxes. C'est l'objet de ce Mémoire, dans lequel j'examine si les marées des Équinoxes sont toujours les plus fortes, comme on le croit communément; quelle est la cause qui a pu accréditer cette opinion & la faire regarder comme un principe d'expérience, & même comme une conséquence de la théorie.

Pour donner une idée simple de cette question, je considérerai le fait principal à la manière de Newton, Bernoulli, Mac-Laurin & Euler, qui ont le plus approfondi cette matière en 1741. Je suppose que l'attraction de la Lune change la couche aqueuse dont la Terre est presque environnée, en un sphéroïde elliptique alongé vers la Lune; Newton n'avoit pas démontré que cette figure étoit elliptique, c'est Mac-Laurin qui en a donné le premier une démonstration rigoureuse: j'ai rendu toute cette théorie très-élémentaire & très-simple dans le troisième volume de mon Astronomie, *édition de 1771*.

Le Soleil & la Lune en conjonction attirent les eaux de l'Océan dans l'endroit où ils répondent perpendiculairement, plus qu'ils n'attirent le centre de la Terre, parce que les eaux en sont plus près de $1432\frac{1}{2}$ lieues; au contraire les deux astres

attirent les eaux qui leur ſont directement oppoſées, moins qu'ils n'attirent le centre qui en eſt plus voiſin : ainſi les eaux ſupérieures s'approchent de la Lune & du Soleil plus que la Terre; les eaux inférieures moins que la Terre. Ces deux raiſons contraires produiſent le même effet, puiſque les eaux s'éloignent également du centre de la Terre, ſoit qu'elles ſoient forcées de ſe rapprocher du centre de la Lune, ſoit que la Terre les fuie, pour ainſi dire, en cédant plus que les eaux à l'attraction de la Lune.

C'eſt ainſi que la maſſe des eaux de la mer, qui recouvre le noyau terreſtre, eſt transformée en un ovale ou ſphéroïde elliptique alongé; le grand axe a environ deux pieds de plus que le petit diamètre, ſuivant les nouvelles obſervations que j'ai reçues de la mer du Sud où les marées ſont les plus libres. Ce grand axe eſt dirigé vers la Lune, ſur-tout au temps de ſa conjonction avec le Soleil, ou du moins dirigé vers un point qui eſt toujours à-peu-près à la même diſtance de la Lune: nous ferons ici abſtraction de cette différence pour ſimplifier la queſtion qui fait l'objet de ce Mémoire.

J'obſerverai ſeulement que d'après cette hypothèſe, l'on trouve facilement la hauteur de la Marée pour un lieu & une heure quelconques, par les Tables des hauteurs du Soleil, qui ſont utiles d'ailleurs aux Aſtronomes.

Cela m'a déterminé à en faire calculer pour différentes latitudes, dans la forme de celles que j'ai publiées pour Paris dans la Connoiſſance des Temps de 1762.

J'en ai déjà pour la latitude de Londres & pour celles de Péterſbourg & d'Uranibourg. M.[rs] Trebuchet & Mougin ont bien voulu s'en occuper; M. Lévêque, Hydrographe du Roi à Nantes, & pluſieurs autres Amateurs de l'Aſtronomie, m'ont offert leurs ſecours pour de ſemblables calculs: avec ces Tables on trouvera, ſans peine, l'état de la Marée pour un jour & pour une heure quelconques, ayant égard à toutes les circonſtances, la durée de l'aſſéchement dans un port d'une hauteur quelconque, & tout ce qui dépend de la marée.

Cette hypothèſe, lorſqu'on y applique le calcul, répond

aſſez bien aux phénomènes généraux des *Marées*, du moins quant aux rapports, aux intervalles & aux variations des temps & des hauteurs: je m'en ſuis aſſuré en calculant tout à la rigueur, ſur-tout à l'occaſion d'un procès important où l'Académie avoit été conſultée, & où il s'agiſſoit de la nullité de pluſieurs procès-verbaux faits dans un Siége d'amirauté.

A l'égard de la quantité abſolue de la hauteur de la marée, elle dépend uniquement de la ſituation des côtes; je ne ſais ſur quoi ſe fondoit M. Bernoulli, en eſtimant que les marées naturelles & primitives de la mer du Sud devoient être de 8 pieds: elles ne paſſent pas 1 pied dans le milieu de la grande mer Pacifique, ſuivant l'obſervation que M.[rs] Banks & Solander m'ont communiquée; 3 pieds dans le milieu de la mer du Nord & dans la mer des Indes, ſuivant M. le Gentil; & 5 pieds à Rodrigues: elles vont juſqu'à 46 pieds à Saint-Malo, mais c'eſt l'endroit de la Terre où les plus grandes marées ont été obſervées juſqu'à préſent.

Le ſommet du ſphéroïde aqueux dirigé vers la Lune, la ſuit dans le mouvement diurne, & va ſucceſſivement inonder tous les pays qui ſont autour de la Terre, ſous le parallèle diurne que la Lune décrit.

Quand les deux aſtres ſont dans l'Équateur, la marée y eſt auſſi plus grande, puiſque le ſommet du ſphéroïde parcourt tous les pays qui ſont ſitués ſous la Ligne équinoxiale; mais les pays ſitués ſous le Tropique doivent avoir moins d'eau que ſi la Lune étoit à leur zénit, puiſqu'ils ſont à 23 degrés du ſommet du ſphéroïde. Il en eſt de même à proportion pour tous les pays ſitués dans les Zones tempérées; la marée ſupérieure, ſuivant cette théorie, doit y être plus grande quand la Lune eſt dans le Tropique voiſin, que quand elle eſt dans l'Équateur, & plus grande par conſéquent dans le Solſtice que dans l'Équinoxe: ainſi la théorie qui eſt d'ailleurs très-d'accord avec les phénomènes obſervés, ſemble être ici dans une eſpèce de contradiction, avec la perſuaſion où l'on eſt ſur nos côtes, que les marées de l'Équinoxe ſont toujours les plus grandes.

Newton a été mal compris.

Feu M. Cassini *(Mém. Acad. 1713, page 273)* dit que suivant M. Newton, l'effet du Soleil & de la Lune dépend de leur déclinaison; que le Soleil & la Lune en s'éloignant de l'équateur vers les pôles, perdent peu-à-peu de leur effort & causent des marées plus petites dans les syzygies des solstices que dans celles des équinoxes, mais plus grandes dans les quadratures des solstices. Cette manière d'expliquer Newton n'est pas conforme à sa théorie; il dit seulement *(Prop. 37, liv. III, tome III, page 541)* que la force de la Lune pour élever les eaux de la mer sous l'équateur, diminue dans les quadratures, parce que si le Soleil n'a point de déclinaison, la Lune, à 18 degrés & demi des quadratures, a environ $22^d\ 13'$ de déclinaison; ainsi la force réduite au plan de l'équateur, diminue comme le carré du cosinus de la déclinaison; mais cela est vrai seulement pour un lieu situé sous l'équateur : quand on passe à des latitudes australes ou boréales, la marée doit augmenter si la Lune & le Soleil approchent du zénit.

Tel seroit certainement l'état des choses si la Terre étoit entièrement recouverte par les eaux, sans aucune interruption de continens & de terres, & sans aucune impulsion étrangère; dans cet état les marées des équinoxes ne seroient point les plus grandes; mais les eaux resserrées entre l'Afrique & l'Amérique, & agitées par des vents très-variables sur les côtes d'Europe, doivent suivre des directions différentes. Voyons donc ce que l'observation peut nous apprendre à cet égard.

Strabon, le plus ancien Auteur qui ait parlé des marées d'une manière exacte, nous donne la plus ancienne observation qu'on ait jamais faite à cet égard, & la première preuve contre le système des grandes marées des équinoxes. Après avoir dit, d'après Possidonius, que les grandes marées des nouvelles & des pleines Lunes ne sont pas les mêmes en tout temps, il ajoute: « on tient pour constant qu'aux environs du solstice » d'été, les abaissemens & les élévations de la mer sont les plus » forts. Possidonius conjecture que les marées diminuent en- » suite jusqu'à l'équinoxe, & augmentent de nouveau jusqu'au

ſolſtice d'hiver. . . Séleucus s'étant trouvé à Cadiz, dans le « temple d'Hercule, au ſolſtice d'été, remarqua une grande « marée aux environs de la nouvelle Lune; les eaux du Bætis « qui ordinairement couvroient à peine les rivages, ſe répan- « dirent tellement que les Soldats ſe trouvèrent dans l'eau, « quoiqu'à 700 ſtades ou 30 lieues de la mer; tous les endroits « voiſins de la mer, à 30 ſtades ou une lieue & demie de « diſtance, étoient inondés, & l'on n'en diſtinguoit que les « lieux plus élevés en forme d'îles; le ſol du temple d'Hercule « & le mole du port de Cadiz furent couverts d'eau juſqu'à « la hauteur de 10 coudées, qu'il meſura lui-même. *(Strabon,* « *liv. III, page 174, édit. 1620).* »

Voilà les grandes marées des ſolſtices, d'accord avec la théorie, & obſervées en Eſpagne il y a dix-huit cents ans.

M. Tofiño, Directeur de l'Académie de Marine à Cadiz, m'écrit à ce ſujet que les marées des ſyzygies y montent de 12 pieds, excepté dans les grandes marées des équinoxes; & lorſque le vent eſt du troiſième ou quatrième quart, à compter du nord, on ne ſauroit diſtinguer par-là ſi c'eſt l'équinoxe ou le vent qui eſt la cauſe de ces grandes marées.

Wallis, dans ſon Traité *de Æſtu Maris,* fait en 1666, *(Opuſc. t. II, p. 741 & 746)* dit qu'après des obſervations de pluſieurs années, il penſe que ce n'eſt point vers les équinoxes, mais vers les commencemens de Février & de Novembre, du moins ſur les côtes d'Angleterre, que les grandes marées s'obſervent.

L'Académie ſecondée par le Miniſtère, fit faire au commencement du ſiècle, un grand nombre d'obſervations ſur les marées: je n'ai pu découvrir les regiſtres originaux de ces obſervations faites à Breſt & ailleurs, depuis 1710 juſqu'en 1716; je n'ai pu conſulter que ce qui en eſt rapporté dans les Mémoires de l'Académie, & ſeulement à l'occaſion des conſéquences qu'on vouloit alors en tirer. C'eſt un défaut dont on ne revient point encore, malgré l'expérience qui ne ceſſe de nous le mettre ſous les yeux; on publie des obſervations relatives à un but ou à une hypothèſe, on y met les

circonſtances dont on a envie de faire uſage, ou qui intéreſſent l'objet qu'on ſe propoſe; on oublie quelquefois que des obſervations bien circonſtanciées nous ont ſervi à tirer des conſéquences oppoſées à celles qu'on avoit en vue en les publiant: c'eſt ce qui m'eſt arrivé; auſſi ces obſervations, telles qu'elles ſont dans les Mémoires de l'Académie & par extrait, ne m'ont pas été tout-à-fait inutiles.

On voit d'abord dans les Mémoires de 1710, que les marées de l'équinoxe ne furent point trouvées les plus grandes, & que les vives eaux dépendoient principalement de la nouvelle Lune & du périgée. On y trouve même cette remarque générale ſur les marées qui ſont près des équinoxes, tant dans les nouvelles que dans les pleines Lunes; qu'il s'en trouve quelques-unes qui ſont hautes & d'autres qui ſont baſſes, de ſorte qu'on ne peut pas prendre pour règle générale, que les grandes marées arrivent au Havre-de-grâce dans les marées qui ſont près des équinoxes *(Mém. 1710, page 369)*.

Dans la plupart des autres obſervations, il ne me paroît pas que la règle des grandes marées aux équinoxes ſoit fort conſtante; car ſi le 17 Mars 1714, deux jours après la pleine Lune, il y eut à Breſt 23 pieds 3 pouces & demi de marée, il n'y eut le 12 Avril 1713, que 17 pieds 3 pouces, & le 25 Avril, que 17 pieds 4 pouces *(Mém. 1714, p. 254)* la Lune étant vers ſes moyennes diſtances: cependant les marées qui ſuivent l'équinoxe devroient être plus grandes que celle du 17 Mars qui le précède, mais ici la proximité de la Lune à la Terre doit avoir produit cette inégalité, & je ne vois pas comment il reſteroit un effet conſidérable qu'on pût attribuer à l'équinoxe.

Le 26 Février 1712, il y eut 22 pieds 5 pouces de marée, deux jours après la nouvelle Lune périgée; & à l'exception de la marée extraordinaire de 23 pieds 1 quart, obſervée le 17 Mars 1714, & qui eſt la plus grande qu'on ait vue à Breſt, il n'y en a pas eu de plus forte; cependant il s'en falloit beaucoup que ce fût le temps de l'équinoxe.

Le 4 Octobre 1724, il y eut à Londres une marée prodigieuse, mais le 27 Février 1735, il y eut aussi une marée extraordinairement haute à Londres & à Ostende; ainsi la première ne doit pas être plus attribuée à l'équinoxe que la seconde.

Le 27 Novembre 1772, la marée a été si forte à Portsmouth, qu'on n'avoit jamais vu la mer si haute, & qu'une partie des fortifications de Blockhorse a été entraînée par l'impétuosité des vagues *(Gazette de France, page 462).* On a observé à Granville, le 23 & le 25 Février 1773, une des plus grandes marées dont on ait connoissance dans ce port; le vent de Sud-ouest étoit si violent, que la mer a renversé des ouvrages considérables qu'on avoit entrepris dans ce port.

Lorsqu'on eut à Brest, le 17 Mars 1714, 23 pieds 3 pouces $\frac{1}{2}$ de marée, la Lune étoit à la vérité périgée & en opposition, mais on ne nous a rien transmis sur les circonstances particulières de cette observation, il faut bien qu'elles y aient influé, puisque le périgée de la Lune n'a pas suffi, dans d'autres équinoxes, comme le 23 Septembre 1714, pour produire une si grande élévation: d'ailleurs j'observe que ce fut moins l'élévation qui fut extraordinaire le 17 Mars 1714, que la descente de 3 pieds 6 pouces; car le 13 Octobre 1711 & le 6 Août 1713, la mer avoit monté presque aussi haut sur l'échelle; mais elle n'étoit descendue qu'à un pied 10 pouces; ce qui marque quelque secousse violente pour le 17 Mars 1714.

Le 7 Août 1713, la hauteur absolue de l'eau, sur l'échelle du port de Brest, surpassa même d'un pied celle du 17 Mars 1714; c'étoit le lendemain d'une pleine Lune périgée: & le 23 Septembre 1714, quoique dans une pleine Lune périgée équinoxiale, la marée eut cependant 2 pieds 4 pouces de moins que le 17 Mars.

On voit au contraire que le 30 Décembre 1712, dans la nouvelle Lune périgée, il y avoit 20 pieds 10 pouces de marée, à peu-près comme le 14 Septembre précédent; en

ſorte que le ſolſtice & l'équinoxe donnoient la même hauteur, quoique la diſtance de la Lune à la Terre dans cet équinoxe, ne fût pas de beaucoup plus grande que dans le ſolſtice; ainſi les obſervations même qui ſont rapportées dans nos Mémoires, ne s'accordent pas à prouver que les grandes marées ſoient celles des équinoxes.

M. de Fourcroy, Ingénieur en chef à Calais, & l'un des Correſpondans les plus utiles de l'Académie, s'eſt occupé ſpécialement des marées dans le port de Calais & dans les environs; il m'a envoyé les Journaux d'obſervations qu'il a fait faire & j'en placerai une partie à la fin de ce Mémoire: elles ſeront précieuſes en ce qu'elles ſont les ſeules, juſqu'à préſent, où l'on ait marqué les circonſtances du vent. Je deſirerois beaucoup que cet exemple pût être ſuivi à Breſt ou dans quelqu'autre Port plus ouvert à la marée que n'eſt celui de Calais, & où l'on eût la baſſe mer ainſi que la haute mer.

M. de Fourcroy, à qui j'avois fait part de mes réflexions à ce ſujet, m'écrivoit le 27 Mai 1770. « Les hauteurs de » la marée confirment journellement votre ſentiment contre le » préjugé des équinoxes; elles me paroiſſent démontrer que » dans tous les mois également, c'eſt la concurrence ſeule du » périgée de la Lune avec la ſyzygie, qui donne les plus hautes » marées, ſur-tout quand les vents concourent encore à refouler les eaux vers le lieu des obſervations ».

Je vois en effet par la comparaiſon de ces obſervations de Calais, que toutes les marées extraordinaires de cette côte ſont accompagnées des vents de Nord, de Nord-oueſt ou Nord-nord-oueſt; ces airs de vents doivent refouler ſur Oſtende, les eaux que cette large mer reçoit du flot. Dans tout autre Port, on a toujours un vent particulier qui en augmente les marées, & qui accumule les eaux ſur le rivage, ſoit par une impulſion directe, ſoit par la réflexion des rivages oppoſés. C'eſt ainſi que les marées de Saint-Malo ſurpaſſent toutes celles des côtes de France, à cauſe de la réflexion que produiſent les côtes d'Angleterre.

La

La pleine mer moyenne des ſyzygies, par un milieu entre deux cents ſoixante-cinq obſervations de M. de Fourcroy, eſt de 15 pieds 5 pouces ſur l'échelle qui eſt à l'écluſe de Calais; le point de 0 eſt environ de 3 pieds au-deſſus du niveau probable de la baſſe mer moyenne des ſyzygies; on l'a eſtimé par des ſondes, faites en 1730, à quelque diſtance de l'entrée du chenal; car dans les baſſes eaux l'écluſe eſt à ſec, & l'on ne peut plus y faire d'obſervations.

Au lieu de 15 pieds $\frac{1}{2}$ qui eſt la hauteur moyenne dans les ſyzygies, on a 17 pieds $\frac{1}{2}$ pour la pleine mer la plus haute des ſyzygies dans le périgée de la Lune; on l'a obſervée il eſt vrai juſqu'à 18 pieds 8 pouces, le 2 Janvier 1767; mais c'eſt la plus haute marée dont on ſe ſouvienne à la côte de Flandre, le vent étoit au Nord-nord-oueſt, c'étoit deux jours après la conjonction, & la parallaxe étoit d'environ 61 minutes: on voit que cette grande marée n'eſt point arrivée au temps des équinoxes, mais au contraire peu après le ſolſtice. Il en eſt de même de pluſieurs marées extraordinaires; & en examinant le regiſtre de ces obſervations, je trouve des marées de 16 pieds ſur l'échelle, vers le ſolſtice d'hiver, & de 15 pieds vers le ſolſtice d'été, auſſi-bien que dans les équinoxes, toutes les fois que le vent eſt au Nord ou au Nord-oueſt.

A Dunkerque, ſur l'échelle de l'écluſe de Bergues, dont M. de Fourcroy a raſſemblé les obſervations, l'élévation moyenne de la pleine mer en ſyzygie, eſt de 17 pieds 6 pouces, la plus grande 20 pieds 4 pouces, la moindre 15 pieds 9 pouces; la plus grande hauteur des mortes eaux 15 pieds 9 pouces, la plus baſſe 13 pieds 1 pouce, la moyenne 14 pieds 5 pouces. Or, la marée du 31 Décembre 1720, y monta juſqu'à 22 pieds 3 pouces; celle du 2 Décembre 1763, à 22 pieds; & celle du 2 Janvier 1767, à 22 pieds 6 pouces: de ces trois marées, les plus fortes dont on ait conſervé le ſouvenir à Dunkerque, aucune n'approche des équinoxes, mais toutes ſont vers le périgée de la Lune, dont j'ai fait remarquer l'influence conſtante ſur les

marées, & probablement ont été augmentées par le vent.

En 1769, on obſerva avec plus de ſoin qu'à l'ordinaire, à ma ſollicitation, les marées à Calais; le 8 Mars, jour de la nouvelle Lune, & les jours ſuivans, la plus grande hauteur de la mer, fut entre 14 pieds $\frac{1}{2}$ & 15 pieds $\frac{1}{4}$, la Lune étant périgée; en ſorte qu'elle n'alla pas même au terme des marées moyennes des ſyzygies, qui eſt de 15 pieds 5 pouces; le vent étoit à l'Eſt, médiocre ou calme.

Le 23 Mars, lendemain de la pleine Lune, & le 24, quoique la Lune approchât de ſon périgée, la mer n'alla que juſqu'à 14 pieds 8 pouces, parce que le vent étoit Nord-oueſt médiocre, & quoique la différence de l'apogée au périgée de la Lune ſoit par-tout très-forte & très-ſenſible, elle étoit totalement détruite par la différence des deux vents, quoique médiocres l'un & l'autre.

Le 6 Avril 1769, jour de la conjonction, & les jours ſuivans, la Lune étant périgée, la mer alla de 15 pieds 2 pouces à 15 pieds 10 pouces, le vent avoit été Nord-eſt $\frac{1}{4}$ Eſt fort le 8 Avril, mais ce vent n'étant pas favorable à la marée pour Calais, il n'y eut qu'une marée moyenne, quoique ce fût vers le temps de l'équinoxe.

Tels ſont les réſultats généraux des obſervations que j'ai examinées & diſcutées, voyons maintenant comment les Auteurs qui ont traité ce ſujet ſe ſont tirés de cette partie de la Théorie.

Il y a eu des Obſervateurs qui pour déterminer la grandeur de la marée, prenoient le milieu entre les deux hauteurs d'un même jour, c'eſt-à-dire, entre la marée ſupérieure & la marée inférieure. Par cette méthode, on trouveroit pour les ſolſtices une hauteur moindre qu'elle n'eſt effectivement, parce que dans les ſolſtices il y a, ſuivant la théorie, une grande marée quand la Lune, ou ſon point oppoſé, paſſe près du zénit, & une fort petite quand la Lune paſſe au méridien dans la partie inférieure.

Par exemple, au ſolſtice d'été, ſi la Lune eſt en conjonction dans l'écliptique même, elle paſſe à $25^d\frac{1}{3}$ du zénit de Breſt,

ce qui doit donner une grande marée; mais douze heures après, la Lune passe au méridien $17^d \frac{2}{3}$ au-dessous de l'horizon, le sommet opposé du sphéroïde aqueux, est à $72^d \frac{1}{3}$ du zénit, ce qui doit faire une marée très-petite; elle se réduiroit même à rien, suivant la Théorie, si la Lune passoit au méridien dans l'horizon vers le Nord: comme cela arrive dans le Nord de l'Europe, vers 61 degrés de latitude, sur les côtes de Suède & de Russie.

Cependant quoiqu'il doive y avoir une grande marée & une petite dans le même jour, on observe en général, que les marées consécutives sont toujours moins inégales que ne l'indique la Théorie, où l'on n'a pas d'égard au mélange de deux marées, & moins que la cause ne l'exigeroit, parce que la grande marée augmente la plus petite, & celle-ci diminue la première; elles se suivent de trop près pour que la mer ait le temps de perdre sa situation naturelle, d'en changer deux fois le jour & de se prêter à toute l'élévation que devroit avoir la grande marée, que la suivante contrebalance en partie.

M. Bernoulli, persuadé que les plus grandes marées arrivoient en effet aux environs des équinoxes, comme on le dit vulgairement, & voulant expliquer ce phénomène, fut obligé d'avoir recours à deux suppositions qui ne sont point démontrées & qui paroîtront encore moins sûres, si la proposition qui les lui fit adopter, se trouve être plus que douteuse; la première supposition, c'est que les marées qui ont lieu sur nos côtes dépendent de la partie de l'Océan, comprise entre l'Afrique & l'Amérique, vers 35 degrés de latitude, d'où elles s'étendent & se propagent jusqu'aux côtes de France par communication & de proche en proche. La seconde supposition de M. Bernoulli, c'est que deux marées consécutives dont l'une doit être grande & l'autre petite, se combinent & s'affectent mutuellement, de manière que l'une étant augmentée & l'autre diminuée, c'est à peu-près le milieu entre les deux qu'on observe & qu'on éprouve sur nos côtes. *(page 168 de l'édition de Newton des PP. Jacquier & le Seur)* A l'aide de ces deux suppositions, M. Bernoulli

ſe tira de la difficulté que lui faiſoient les marées des équinoxes & les déclinaiſons de la Lune.

Il eſt conſtant que par la théorie de M. Bernoulli, la marée d'en haut doit être plus grande quand la Lune eſt plus élevée, que quand elle eſt dans l'équateur; mais auſſi cette marée qui eſt plus grande, eſt ſuivie d'une autre qui eſt plus petite; le milieu entre ces deux marées conſécutives, ſe trouve être plus petit, tant qu'on ne paſſe pas 45 degrés; mais il eſt plus fort à des latitudes plus avancées. Ainſi, pour trouver une hauteur plus conſidérable ſur nos côtes, il falloit ſuppoſer que nos marées étoient moins l'effet d'une action immédiate de la Lune ſur la mer qui baigne nos côtes, que le réſultat des mouvemens imprimés à la maſſe d'eau qui avoiſine davantage les tropiques, & où l'étendue de la mer eſt plus vaſte, & ſe prête davantage à l'action lunaire; par-là on accordoit la théorie avec l'obſervation prétendue des grandes marées de l'équinoxe.

Mais M. Euler, qui travailloit dans le même temps à Péterſbourg ſur le même objet, prit un parti bien différent pour ſauver cette difficulté; il ne déféra point du tout à la perſuaſion générale des grandes marées des équinoxes; car à la fin du quatrième chapitre de ſon Traité ſur cette partie, il obſerve que ſi l'on prend le milieu entre les deux marées conſécutives d'un même jour, dont l'une eſt plus grande & l'autre plus petite, on aura une hauteur moyenne plus petite quand la Lune décline que quand elle eſt dans l'équateur. Cela eſt vrai, du moins tant qu'on eſt à des latitudes terreſtres qui ne ſont pas extrêmement grandes. Mais c'eſt le contraire, ajoute M. Euler, vers le 60.e degré de latitude; d'où il ſuit que dans les régions voiſines des pôles, les plus grandes marées ne doivent pas arriver au temps des équinoxes, mais plutôt vers les ſolſtices, en quoi la théorie eſt très-bien confirmée par l'expérience *(page 283)*. J'ignore de quelles obſervations M. Euler prétendoit s'étayer; mais je vais tâcher d'y ſuppléer.

En calculant la hauteur méridienne de la Lune & de ſon point oppoſé, de la manière que je l'ai expliqué dans mon

Aſtronomie, on voit que le carré du ſinus de la ſomme, plus le carré du ſinus de la différence de la déclinaiſon & de la hauteur de l'équateur étant partagé en deux, forme la hauteur moyenne, tandis que le carré du ſinus de la hauteur de l'équateur forme la hauteur de la marée dans les équinoxes. Or, ſi la hauteur de l'équateur eſt de 45 degrés, il eſt clair que la ſomme ſera le complément de la différence, & qu'en ajoutant les carrés de leurs ſinus, on aura toujours l'unité; ainſi, à 45 degrés de latitude, la hauteur moyenne eſt toujours la même, quelle que ſoit la déclinaiſon de la Lune; mais à 60 degrés de latitude, on trouve que quand la Lune a 23 degrés de déclinaiſon, la marée eſt plus grande d'un cinquième, que quand la Lune eſt dans l'équateur, elles ſont dans le rapport de 31 à 25 environ; mais c'eſt en prenant le milieu entre les deux marées conſécutives.

M. Euler, dans le ſixième chapitre de ſa Diſſertation, eſſaie de faire entrer dans le calcul, l'inertie des eaux, ou cette propriété phyſique des fluides, qui eſt de ne pouvoir prendre en un inſtant la figure qui convient aux forces dont ils ſont animés, & d'aller au-delà du mouvement qu'elles ont imprimé aux fluides.

Sans cette inertie, les eaux ſeroient toujours en équilibre avec les forces évaluées géométriquement; elles en ſuivroient tous les degrés & toutes les variations, & perdroient à l'inſtant tout le mouvement qu'elles auroient reçu dans les temps précédens, pour n'avoir que celui dont la cauſe agit dans l'inſtant donné. C'eſt cette ſuppoſition qu'on admet pour les marées, lorſqu'on ſuppoſe un ſphéroïde alongé dont le grand axe, eſt toujours dirigé vers l'Aſtre qui attire, & en ſuit tous les mouvemens. Mais pour appliquer le réſultat de ſes calculs aux phénomènes de la marée, M. Euler propoſe de chercher par les obſervations, quelle eſt la latitude terreſtre où les plus grandes marées répondent aux plus grandes déclinaiſons? il ſuppoſe, dans un exemple, que c'eſt à 60 degrés, mais il donne une formule par laquelle on trouvera la déclinaiſon qui doit produire, à chaque latitude, la plus grande marée,

lorſqu'on aura déterminé, par obſervation, le coëfficient qui dépend de l'inertie *(page 310)*; en attendant, ajoute-t-il, nous ne déterminons rien à cet égard, mais nous attendrons qu'on ait fait avec ſoin des obſervations à ce ſujet.

Dans le ſeptième chapitre, M. Euler trouve que vers 50 degrés de latitude, la déclinaiſon de la Lune qui doit occaſionner les plus grandes marées eſt de 16 degrés, ſuivant l'hypothèſe la plus probable de l'inertie; ce qui s'accorde fort bien, ajoute-t-il, avec les obſervations faites ſur les côtes ſeptentrionales de la France, par leſquelles on voit que les plus grandes marées ont coutume d'arriver dans les ſyzygies de Février & de Novembre, où la Lune a à peu-près cette déclinaiſon. Enfin, M. Euler finit en diſant, qu'à 76 degrés de latitude, on trouvoit fauſſe la règle des plus grandes marées équinoxiales, & que comme on n'a pas coutume de faire des obſervations ſi loin vers le Nord, on peut admettre, d'après la théorie, que les plus grandes marées arrivent aux environs des équinoxes, pourvu qu'on ne ſoit pas trop près du pôle, & qu'on meſure la hauteur par le milieu arithmétique pris entre les deux marées conſécutives *(page 333)*; mais il ne laiſſe pas de convenir que les obſervations ne confirment pas décidément cette théorie, & que cette manière de meſurer les grandes marées n'eſt pas naturelle *(page 332)*. Tout cela prouve la difficulté qu'il y a de concilier les grandes marées de l'équinoxe dans nos régions boréales, avec l'attraction du Soleil & de la Lune.

M. Caſſini, qui a diſcuté beaucoup d'obſervations & qui en a tiré avec ſagacité les phénomènes généraux des marées dans pluſieurs volumes de l'Académie, a éprouvé la difficulté qui nous occupe; & je m'arrêterai plus long-temps à ce qui le concerne, pour avoir occaſion de diſcuter à mon tour les obſervations dont il s'eſt étayé. Suivant M. Caſſini, les marées des équinoxes paroiſſent en général plus grandes que celles d'été *(Mém. 1720, page 162)*, & en même temps plus grandes quand la Lune eſt dans l'Équateur, que quand elle a une grande déclinaiſon *(Mém. 1710, page 261)*. M. Caſſini

va même jufqu'à dire, que l'effet des déclinaifons eft environ la moitié de celui qui eft caufé par les diverfes diftances de la Lune à la Terre *(Mém. 1714, page 258)*; il trouvoit auffi celles du folftice d'hiver plus grandes que celles du folftice d'été *(Mém. 1710, page 361)*; mais peut-être cela vient-il de l'abondance des pluies, de la fonte des neiges & de la force des vents d'oueft, qui fur nos côtes doivent refouler les eaux, & qui font ordinairement plus rares en été que dans les équinoxes ou dans l'hiver.

M. Caffini jugeoit auffi que la déclinaifon du Soleil pouvoit faire à peu-près la moitié de l'effet de celle de la Lune *(Mém. 1714, page 258)*; ce qui revient au quart de celui des grandes diftances de la Lune à la Terre; cela ne s'accorde point avec la théorie, mais auffi l'on ne peut l'établir par les obfervations; la différence eft trop petite pour qu'on puiffe la démêler parmi les circonftances locales qui influent fur les marées; « cependant, dit M. Caffini, il paroît par ces obfervations que les différentes hauteurs qu'on obferve dans les « marées dépendent de deux caufes, dont la principale, & qui « jufqu'à préfent, fe trouve la plus confirmée par nos obfervations, eft la diverfe diftance de la Lune à la Terre; la feconde, « eft fa proximité ou fon éloignement de l'équinoxial; & que « la combinaifon de ces deux caufes produit les principaux « phénomènes qu'on obferve dans la hauteur des marées ».

Si les marées des fyzygies des équinoxes étoient plus grandes que celles des fyzygies qui arrivent vers les folftices, il s'enfuivroit néceffairement que les marées des quadratures feroient, dans les folftices, plus grandes que dans les équinoxes; en effet, quand le Soleil eft dans le folftice, & que la Lune eft en quadrature, elle eft à 90 degrés du Soleil, elle eft donc vers l'équinoxe; or, fon effet fur les marées eft plus fort que celui du Soleil: donc les marées des folftices, en quadratures, devroient être plus confidérables que celles des équinoxes, pour le temps de la quadrature. Voyons ce que fourniffent les obfervations à ce fujet. M. Caffini ayant comparé les petites marées des quadratures les 15 & 28 Juin 1712, avec

celles des 16 & 31 Mars; il en conclut que la hauteur moyenne des petites marées dans les équinoxes eſt de 7 à 8 pouces moindre que dans les ſolſtices; il attribue cet effet aux déclinaiſons de la Lune, & il en conclut que les différentes hauteurs qu'on aperçoit dans les marées des équinoxes & des ſolſtices, ne doivent point ſe régler préciſément ſur le temps des équinoxes & des ſolſtices, mais ſur la plus grande ou la plus petite déclinaiſon de la Lune *(Mém. 1713, page 22).* Je remarquerai à ce ſujet, 1.° que la différence eſt bien petite pour établir une règle; 2.° que les obſervations même citées par M. Caſſini, ne prouvent pas ce qu'on ſe perſuade communément que les marées des équinoxes ſont les plus grandes.

M. Caſſini, dans les *Mémoires de 1720, page 163,* rapporte deux comparaiſons de marées dans l'apogée & dans le périgée de la Lune, pour prouver que quand la Lune a une grande déclinaiſon, les marées ſont plus petites.

		Déclinaiſ. de la Lune.	*Marée totale à Breſt.* pieds.	pouces.	
Dans l'apogée	8 Sept. 1714,	2^d 20′ B.	15.	11.	matin.
			16.	5.	ſoir.
	5 Juin 1716,	19. 0. A.	15.	2.	matin.
			15.	11.	ſoir.
Dans le périgée	23 Sept. 1714,	4. 15. B.	18.	1.	matin.
			19.	2.	ſoir.
	21 Mai. 1716,	17. 45. A.	18.	1.	matin.
			18.	5.	ſoir.

Mais on voit à peine ici quelques pouces de moins dans les grandes déclinaiſons; ainſi la différence eſt trop petite pour pouvoir former une règle de la diminution des marées par la déclinaiſon de la Lune, tandis que les différences produites par le vent ſont incomparablement plus fortes. Mais à la *page 360*, M. Caſſini rapporte deux autres obſervations faites au port de l'Orient le 19 Juin 1716 & le 24 Septembre

1718,

1718, à pareilles distances de la Lune. Dans la première, la déclinaison étoit de 19 degrés boréale, & la hauteur de la mer fut de 13 pieds $\frac{1}{2}$; dans celle du 24 Septembre, la déclinaison étoit de 0^d $50'$, & la marée de 15 pieds $\frac{2}{3}$, plus grande de 2 pieds 2 pouces. Cette différence est bien plus forte que ne l'exigeoit le système de M. Cassini; elle prouve trop & devient embarrassante même pour lui, à moins qu'on ne l'attribue aux vents d'ouest, qui règnent si souvent dans l'équinoxe.

La marée de 23 pieds 3 pouces 6 lignes, qui fut observée le 17 Mars 1714, la plus forte qu'on ait vue à Brest, est aussi des plus favorables à ce système *(Mém. 1714, p. 254)*; mais il faut observer que la Lune étoit périgée; sa distance n'étoit que de 939 parties (dont la moyenne est 1000) le 15 Mars précédent, sa déclinaison étoit alors presque nulle; le 8 Juillet 1713, la distance à la Terre étoit la même, & la déclinaison, 21 degrés australe; & le 9, la marée ne fut que de 20 pieds 5 pouces 8 lignes, moindre de 2 pieds 9 pouces 10 lignes que dans celle du 17 Mars 1774. Je voudrois qu'on nous eût transmis l'état de l'atmosphère & du vent dans cette marée extraordinaire du 17 Mars; j'ai peine à croire qu'on n'y eût pas trouvé la cause de cette grande élévation, comme nous l'avons trouvée dans les observations de Calais & de Dunkerque, où les marées extraordinaires ne concourent point avec les équinoxes.

Plusieurs autres observations citées dans les Mémoires de l'Académie, prouvent que l'effet des équinoxes & des déclinaisons pour l'augmentation des marées n'est pas aussi constant & aussi sensible que celui des syzygies & des apsides. On les trouvera toutes réunies dans un Traité du flux & du reflux de la mer, que je me propose de publier.

Le 23 Septembre 1714, jour de la pleine Lune périgée, la déclinaison septentrionale étant de 4^d $15'$ seulement, la mer monta de 18 pieds 1 pouce le matin, & le 6 de 19 pieds 2 pouces au-dessus du point fixe (il faut en ôter 6 pieds $\frac{1}{2}$, si l'on veut avoir la hauteur au-dessus du niveau

naturel des eaux). Le 21 Mai 1716, jour de la nouvelle Lune, à pareille distance, la mer monta le soir à 18 pieds 5 pouces, & le matin à 18 pieds 1 pouce. Ainsi, dans l'équinoxe de 1714, la marée d'en haut étoit plus petite de 4 pouces que le 21 Mai 1716; il me semble qu'on doit tirer de ces deux observations une conséquence toute différente de celle qu'en tiroit M. Cassini, en comparant une marée d'en haut avec une d'en-bas *(Mém. de l'Acad. 1720, page 163)*.

Le 8 Septembre 1714, jour de la nouvelle Lune apogée, la déclinaison de la Lune étant de $2^{d} 20'$ boréale, la hauteur de la mer fut observée le matin de 15 pieds 11 pouces, & le soir de 16 pieds 5 pouces.

Le 5 Juin 1716, jour de la pleine Lune apogée, la déclinaison méridionale de la Lune étant de 19 degrés, la hauteur fut le matin de 15 pieds 2 pouces, & le soir de 15 pieds 11 pouces; ainsi, l'on trouve cette fois une marée peu différente de celles de l'équinoxe, malgré la grande déclinaison du Soleil & de la Lune.

Enfin, M. Cassini lui-même est obligé de rejeter l'influence des équinoxes (dans les *Mémoires de 1720, page 162)*, en considérant que dans le solstice d'été de 1714, la nouvelle Lune donna une marée plus grande que celles des deux nouvelles Lunes de l'équinoxe d'automne. On peut dire à la vérité, que dans la nouvelle Lune du solstice, il y avoit une fort grande déclinaison, tandis qu'elle étoit nulle dans celles de l'équinoxe; mais l'effet des distances de la Lune à la Terre, surpasse & fait disparoître celui des équinoxes & des déclinaisons lunaires.

La principale conclusion que je veuille tirer de tout ce qui précède, c'est que l'opinion générale des grandes marées de l'équinoxe, quoique peu d'accord avec la théorie générale, ne suffit pas pour qu'on puisse contester cette théorie; puisque le phénomène n'est pas constant, & que les vents suffisent pour en donner l'explication.

J'ai consulté souvent, dans mes voyages, à Brest & dans la Manche, les Mariniers & ceux qui travaillant dans les

ports, examinent mieux que personne les circonstances des grandes marées; ils estiment que les environs des équinoxes fournissent de plus grandes marées, tantôt avant, tantôt après la syzygie la plus voisine de l'équinoxe, mais ils ne sont pas précisément persuadés que ce soit l'effet de la syzygie de l'équinoxe; cela nous donne encore plus de liberté pour interpréter leur opinion, & nous permet d'attribuer ces grandes marées à la force & à la direction des vents qui sont ordinaires dans cette saison, mais qui ne concourent pas toujours avec la syzygie ni avec le périgée de la Lune.

Il y a, par rapport à l'état de l'atmosphère, des choses assez périodiques & assez réglées, même dans nos climats, pour qu'on soit étonné lorsqu'elles n'arrivent pas, & qu'on en oublie même les exceptions, quoique fréquentes; telles sont les gelées de Janvier, les ouragans de Mars, les chaleurs d'Août & les pluies de Septembre; tels sont aussi les vents de sud-ouest, qui amènent toujours ces pluies, & qui sont une cause assez constante pour avoir pu accréditer le préjugé des grandes marées des équinoxes. Les marins parlent souvent du coup de vent des morts, ce qui prouve qu'au commencement de Novembre on peut avoir de grandes marées, qui ne seroient pas les marées des équinoxes.

On observe, dans les nouveaux Mémoires de l'Académie de Philadelphie, que la partie orientale du continent de l'Amérique, & la partie orientale du continent de l'Asie ont beaucoup de rapport entre elles, à pareilles latitudes; que les mêmes vents y produisent les mêmes saisons, tandis qu'ils produisent des effets contraires dans les parties occidentales des deux continens. L'on saura un jour si les grandes marées qui arrivent souvent en Europe, dans le printemps & dans l'automne, ont lieu de même au nord de la Californie; il est probable qu'on y trouvera les vents du sud-ouest plus forts dans les mêmes temps de l'année.

Cette influence du vent sur les hauteurs de l'eau, s'observe sur-tout à Pétersbourg, où il n'y a point de flux ni de reflux; la mer y varie de 5 pieds, le vent d'ouest ou de sud-ouest

la fait monter; elle baiſſe par les vents d'eſt & de nord-eſt; le dégel & les pluies ne paroiſſent pas même y influer.

Ainſi, il me ſemble que la propoſition générale devroit être réduite à celle-ci: il y a preſque toujours dans les mois d'Avril & d'Octobre des vents d'oueſt qui refoulent les eaux & augmentent les marées ſur nos côtes, mais il en arrive de plus fortes en hiver. Ces grandes marées ne ſont pas l'effet des attractions du Soleil & de la Lune; elles ne contrediſent point la règle générale, c'eſt-à-dire, qu'elles ne ſont point contraires au ſyſtème de l'attraction.

Si ce Mémoire ne prouve pas que les grandes marées, lorſqu'elles arrivent aux environs des équinoxes, ſont produites par des cauſes étrangères à l'attraction; il prouvera du moins qu'il eſt utile de faire encore ſur les marées une ſuite d'obſervations exactes, d'en marquer toutes les circonſtances météorologiques, ſur-tout la direction & la force du vent, & de la publier en entier, pour ſervir aux recherches qui reſtent à faire ſur le flux & le reflux de la mer.

Obſervations des Marées, faites à Calais.

Les obſervations ſuivantes ont été faites à Calais ſur une échelle diviſée en demi-pieds, qui eſt à l'écluſe de la citadelle, ſur le radier, gravée ſur le bajoïer d'Oueſt, au-deſſous du buſc de cette écluſe. Elles ſont faites journellement par un ancien Ouvrier ou Matelot intelligent, logé par le Roi auprès de ſon écluſe pour la manœuvrer jour & nuit. Ces ouvriers ſont accoutumés à eſtimer d'un coup-d'œil la vraie hauteur de l'eau entre les diviſions qui ſont de ſix pouces, & à faire la déduction convenable pour les vibrations du clapotage ou de la vague. M. de Fourcroy, Ingénieur en chef à Calais, & Correſpondant de l'Académie, qui en tenoit un regiſtre exact, me les a envoyées comme étant bien faites, & cette collection eſt précieuſe à cauſe de la circonſtance du vent qui eſt marqué chaque jour; ce qui n'avoit point encore été fait. On n'avoit encore publié aucune ſuite d'obſervations ſur les marées; je ne donne même ici que les points principaux.

Pour donner une idée des hauteurs marquées dans la Table

ſuivante, il ſuffit de dire que dans la plus haute marée dont on ait connoiſſance à la côte de Flandre, la hauteur fut à Calais de 18 pieds 8 pouces, le 2 Janvier 1767, ſur l'échelle dont nous venons de parler.

	pieds.	pouces.
La pleine mer la plus haute des ſyzygies eſt ordinairement de	17.	6.
La pleine mer moyenne des ſyzygies, par un milieu entre deux cents ſoixante-cinq obſervations, en excluant celles des tempêtes, eſt, ſuivant M. de Fourcroy	15.	$5\frac{2}{5}$.
La pleine mer la moins haute des ſyzygies, & la plus haute des quadratures	13.	4.
La pleine mer moyenne des quadratures..............	10.	$10\frac{1}{2}$.
La pleine mer la moins haute des quadratures.........	8.	0.

Le niveau de la baſſe mer moyenne des ſyzygies, ou le point réduit de la baſſe mer des vives eaux, eſtimé par des ſondes faites en 1730, à quelque diſtance du chenal, eſt au-deſſous du zéro de l'échelle, ou du point de départ, d'environ trois pieds; mais comme le lieu où l'on fait les obſervations aſsèche tous les jours, on ne peut établir les points des baſſes eaux que par eſtime.

Dans la Table de l'établiſſement des ports & côtes de l'Europe, on lit que la mer monte de 18 pieds, depuis le Pas de Calais juſqu'à l'embouchure de l'Eſcaut; il paroît que c'eſt de 18 pieds & demi à Calais & à Douvres, & de 17 pieds $\frac{1}{2}$ à Dunkerque.

Toutes les marées extraordinaires de cette côte, ſont toujours accompagnées de vents de nord ou nord-oueſt, ou enfin nord-nord-oueſt, & comme ces airs de vents doivent refouler ſur Oſtende les eaux que cette large mer reçoit du flot, par l'eſpace de 150 lieues d'entre l'Écoſſe & l'Iſlande, tandis que la Manche & le Pas de Calais en ſont abrités par l'Angleterre, il n'eſt pas étonnant que toutes les grandes marées ſoient de moins en moins ſenſibles à la côte de France à meſure que l'on s'éloigne d'Oſtende, ſous le vent vers le ſud-oueſt.

Le réſultat de 15 pieds 5 pouces ſur l'échelle pour la hauteur

de la pleine mer des vives eaux, eſt un milieu entre des hauteurs qui vont depuis 13 pieds & demi juſqu'à 17 pieds & demi; c'eſt-à-dire qui varient de 50 pouces; mais la très-grande pluralité (d'environ dix contre trois) eſt renfermée entre 14 pieds & demi, & 16 pieds & demi, en ſorte que le milieu eſt 15 pieds & demi: il ſe trouve même cent trente-cinq marées qui ſont montées à 15 pieds & demi & au-deſſus, contre cent trente qui n'ont été qu'à 15 pieds 5 pouces ou au-deſſous.

Parmi deux cents ſoixante-ſept obſervations choiſies des marées des quadratures, la plus grande hauteur du flot a été à 13 pieds 4 pouces, & la moindre à 8 pieds; ainſi il y a 64 pouces de variation dans les hauteurs de la pleine mer des mortes eaux; le milieu ſeroit donc de 10 pieds 8 pouces. Mais ſi l'on prend le milieu entre toutes les deux cents ſoixante-ſept obſervations, on trouve 10 pieds 11 pouces & demi; M. de Fourcroy s'en tient à 10 pieds 10 pouces 4 dixièmes.

La marée totale des ſyzygies étant à Calais de 18 pieds 5 pouces, le niveau naturel de la mer, ou celui qui auroit lieu s'il n'y avoit point de marée, doit être au tiers de l'eſpace total; c'eſt-à-dire à 6 pieds 1 pouce 2 tiers au-deſſus du terme inférieur, puiſque la montée eſt double de la deſcente; ainſi le point de l'échelle de Calais, qui répond au niveau naturel de la mer, eſt 3 pieds 1 pouce 2 tiers: par ce moyen les hauteurs moyennes dans les ſyzygies & dans les quadratures, ſeront 12 pieds 3 pouces 1 tiers, & 7 pieds 8 pouces 5 ſixièmes au-deſſus du niveau naturel.

Ces hauteurs ſuffiſent pour déterminer le rapport des forces du Soleil & de la Lune qui réſultent des obſervations de Calais. En effet, la différence entre les hauteurs moyennes de la mer dans les ſyzygies & les quadratures eſt de 4 pieds 6 pouces & demi; c'eſt l'effet entier de l'action du Soleil, tandis que la ſomme des deux effets eſt de 18 pieds 5 pouces; ainſi l'effet de la Lune ſeule eſt de 13 pieds 10 pouces & demi; ce qui eſt un peu plus de trois fois l'effet du Soleil, au lieu de deux fois & demi qu'on emploie communément

avec M. Bernoulli. Je crois cette détermination de la force Lunaire une des plus exactes qu'on puisse avoir, parce qu'elle est déduite d'un nombre considérable d'observations, tant des grandes marées que de celles des quadratures; la seule chose qui est incomplette, est le terme inférieur des marées des syzygies, sur lequel il pourroit bien y avoir quelques pouces d'incertitude, & pour lequel il nous reste à desirer encore une suite d'observations faites dans un lieu où il n'y ait point d'assèchement de basse-mer: c'est ce que l'Académie se propose de demander au Ministre; M. de Sartine, actuellement chargé de cette partie essentielle de l'administration, est si connu par ses lumières & par son zèle pour les Sciences, que je ne doute point du succès de nos demandes.

Observations des Marées.

Années.	Jours.	Heures.	Hauteurs.	Jours de la Lune.	Parallaxe.	Vents.
1745.	4 Janv.	0h 40′ *S.*	15pi. 1po.	2.	périgée.........	O.
	4 Avril	1. 0. *S.*	14. 7.	2.	apogée.........	S. S. O.
	30 Juin.	11. 28. *M.*	14. 6.	2.	moyenne distance..	N. O.
1754.	26 Mars	1. 23. *S.*	14. 6.	4.	apogée.........	N. E.
	7 Avril	11. 46. *M.*	15. 11.	16.	61′ 30″........	N. O.
	6 Juin.	0. 33. *S.*	15. 2.	16.	57. 40........	O. S. O.
	22 Juin.	0. 51. *S.*	14. 9.	3.	59 environ.....	O.
	6 Juill.	0. 50. *S.*	14. 9.	17.	56. 0.........	O.
	18 Sept.	0. 53. *S.*	16. 4.	3.	61. 0.........	E. N. E.
	3 Oct.	1. 17. *S.*	14. 9.	18.	55. 0.........	N.
	31 Déc.	1. 3. *S.*	14. 5.	18.	58. 45........	E. S. E.
1755.	14 Janv.	0. 51. *S.*	15. 9.	3.	56. 0.........	N.
	30....	1. 44. *S.*	17. 0.	19.	60. 30........	N. N. O.
	12 Févr.	0. 39. *S.*	15. 4.	2.	56. 0.........	O. N. O.
	28 Mars.	0. 3. *S.*	15. 9.	17.	61. 52........	S. S. O.
	11 Avril	11. 32. *M.*	14. 6.	1.	55. 0.........	S. O.
	6 Oct.	0. 17. *S.*	15. 10.	2.	61. 0.........	O. S. O.
	22....	1. 37. *S.*	15. 2.	18.	54. 45........	O.
	20 Déc.	1. 19. *S.*	14. 6.	18.	55. 45........	S. O.
1756.	5 Janv.	2. 21. *S.*	17. 0.	4.	58. 0.........	N. O.
	16 Févr.	0. 36. *S.*	16. 6.	16.	58. 15........	O. N. O.

Années.	JOURS.	HEURES.	HAUTEURS.	JOURS de la Lune.	PARALLAXE.	VENTS.
1756.	31 Mars.	0h 16' S.	15pi. 6po.	1.	56' 0"	E.
	16 Avril	1. 2. S.	16. 2.	17.	60. 30	O. S. O.
	15 Juill.	2. 21. S.	15. 6.	18.	58. 45	O.
	10 Oct.	1. 25. S.	15. 10.	16.	56. 0	S.
	25....	1. 4. S.	15. 10.	2.	59. 30	E. N. E.
1757.	6 Janv.	0. 35. S.	13. 5.	16.	55. 0	E. N. E.
	22....	1. 36. S.	16. 10.	3.	59. 0	N. N. O.
	6 Mars	0. 8. S.	15. 10.	16.	56. 45	N. N. O.
	20....	11. 56. M.	16. 8.	1.	....	N. N. O.
	23....	2. 28. S.	14. 2.	4.	56. 15	S. O.
	4 Avril	0. 6. S.	15. 4.	16.	58. 0	N. O.
1758.	13 Déc.	10. 30. M.	15. 9.	14.	59. 15	N. O.
	14....	11. 15. M.	14. 6.	15.	58. 30	Calme.
	15....	0. 30. S.	15. 6.	16.	58. 0	O.
1759.	15 Janv.	1. 0. S.	15. 2.	17.	55. 30	S. O.
	30....	0. 45. S.	15. 10.	3.	61. 0	S. O.
	30 Mars.	1. 15. S.	17. 6.	3.	60. 30	N. N. E.
	13 Avril	1. 0. S.	14. 11.	17.	55. 0	O.
	24 Juin.	11. 15. M.	15. 0.	1.	....	N.
	12 Juill.	1. 0. S.	14. 8.	19.	59. 15	O. S. O.
	6 Oct.	11. 45. M.	16. 0.	17.	61. 30	O.
1760.	4 Janv.	1. 0. S.	15. 9.	17.	59. 42 à 58. 28	O. S. O.
	5....	1. 30.	15. 0.	18.	59. 9 à 57. 39	Calme.
	19....	0. 45. S.	14. 0.	2.	56. 22 à 57. 35	S. S. E.
	22....	2. 45. S.	15. 7.	5.	58. 2 à 58. 51	N. O.
	1 Avril	0. 30. S.	15. 0.	16.	55. 18 à 54. 33	E. N. E.
	15....	11. 30. M.	15. 7.	2.	59. 51 à 61. 4	O.
	28 Juin.	11. 30. M.	14. 3.	16.	54. 10 à 54. 37	S. O.
	29....	0. 15. S.	14. 6.	17.	54. 20 à 54. 57	S. O.
	12 Juill.	11. 30. M.	15. 0.	1.	60. 33 à 60. 6	N.
	26 Sept.	0. 30. S.	16. 6.	18.	58. 35 à 59. 44	S. O.
	9 Oct.	0. 15. S.	16. 2.	1.	56. 8 à 55. 10	E.
	25....	0. 30. S.	16. 8.	17.	59. 44 à 60. 51	S. S. O.
1761.	6 Janv.	0. 15. S.	14. 3.	1.	54. 3 à 54. 23	S. S. E.
	22....	1. 0. S.	15. 6.	17.	60. 44 à 59. 31	O.
	7 Avril	1. 0. S.	15. 7.	3.	58. 45 à 59. 36	S. O.
	20 ...	0. 30. S.	15. 0.	16.	56. 18 à 55. 19	O. S. O.
	18 Juin.	0. 30. S.	14. 7.	16.	54. 12 à 54. 1	N. N. O.
	4 Juill.	1. 30. S.	15. 7.	3.	61. 29 à 60. 43	N. N. E.
	18....	0. 30. S.	14. 7.	17.	54. 2 à 54. 20	O.

1761.

Années.	Jours.	Heures.	Hauteurs.	Jours de la Lune.	Parallaxe.	Vents.
1761.	29 Sept.	0ʰ 30′ S.	15ᵖⁱ· 6ᵖᵒ·	2.	58′ 57″ à 57′ 46″	E. N. E.
	16 Oct.	1. 30. S.	16. 3.	19.	58. 1 à 58. 55	S. O.
	27 Déc.	0. 30. S.	14. 2.	2.	54. 28 à 54. 4	S. S. O.
1762.	13 Janv.	2. 0. S.	16. 3.	19.	61. 23 à 60. 24	S. O.
	26....	0. 45. S.	14. 3.	2.	53. 58 à 54. 6	Calme.
	28 Mars	2. 0. S.	16. 0. (a)	4.	55. 56 à 56. 58	O.
	10 Avril	1. 0. S.	16. 0.	17.	59. 12 à 57. 50	E. N. E.
	24 Juin.	1. 15. S.	15. 0.	3.	60. 22 à 60. 35	O. S. O.
	8 Juill.	1. 0. S.	14. 3.	17.	54. 35 à 54. 10	O. S. O.
	4 Oct.	0. 45. S.	17. 0. (b)	18.	54. 35 à 55. 21	[illegible]
	18....	0. 30. S.	16. 0.	2.	60. 19 à 59. 19	Calme.
1763.	3 Janv.	2. 0. S.	14. 6.	20.	60. 8 à 60. 11	E.
	15....	0. 30. S.	14. 0.	2.	55. 23 à 54. 39	E.
	29....	11. 0. M.	15. 0.	16.	59. 36 à 60. 51	S.
	30 Mars.	0. 30. S.	15. 8.	17	61. 23 à 60. 52	O. S. O.
	15 Avril	1. 15. S.	14. 7.	3.	54. 20 à 55. 19	Calme.
	26 Juin.	Midi.....	14. 8.	15.	57. 56 à 56. 46	O.
	14 Juill.	2. 0. S.	15. 0.	4.	59. 25 à 59. 52	S. O.
	24 Sept.	1. 30. S.	15. 2.	18.	54. 2 à 54. 5	E. N. E.
	7 Oct.	0. 15. S.	16. 4.	1.	61. 9 à 61. 25	N. O.
1764.	3 Janv.	11. 15. M.	15. 9.	1.	58. 33 à 58. 7	N. O.
	21....	1. 15. S.	16. 0.	19.	58. 19 à 59. 22	N. O.
	2 Avril	0. 30. S.	14. 9.	2.	54. 22 à 54. 2	E. N. E.
	16....	11. 45. M.	16. 3.	16.	60. 39 à 61. 41	Calme.
	17....	0. 30. S.	16. 6.	17.	61. 19 à 61. 20	E.
	1 Juill.	1. 0. S.	14. 4.	3.	55. 39 à 56. 39	O. N. O.
	15....	1. 15. S.	14. 10.	17.	58. 56 à 57. 31	S. O.
	27 Sept.	1. 0. S.	16. 0.	3.	60. 8 à 60. 42	O. S. O.
	28....	1. 45. S.	17. 0. (c)	4.	60. 42 à 60. 35	N.
	10 Oct.	0. 15. S.	15. 3.	16.	55. 8 à 54. 28	O. S. O.
	25 Déc.	1. 15. S.	14. 8.	4.	60. 41 à 58. 40	E. S. E.
1765.	8 Janv.	0. 30. S.	14. 4.	18.	54. 44 à 55. 33	S. O.
	22....	0. 15. S.	14. 6.	2.	60. 4 à 59. 0	Calme.
	22 Mars.	0. 30. S.	15. 1.	2.	56. 52 à 55. 48	O.
	20 Avril	Midi.....	14. 7.	2.	55. 47 à 54. 48	S.
	4 Juill.	0. 36. S.	15. 0.	18.	61. 20 à 60. 38	Calme.

(a) La veille 14 pieds 10 pouces, le lendemain 14 pieds 8 pouces.

(b) La veille & le lendemain 15 pieds 6 pouces.

(c) Il paroît que le vent a produit un pied de plus.

Années.	JOURS.	HEURES.	HAUTEURS.	JOURS de la Lune.	PARALLAXE.	VENTS.
1765.	18 Juill.	0^h 6' S.	$14^{pi.}$ $6^{po.}$	2.	54' 10" à 54' 38"	N.
	18 Sept.	1. 49. S.	15. 11.	4.	57. 52 à 58. 43	Calme.
	1 Oct.	1. 4. S.	15. 9.	17.	57. 7 à 55. 54	O.
	15....	0. 4. S.	16. 6.	2.	58. 4 à 59. 15	O. N. O.
	28 Déc.	0. 37. S.	13. 4. (d)	17.	54. 3 à 54. 2	E. S. E.
1766.	13 Janv.	1. 22. S.	15. 7.	3.	61. 22 à 60. 20	Calme.
	14....	2. 0. S.	15. 3.	4.	61. 0 à 59. 31	Calme.
	27 Mars	0. 9. S.	15. 7.	18.	56. 4 à 57. 10	O. S. O.
	10 Avril	0. 17. S.	14. 11. (e)	2.	58. 23 à 57. 12	N. E.
	25....	0. 10. S.	14. 11.	17.	57. 18 à 58. 34	N. E.
	10 Mai..	0. 57. S.	15. 3. (f)	3.	56. 28 à 55. 26	N. O.
	25 Juin	1. 24. S.	14. 11.	19.	61. 9 à 60. 47	E. S. E.
	10 Juill.	1. 56. S.	14. 4.	4.	55. 49 à 54. 51	E. N. E.
	6 Sept.	0. 59. S.	15. 5. (g)	3.	54. 32 à 55. 15	O.
	20....	1. 2. S.	16. 4.	17.	60. 28 à 59. 10	Calme.
	21....	1. 48. S.	16. 3.	18.	59. 55 à 58. 20	Calme.
	5 Oct.	0. 51. S.	15. 6.	2.	55. 24 à 56. 13	E.
	6....	1. 24. S.	16. 1.	3.	55. 52 à 56. 54	N. O.
	18....	11. 50. M.	15. 4.	15.	59. 38 à 58. 40	Calme.
	20....	1. 13. S.	15. 10.	16.	58. 40 à 57. 15	O. S. O.
	16 Déc.	11. 56. M.	15. 2. (h)	15.	56. 28 à 55. 30	N. O.
1767.	1 Janv.	11. 51. M.	14. 9.	2.	59. 46 à 60. 45	O. N. O.
	2....	1. 6. S.	18. 8. (i)	3.	60. 22 à 60. 50	N. N. O.
	3....	1. 40. S.	15. 6.	4.	60. 45 à 60. 31	E. N. E.
	4....	2. 7. S.	15. 3.	5.	....	E.
	5....	2. 34. S.	14. 6.	6.	....	S. O.
	17....	1. 11. S.	14. 0.	18.	54. 20 à 54. 5	E. S. E.
	1 Févr.	1. 18. S.	16. 0.	3.	61. 22 à 60. 56	O. S. O.
	1 Avril	1. 9. S.	15. 6.	3.	60. 30 à 59. 5	Calme.
	2....	2. 4. S	14. 11.	4.	59. 52 à 58 11	Calme.
	16....	1. 16. S.	15. 0. (k)	18.	55. 19 à 56. 15	N.

(d) Le vent & le périgée tendoient à la diminuer.

(e) Ces 8 pouces de différence viennent du vent.

(f) La veille 14 pieds 8 pouces, le lendemain 14 pieds 9 pouces, & vent O. S. O.

(g) Le 5, le vent étoit N. O.

(h) La veille 14 pieds 3 pouces, le lendemain 14 pieds 1 pouce.

(i) Quatre pieds d'extraordinaire.

(k) La veille & le lendemain 14 pieds 3 pouces, vent N. E.

Années.	Jours.	Heures.	Hauteurs.	Jours de la Lune.	Parallaxe.	Vents.
1767.	28 Avril	11h 37′ M.	15pi. 7po. (l)	1.	60′ 10″ à 59′ 21″	N. N. E.
	28 Juin	0. 58. S.	14. 4.	3.	56. 4 à 55. 6	Calme. N. N. E.
	14 Juill.	1. 25. S.	15. 7. (m)	19.	60. 12 à 60. 24	O.
	25 Sept.	1. 24. S.	14. 7. (n)	3.	54. 0 à 54. 25	N. E.
	9 Oct.	1. 5. S.	17. 5.	17.	61. 19 à 60. 23	N.
	10....	1. 36. S.	16. 6.	18.	60. 59 à 59. 34	N. N. O.
	23....	0. 16. S.	14. 9. (o)	2.	54. 14 à 54. 46	S. S. O.
	22 Déc.	1. 23. S.	14. 6.	2.	....	E.
1768.	5 Janv.	0. 34.	14. 3.	16.	....	E. S. E. calme.
	6....	1. 23.	14. 3.	17.	....	idem.
	20....	0. 11.	15. 2.	2.	....	S. S. O. calme.
	21....	0. 56.	15. 0.	3.	....	N. N. O. calme.
	19 Mars	0. 13.	15. 0.	2.	....	S. O. calme.
	20....	1. 4.	16. 0.	3.	....	O. S. O.
	21....	1. 38.	17. 3.	4.	....	N.
	22....	2. 3.	14. 6. (p)	5.	....	E. N. E.
	4 Avril	0. 52.	14. 6.	18.	....	N. N. O. calme.
	18....	0. 14.	15. 10.	2.	....	O.
	2 Mai..	0. 13.	14. 0.	16.	....	N. O.
	2 Juill.	0. 56.	14. 7.	19.	....	S. O.
	16....	1. 3.	15. 2.	3.	....	N. E.
	28 Sept.	1. 3.	16. 0.	18.	....	S. E.
	29....	1. 44.	16. 3.	19.	....	N. O.
	12 Oct.	0. 58.	15. 6.	3.	....	N. E.
	27....	0. 21.	16. 3.	18.	....	S. S. O.
	26 Déc.	1. 34.	16. 3. (q)	18.	....	S. O.
1769.	6 Mars	....	13. 3.	.....	....	O. médiocre.
	7....	....	14. 2.	.....	....	E. N. E. calme.
	8....	....	14. 6.	1.	....	E. ¼ N. E. méd.
	9....	....	14. 11.	2.	....	E. ¼ S. E. calme.
	10....	....	15. 0.	3.	....	E. S. E. calme.
	11....	....	15. 3.	4.	60. 3 périgée...	S. S. E. médiocre.

(l) La veille & le lendemain 15 pieds, il y avoit eu deux jours de calme.

(m) La veille & le lendemain 15 pieds 3 pouces.

(n) La veille & le lendemain 14 pieds 6 pouces.

(o) Presque calme depuis trois ou quatre jours.

(p) Cette différence de 2 pieds 9 pouces, ne peut venir que du vent.

(q) La veille & le lendemain 15 pieds.

Années.	JOURS.	HEURES.	HAUTEURS.	JOURS de la Lune.	PARALLAXE.	VENTS.
1769.	12 Mars.	....	15pi. 3po.	5.	....	S. O. $\frac{1}{4}$ O. méd.
	13....	....	13. 9.	6.	....	S. O. $\frac{1}{4}$ S. fort.
	14....	....	13. 2.	7.	....	S. O. $\frac{1}{4}$ O. fort.
	15....	....	12. 4.	8.	....	O. S. O. fort.
	16....	....	12. 6.	9.	....	O. $\frac{1}{4}$ N. O. méd.
	17....	....	12. 4.	10.	....	O. N. O. méd.
	18....	....	12. 0.	11.	....	O. $\frac{1}{4}$ S. O. méd.
	19....	....	13. 4.	12.	....	N. O. $\frac{1}{4}$ O. méd.
	20....	....	13. 6.	13.	....	E. calme.
	21....	....	14. 3.	14.	....	N. E. $\frac{1}{4}$ N. calme.
	22....	....	14. 3.	15.	Pleine Lune.....	N. N. E. calme.
	23....	....	14. 7.	16.	....	O. N. O. calme.
	24....	....	14. 8.	17.	54′ 27″.......	N. O. $\frac{1}{4}$ N. méd.
	25....	....	14. 0.	18.	54. 15........	N. $\frac{1}{4}$ N. E. méd.
	26....	....	13. 5.	19.	54. 8 périgée...	N. E. médiocre.
	27....	....	12. 8.	20.	....	N. E. médiocre.
	28....	....	11. 9.	21.	....	N. E. fort.
	29....	....	10. 10.	22.	....	E. N. E. fort.
	30....	....	10. 6.	23.	Dernier Quartier..	E. fort.
	31....	....	9. 4.	24.	....	E. médiocre.
	1 Avril	....	9. 8.	25.	....	E. N. E. médioc.
	2....	....	10. 5.	26.	....	E. $\frac{1}{4}$ N. E. méd.
	3....	....	12. 3.	27.	....	N. E. médiocre
	4....	....	13. 4.	28.	....	N. $\frac{1}{4}$ N. E. méd.
	5....	....	14. 0.	29.	....	N. E. médiocre.
	6....	....	15. 2.	1.	60. 30........	N. E. $\frac{1}{4}$ E. méd.
	7....	....	15. 6.	2.	60. 51 périgée...	N. E. $\frac{1}{4}$ N. méd.
	8....	....	15. 6.	3.	60. 50........	N. E. $\frac{1}{4}$ E. fort.
	9....	....	15. 10.	4.	....	S. O. $\frac{1}{4}$ O. méd.
	10....	....	15. 2.	5.	....	S. O. médiocre.
	11....	....	14. 10.	6.	....	S. S. O. fort.
	12....	....	13. 3.	7.	....	O. $\frac{1}{4}$ S. O. fort.

NOTA. *La parallaxe marquée dans ces Tables est celle qui a lieu le jour de l'observation à midi, & quand il y en a deux, la première est celle qui avoit lieu deux jours auparavant; ces parallaxes font juger de la distance de la Lune, dès qu'on sait qu'elles varient depuis 53′ 58″, jusqu'à 61′ 29″.*

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES FAITES en 1772 À PERINALDO DANS LE COMTÉ DE NICE.

Par M. MARALDI.

Les planètes de Jupiter, Vénus & Mercure ont été si proches l'une de l'autre au commencement de cette année 1772, que je les ai vues toutes trois à la fois dans le champ de la lunette de ma machine parallactique le 6 & le 7 de Janvier, & j'en ai profité pour faire les observations dont voici le résultat.

Le 6 Janvier, temps vrai.

À 4^h 57′ 24″ Jupiter au fil horaire.

4. 59. 20 Vénus à l'hor. plus mérid. que Jupiter de 0^d 54′ 19″.

5. 2. 3 Mercure à l'hor. plus mérid. que Jupiter de 0. 3. 41.

Les nuages qui ont couvert la partie occidentale du ciel, 20 minutes après ces observations, m'ont empêché de comparer ces Planètes aux Étoiles fixes.

Le 7 Janvier.

5. 2. 47 Jupiter à l'hor. 0^d 10′ 57″ plus septent. que x du ♑.

5. 8. 36½ Vénus à l'hor. 0. 29. 6 plus méridionale que x.

5. 9. 52 Mercure à l'hor. 0. 31. 11 plus septentr. que x.

6. 5. 0 x du Capricorne à l'horaire.

En supposant l'ascension droite de x du Capricorne de 322^d 28′ 30″, & la déclinaison méridionale de 19^d 53′ 43″, on trouve l'ascension droite

de Jupiter 306^d 52′ 42″ & la déclin. 19^d 42′ 46″ *M.*
de Vénus 308. 20. 19 .... 20. 22. 49 *M.*
de Mercure 308. 39. 14 .... 19. 20. 32 *M.*

Le 9 Janvier.

4. 59. 9 Jupiter à l'hor. 1^d 57′ 59″ plus mérid. que γ du ♑.

5^h 10′ 23″½ Mercure à l'hor. 0^d 50′ 59″ plus méridional que γ.
5. 13. 13½ Vénus à l'hor. 2. 6. 24 plus méridionale que γ.
5. 56. 44 γ du Capricorne à l'horaire.

Si on suppose l'ascension droite de γ du Capricorne, de 321^d 51′ 2″, & la déclinaison méridionale 17^d 40′ 57″, on aura l'ascension droite

de Jupiter 307^d 24′ 56″ & la déclin. 19^d 38′ 56″ *M.*
de Mercure 310. 14. 1 . . . . 18. 31. 56 *M.*
de Vénus 310. 56. 41 . . . . 19. 47. 21 *M.*

Le 10 Janvier.

4. 58. 23 Jupiter à l'hor. 1^d 51′ 50″ plus austral que γ du ♑.
5. 10. 53 Mercure à l'hor. 0. 23. 59 plus austral que γ.
5. 16. 36½ Vénus à l'hor. 1. 45. 34 plus australe que γ.

Par conséquent l'ascension droite

de Jupiter 307^d 38′ 12″ & la déclin. 19^d 32′ 47″ *M.*
de Mercure 310. 46. 14 . . . . 18. 4. 56 *M.*
de Vénus 312. 12. 24 . . . . 19. 26. 31 *M.*

Le 13 Janvier.

5. 3. 23½ Mercure à l'hor. 0^d 9′ 7″ plus septentr. que δ du ♑.
5. 22. 8 Vénus à l'hor. 1. 14. 6 plus méridionale que δ.
5. 52. 16 δ du Capricorne à l'horaire.

L'ascension droite de cette Étoile est de 323^d 36′ 29″, & la déclinaison de 17^d 9′ 1″ méridionale; par conséquent l'ascension droite

de Mercure 311^d 26′ 21″ & la déclin. 16^d 59′ 54″ *M.*
de Vénus 316. 3. 15 . . . . 18. 23. 7 *M.*

Le 14 Janvier.

5. 25. 20½ Mercure à l'horaire.
5. 49. 36½ Vénus à l'horaire, 1^d 17′ 23″ plus mérid. que Mercure.

Après ces observations, craignant que du ♑ ne passât pas dans la lunette, je l'ai changée & j'ai fait les observations suivantes.

5. 54. 8 Vénus à l'hor. 0^d 51′ 50″ plus mérid. que δ du ♑.
6. 19. 7 δ du Capricorne à l'horaire.

D'où j'ai conclu l'ascension droite de Vénus à 5^h 54′ 8″ de

317^{d} 20′ 35″, & la déclinaiſon méridionale de 18^{d} 0′ 51″. Pour avoir l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de Mercure, j'ai cherché l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de Vénus à 5^{h} 25′ 20″ & ſa variation en 24′ 16″, intervalle entre les paſſages de Mercure & de Vénus à l'horaire, dont j'ai corrigé leur difference en aſcenſion droite & en déclinaiſon, & j'ai trouvé l'aſcenſion droite de Mercure à 5^{h} 25′ 20″ de 311^{d} 15′ 17″, & ſa déclinaiſon de 16^{d} 43′ 32″ méridionale *. Les 13 & 14 Janvier, je n'ai pas pu voir Jupiter.

Par le moyen de l'aſcenſion droite & de la déclinaiſon de ces Planètes, déterminées par les obſervations précédentes, j'ai calculé leur longitude & leur latitude, & je les ai comparées à celles des Tables de M. Halley, comme on voit dans la Table ſuivante.

	PAR LES OBSERVATIONS.				PAR LES TABLES DE HALLEY.			
	Temps vrai.	*T. moyen à Paris.*	*Longitude.*	*Latitude.*	*Longitude.*	*Différ.*	*Latitude.*	*Différ.*
	H. M. S.	*H. M. S.*	*S. D. M. S.*	*D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*
	JUPITER.				*JUPITER.*			
Janv. 7	5. 2. 48	4. 48. 15	10. 4. 24. 1	0. 32. 54 *M.*	10. 4. 29. 20	+5. 19	0. 32. 43 *M.*	—0. 11
9	4. 59. 9	4. 45. 27	10. 4. 54. 28	0. 36. 29 *M.*	10. 4. 57. 0	+2. 32	0. 32. 49 *M.*	—3. 47
10	4. 58. 23	4. 45. 5	10. 5. 8. 2	0. 33. 32 *M.*	10. 5. 11. 2	+3. 0	0. 33. 27 *M.*	—0. 5
	VÉNUS.				*VÉNUS.*			
Janv. 7	5. 8. 38	4. 54. 5	10. 5. 34. 8	1. 31. 45 *M.*	10. 5. 32. 6	—2. 2	1. 30. 26 *M.*	—1. 19
9	5. 13. 14	4. 59. 19	10. 8. 5. 15	1. 34. 36 *M.*	10. 8. 2. 59	—2. 16	1. 31. 53 *M.*	—2. 43
10	5. 13. 30	5. 0. 19	10. 9. 19. 37	1. 33. 31 *M.*	10. 9. 17. 52	—1. 45	1. 32. 29 *M.*	—1. 2
13	5. 22. 8	5. 10. 1	10. 13. 7. 3	1. 33. 10 *M.*	10. 13. 3. 21	—3. 42	1. 33. 55 *M.*	+0. 45
14	5. 54. 8	5. 42. 23	10. 14. 23. 50	1. 33. 10 *M.*	10. 14. 19. 58	—3. 52	1. 34. 10 *M.*	+1. 0
	MERCURE.				*MERCURE.*			
Janv. 7	5. 9. 51	4. 55. 18	10. 6. 6. 50	0. 35. 50 *M.*	10. 6. 5. 15	—1. 35	0. 37. 6 *M.*	+1. 16
9	5. 10. 23	4. 56. 42	10. 7. 45. 51	0. 11. 30 *M.*	10. 7. 44. 23	—1. 28	0. 8. 59 *M.*	—2. 31
10	5. 10. 53	4. 57. 36	10. 8. 22. 19	0. 6. 41 *S.*	10. 8. 21. 44	—0. 35	0. 6. 41 *S.*	0. 0
13	5. 3. 43	4. 51. 36	10. 9. 16. 20	0. 59. 26 *S.*	10. 9. 14. 45	—1. 35	0. 58. 18 *S.*	—1. 8
14	5. 25. 20	5. 13. 35	10. 9. 10. 44	1. 18. 3 *S.*	10. 9. 9. 50	—0. 54	1. 16. 55 *S.*	—1. 8

OBSERVATION de l'Occultation de Vénus par la Lune, du 21 Décembre au matin, temps vrai.

9^{h} 26′ 27″ la corne de Vénus au bord de la Lune, avec la lunette

* J'ai auſſi obſervé Mercure les 18, 19, 21 & 23 Décembre, & je l'ai comparé chaque fois à ſix ou ſept Étoiles que je n'ai pas pu reconnoître juſqu'à préſent. Le mauvais temps & le clair de la Lune m'en ont empêché; je crois cependant avoir obſervé deux fois ζ du Capricorne & deux fois ε du Verſeau.

achromatique de 3 pieds, dont l'ouverture est de 27 lignes & grossit soixante-cinq fois.

9^h 27′ 20″ immersion totale de Vénus avec la même lunette.

10. 15. 5 émersion de Vénus avec la Comète de 3 pieds de ma machine parallactique.

OBSERVATIONS des Éclipses des Satellites de Jupiter.

	Temps vrai.	
4 Juin à	14^h 13′ 10″	émersion du troisième Satellite; il fait parfaitement beau & on voit distinctement les bandes; lunette de 15 pieds de Campani.
9......	15. 28. 20	immers. du premier, ciel très-serein; on voit très-distinctement les bandes, mais il commence à faire jour. Même lunette.
11......	14. 20. 0	le troisième disparoît avec un diaphragme de 4 lignes de diamètre. Lunette achromatique de 3 pieds, qui a 27 lignes d'ouverture.
	14. 39. 40	immersion du troisième. Lun. 15 pieds de Campani; il fait parfaitement beau & on voit très-distinctement les bandes.
25......	13. 31. 0	le premier disparoît avec un diaphragme de 11 lignes. Lunette achromatique de 3 pieds.
	13. 40. 9	immersion du premier. Lunette 15 pieds; on voit très-distinctement les bandes.
2 Juillet	15. 32. 32	immersion du premier; lunette 15 pieds. Il fait déjà jour & il y a un peu de brouillard, cependant Jupiter est bien terminé & on voit bien les bandes.
4......	13. 46. 0	le second disparoît avec un diaphragme de 11 lignes. Lunette achromatique.
	13. 52. 59	imm. du second. Lunette 15 pieds. On voit très-distinctement les bandes; mais en tirant l'objectif, je l'ai trouvé très-humide.
11......	11. 45. 0	le premier disparoît avec le diaphragme 10.
	11. 48. 0	on le voit encore avec le diaphragme 11; je quitte pour aller observer avec l'autre lun.
	11. 53. 8	imm. du premier; lunette 15 pieds. Il fait parfaitement beau, & on voit très-distinctement les bandes.
18......	13. 36. 0	le premier disparoît avec le diaphragme 11.

Temps vrai.

18 Juillet à 13h 46′ 29″ immersion du premier; lunette 15 pieds. Il fait parfaitement beau; on voit très-distinctement les bandes, la Lune est proche.

25...... 15. 40. 16 immersion du premier; lunette 15 pieds. Il fait beau; on voit distinctement les bandes; mais il commence à faire jour.

27...... 13. 13. o le quatr. est entré dans l'ombre. J'ai manqué cette observation, parce qu'il y avoit tant d'humidité dans l'air, qu'il falloit nettoyer le verre à chaque instant; & le tuyau s'étant dérangé, le Satellite est entré dans l'ombre pendant que je le raccommodois & que je mettois la lunette au foyer; ce qui m'a fait prendre le parti d'abandonner cette lunette de 15 pieds & me servir par la suite de la lunette achromatique de 3 pieds, qui est à peu-près de la même force que la lunette de 15 pieds; elle me paroît tant soit peu meilleure.

5 Août. 13. 28. o le second disparoît, & même celui qui est proche, avec le diaphragme 10.

13. 37. 44 Imm. du second Satellite. Lunette achrom. de 3 pieds dont je me suis toujours servi depuis.

10...... 13. 49. o le premier disparoît avec le diaphragme 11.

13. 57. 49 Imm. du premier; ciel parfaitement serein & les bandes très-distinctes.

12...... 16. 5. o le second disparoît avec le diaphragme 12; on le voyoit un moment auparavant avec le diaphragme 13; je l'ai vu jusqu'à 15h 55′ avec le diaphragme 11.

16. 15. 46 immersion du second. Jupiter est ondoyant, cependant il est bien terminé & on voit distinctement les bandes.

Le 23 Août, j'ai trouvé la pendule arrêtée, je l'ai démontée, nettoyée & mise en mouvement. Le 24, je l'ai encore trouvé arrêtée, ce que j'ai attribué à ce qu'elle n'avoit pas été bien mise dans son échappement; j'ai tâché de l'y mettre du mieux qu'il m'a été possible, & elle a toujours été depuis. J'ai observé des hauteurs correspondantes les 26, 27, 28, 29 & 30 Août; & j'ai trouvé des

variations énormes qui m'ont fort embarrassé. Enfin le 31, je me suis aperçu que l'aiguille des secondes vacilloit; j'ai mis un peu de cire dans le canon, & depuis ce temps la pendule a été fort régulièrement. Ainsi toutes les observations, depuis le 25 jusqu'au 31 Août, ne sont sûres que dans la minute; je n'ai pas cru devoir les supprimer.

	Temps vrai.	
26 Août.	14h 35' 53"	émersion du premier. Il touche presque le bord du disque de Jupiter, il fait beau, on voit distinctement les bandes.
	14. 46. 0	il disparoît avec le diaphragme 13.
28......	9. 5. 16	émersion du premier. On voit distinctement les bandes, mais Jupiter est un peu tremblant.
	9. 13. 0	il disparoît avec le diaphragme 13.
29......	14. 10. 39	émersion du troisième. Le ciel n'est pas parfaitement serein; Jupiter est cependant bien terminé, & on voit bien les bandes.
	14. 22. 0	il disparoît avec le diaphragme 10.
30......	13. 44. 10	émers. du second Satellite. Il fait parfaitement beau, & on voit distinctement les bandes.
	13. 54. 0	il disparoît avec le diaphragme 12.
4 Sept..	11. 1. 9	émersion du premier. Jupiter n'est pas bien terminé, il y a un peu de brouillard.
11......	12. 58. 39	émersion du premier. Jupiter n'est pas parfaitement bien terminé; on voit cependant très-distinctement les bandes.
	13. 7. 0	le Satellite disparoît avec le diaphragme 11.
20......	9. 25. 47	émers. du premier. Il fait parfaitement beau & on voit très-distinctement les bandes.
	9. 28. 28	émersion avec le diaphragme 10.
	9. 35. 0	on ne le voit pas avec le diaphragme 9.
24......	11. 1, 18	émers. du second. Il y a un peu de nébulosité autour de Jupiter, cependant il est terminé & on voit bien les bandes.
	11. 4. 15	émersion avec le diaphragme 10.
	11. 9. 0	on ne le voit pas avec le diaphragme 9, non plus que le quatrième qui est à gauche.
27......	11. 23. 48	émersion du premier. Jupiter est tremblant, & on ne voit pas distinctement les bandes.

	Temps vrai.	
27 Sept..	11h 26′ 6″	émersion avec le diaphragme 11.
	11. 30. 0	on voit le satellite avec le diaphragme 10.
	11. 30. 30	on ne le voit pas avec le diaphragme 9.
1 Octob.	13. 40. 32	émersion du second. Jupiter très-proche de l'horizon; il est bien terminé & on voit bien les bandes, il est seulement un peu rouge.
	13. 46. 5	émersion avec le diaphragme 12.
	13. 47. 25	on ne le voit pas avec le diaphragme 11, non plus que le quatrième.
	13. 57. 21	le quatrième Satellite se couche derrière une montagne bien terminée.
	13. 59. 43	coucher de Jupiter; il a toujours été bien terminé, il a changé seulement de couleur qui est devenue de plus en plus rouge.
6......	7. 50. 15	émersion du premier; il fait parfaitement beau.
	7. 52. 51	émersion avec le diaphragme 11.
	7. 56. 0	on le voit avec le diaphragme 10.
	7. 57. 0	on ne le voit pas avec le diaphragme 9.
13......	9. 47. 46	émersion du premier; le ciel n'est pas serein, cependant Jupiter est net & bien terminé, & on voit très-distinctement les bandes, il y a un beau clair de Lune.
	9. 53. 30	on ne voit pas encore le Satellite avec le diaphragme 12; j'ai mis le diaphragme 13, je l'ai vu aussi-tôt; j'ai remis le diaphragme 12 & je n'ai pas vu le Satellite; à 9h 56′ 30″ on ne le voyoit pas encore, il est vrai que le ciel se brouille de plus en plus, & je quitte la lunette.
19......	8. 14. 45	émersion du second Satellite; il fait parfaitement beau. O..''.4 A 8h 30′ on ne voyoit aucun des trois Satellites avec le diaphragme 9, on voyoit seulement un peu de lueur avec le diaphragme 10. A 8h 40′ O''... .4 j'ai vu assez bien le premier & le second avec le diaphragme 14, mais je n'ai pu distinguer le quatrième, pas même avec le diaphragme 15.
	8. 49. 48	immersion du quatrième. Ciel parfaitement serein, & les bandes très-distinctes.
22......	6. 14. 18	émers. du premier; il fait parfaitement beau;

	Temps vrai.	
		& les bandes très-diſtinctes, mais il fait encore jour.
22 Octob.	6h 18′ 42″	émerſion avec le diaphragme 12; j'avois d'abord mis le diaphragme 11, mais voyant que le Satellite tardoit trop à paroître, j'ai mis le diaphragme 12. A 6h 30′, il ne paroiſſoit pas encore avec le diaphragme 11; il paroît que le ciel s'eſt un peu brouillé. A 7h 30′ le ciel eſt tout couvert.
26......	10. 53. 52	je m'aperçois que le Satellite qui eſt proche de Jupiter eſt groſſi, je crois par conſéquent que le ſecond Satellite eſt ſorti de l'ombre.
	10. 59. 52	je diſtingue que les Satellites ſont ſéparés; le ciel n'eſt pas parfaitement ſerein, & les bandes ne ſont pas bien diſtinctes.
29......	8. 10. 19	émerſion du premier. Il fait parfaitement beau & on voit très-diſtinctement les bandes.
	8. 13. 20	émerſion avec le diaphragme 12. A 8h 15′ je voyois le Satellite avec le diaphragme 11. A 8h 17′ 30″ je ne le voyois pas avec le diaphragme 10.
5 Nov..	7. 42. 0	Jupiter ſort d'un nuage, & le quatrième eſt ſorti de l'ombre. A 10h totalement couvert.
9......	6. 42. 57	émerſion du troiſième. Le ciel eſt chargé de vapeurs; on voit difficilement les bandes & le ſecond Satellite qui eſt à gauche.
21......	8. 24. 56	émerſion du premier. Le ciel eſt chargé de vapeurs, on voit difficilement les bandes.
22 Déc..	6. 34. 59	émerſion du troiſième. Jupiter mal terminé, on voit difficilement les bandes.
	7. 24. 54	émerſion du ſecond. Jupiter eſt bien terminé & on voit bien les bandes.
	7. 32. 21	émerſion avec le diaphragme 14. A 7h 34′ il diſparoît totalement avec le diaphragme 13.
23......	4. 53. 12	émerſion du premier; il fait grand jour, on voit à peine le quatrième Satellite.

MÉMOIRE
CONTENANT LES OBSERVATIONS DE LA PREMIÈRE COMÈTE
Qui a paru en 1760, & qui est la cinquante-unième dont l'orbite ait été calculée;
Observée de l'Observatoire de la Marine à Paris, depuis le 8 Janvier jusqu'au 30 du même mois.

Par M. MESSIER.

10 Avril 1772.

APRÈS que la célèbre Comète de 1759 eut cessé de paroître, & pendant que les Astronomes n'étoient plus occupés qu'à en consigner les observations dans leurs annales, comme un des monumens le plus précieux pour l'Astronomie, une nouvelle Comète inattendue descendit vers nous au commencement de 1760, & fut aperçue tant à Paris que dans d'autres endroits de l'Europe, par quelques Astronomes ou par d'autres personnes qui les en avoient avertis; elle étoit remarquable tant par sa grandeur que par l'étendue considérable de sa chevelure, de sorte que tous les Astronomes qui eurent la curiosité de jeter les yeux du côté du midi dûrent l'apercevoir à Paris, lorsqu'après plusieurs jours de temps couvert, le ciel fût devenu parfaitement serein, le 8 Janvier 1760. Ce même jour, ayant eu la curiosité de regarder le Ciel, & sur-tout la belle constellation d'Orion qui brilloit au-devant d'une des fenêtres du Collége royal de France où je demeurois alors: j'aperçus aussi-tôt cette Comète comme un nuage blanchâtre, située auprès de l'Étoile de la seconde ou troisième grandeur, qui est placée dans le genou droit d'Orion, & qui est nommée κ par Bayer; la Comète égaloit en éclat cette étoile. Pour m'assurer de la position de

la Comète, je me rendis à l'Obſervatoire de la Marine; il n'étoit pas neuf heures du ſoir, & la conſtellation d'Orion n'avoit pas encore paſſé le Méridien. J'examinai la Comète avec une lunette ordinaire d'un pied, qui étoit fort claire; je vis le noyau environné d'une grande nébuloſité, la lumière du noyau étoit vive & un peu rougeâtre: je me préparai enſuite à obſerver le paſſage de la Comète au Méridien dans un téleſcope Newtonien de 3 pieds 2 pouces de foyer, elle y paſſa à $10^h\ 25'\ 51''$ de temps vrai; j'y obſervai auſſi le paſſage de l'étoile $\varkappa$ du genou d'Orion, près de laquelle ſe trouvoit la Comète; j'obſervai de même au Méridien une Étoile dont le lieu n'étoit pas encore connu, que j'eſtimai de la ſeptième grandeur, qui étoit auſſi dans le voiſinage de la Comète. Après avoir calculé la poſition de $\varkappa$ d'Orion pour le temps de ſon paſſage, d'après le Catalogue que M. de la Caille a donné *(Aſtronomiæ fundamenta)*, j'ai déduit la poſition du noyau de la Comète: on trouvera cette détermination & les ſuivantes dans une Table qui eſt à la ſuite de ce Mémoire. Après le paſſage de la Comète au Méridien, j'obſervai le diamètre du noyau, en le comparant à la groſſeur apparente d'un des fils d'un micromètre adapté à un téleſcope Newtonien de 4 pieds & demi de longueur, j'en conclus le diamètre de 34 ſecondes; j'eſtimai enſuite l'étendue de la chevelure d'environ 15 minutes de degré. La queue étoit longue de 4 degrés, & dirigée vers l'eſt; elle paſſoit par les Étoiles de ſixième grandeur, qui ſont la première & la ſeconde de la conſtellation de la Licorne, ſuivant l'ordre qu'elles ont dans la ſeconde édition du Catalogue de Flamſtéed: ce n'étoit qu'avec peine qu'on pouvoit apercevoir la queue à la vue ſimple; mais on la voyoit diſtinctement avec une lunette d'un pied, qui groſſiſſoit médiocrement, qui étoit extrêmement claire & qui avoit un grand champ. Je continuai d'obſerver la Comète juſqu'à ſon coucher en déterminant ſes poſitions, & par ces obſervations je reconnus que la Comète avoit un mouvement conſidérable, & qu'elle parcouroit plus d'un degré en une heure de temps.

Le 9, quoique le ciel ne fût pas des plus ſereins, je revis la Comète dans le voiſinage des étoiles μ, ν & c de l'Éridan. Je comparai le noyau à deux Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore connus, & j'en déterminai les poſitions par obſervation: les apparences de la Comète étoient conſidérablement diminuées; ſa lumière égaloit à peine les Étoiles de la quatrième grandeur, & ſa vîteſſe en aſcenſion droite n'étoit alors que d'environ 40 à 50 minutes par heure.

Le 10 & le 11, le ciel fut couvert; mais le 12, je revis la Comète auſſi-tôt que les Étoiles purent paroître: ſa lumière étoit encore diminuée environ de moitié depuis le 9, il étoit difficile de l'apercevoir à la vue ſimple; ſa queue ſe faiſoit encore remarquer à la lunette d'un pied, mais avec bien plus de difficulté que le jour de la première apparition. J'obſervai le paſſage de la Comète au Méridien, elle y paſſa à $7^h\ 15'\ 59''$ de temps vrai; j'obſervai auſſi le paſſage des étoiles o, ξ* du Taureau, λ & μ de la tête de la Baleine; je comparai de même le noyau de la Comète à une Étoile dont le lieu n'étoit pas encore déterminé, que j'eſtimai de huitième grandeur. J'obſervai dans la ſuite pluſieurs fois cette Étoile au Méridien, pour en déduire ſa poſition & enſuite celle du noyau de la Comète: je comparai la même nuit du 12 au 13, le diamètre apparent du noyau, comme ci-devant, à un des fils du micromètre, & je le trouvai diminué de 14 ſecondes, étant alors de 20 ſecondes.

Ciel couvert le 13 & le 14; mais le 15, le temps étant devenu ſerein vers les 8 heures & demie, je revis la Comète près de l'étoile μ de la Baleine, à laquelle je la comparai: je reconnus que la Comète perdoit chaque jour ſenſiblement de ſa lumière, & il étoit preſque impoſſible de l'apercevoir à la vue ſimple, ce ſoir-là.

Le 16, le ciel partie couvert le ſoir; dans les intervalles des nuages je revis la Comète, elle étoit encore aſſez viſible

* Il y a erreur dans la déclinaiſon de cette Étoile, n.° 81, rapportée dans le Catalogue zodiacal de M. de la Caille, inſéré dans le ſixième volume des Éphémérides, on doit lire $8^d\ 54'\ 5''$, au lieu de $9^d\ 57'\ 5''$.

aux inſtrumens pour en pouvoir déterminer exactement le lieu; elle ne s'étoit avancée, depuis la veille, que d'un peu plus d'un degré en aſcenſion droite, étant alors dans le pied du Bélier près de l'étoile ξ, que Flamſteed dans ſon Catalogue, eſtime de ſixième grandeur: à différentes heures de la nuit, je comparai le noyau de la Comète à cette Étoile; on en trouvera les poſitions dans la Table qui eſt à la ſuite de ce Mémoire.

Depuis le 16 juſqu'au 25 Janvier, le ciel fut couvert; mais le 25 étant devenu parfaitement ſerein, je recherchai la Comète dans l'endroit du ciel où elle devoit paroître ſuivant mes obſervations précédentes; il ne fut pas poſſible de l'apercevoir, j'en attribuai la cauſe à la lumière de la Lune qui étoit en quadrature & en conjonction avec la Comète.

Le 30 Janvier, le ciel étant ſerein, je recherchai la Comète avec le téleſcope de 4 pieds & demi, & ce ne fut pas ſans peine que je pus la revoir; ſa lumière étoit preſqu'éteinte, & ſon mouvement ſi ralenti que je diſcontinuai les jours ſuivans de l'obſerver, préſumant que les obſervations que je pourrois en faire ſeroient peu exactes pour en pouvoir faire uſage dans le calcul des élémens de ſa théorie: de plus j'étois occupé dans le même temps à d'autres obſervations d'une nouvelle Comète que j'avois découverte le 26 de Janvier au matin; ainſi c'eſt au 30 de Janvier que ſe terminent mes obſervations de la première Comète. Je la comparai encore le même ſoir à l'étoile trente-unième du Bélier, ſuivant l'ordre du Catalogue de Flamſteed, ou la cinquante-troiſième ſuivant celui de M. de la Caille, inſéré dans le ſixième volume des Éphémérides; cette étoile y eſt marquée de la cinquième à la ſixième grandeur. La Comète précédoit l'Étoile au fil horaire, de $6^d\ 59'\ 6''$, elle avoit même déclinaiſon que l'Étoile; l'obſervation fut faite à $7^h\ 18'$ de temps vrai.

Pour obſerver la Comète hors du Méridien, j'ai employé un téleſcope Newtonien de 4 pieds & demi de longueur, qui groſſiſſoit le diamètre des objets environ ſoixante-ſix fois; à cet inſtrument étoit adapté un micromètre à fils de ſoie,

qui

qui s'inclinoit dans tous les ſens, & il m'a ſervi à déterminer les différences d'aſcenſion droite & de déclinaiſon entre le noyau de la Comète & les Étoiles: ce téleſcope étoit le même que celui qui avoit déjà été employé aux obſervations des deux dernières Comètes, de 1758 & de 1759.

EXPLICATION des deux Tables qui ſuivent.

La première Table contient les poſitions de la Comète; la première colonne les jours du mois; la ſeconde, les temps vrais de chaque obſervation; la troiſième, les aſcenſions droites de la Comète obſervée; la quatrième, les déclinaiſons de la Comète; la cinquième, les différences de paſſages ou d'aſcenſions droites entre la Comète & les Étoiles, marquées du ſigne — ſi la Comète précédoit ou ſi elle étoit à l'occident de l'Étoile, & du ſigne + ſi elle ſuivoit l'Étoile ou ſi elle étoit à l'orient: cette différence étant ajoutée ou ſouſtraite, ſuivant le ſigne, de l'aſcenſion droite de l'Étoile avec laquelle la Comète a été comparée, on aura l'aſcenſion droite de la Comète. La ſixième colonne contient les différences en déclinaiſon entre la Comète & les Étoiles marquées, de même que les précédentes, des ſignes + & —, pour qu'en les ajoutant ou ſouſtrayant ſuivant le ſigne, de la déclinaiſon de l'Étoile avec laquelle la Comète aura été comparée, on ait ſa déclinaiſon. La ſeptième colonne contient la grandeur des Étoiles. La huitième, les lettres de Bayer & les numéros des Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore déterminés; ou ceux du Catalogue de Flamſteed, *ſeconde édition*, ſuivant l'ordre qu'elles tiennent dans chaque Conſtellation. La dernière colonne fait connoître les Conſtellations auxquelles appartiennent ces différentes Étoiles.

La ſeconde Table contient les aſcenſions droites & les déclinaiſons des Étoiles, réduites au temps des obſervations; je n'ai fait d'autre réduction à l'aſcenſion droite & à la déclinaiſon de ces Étoiles, que celle qu'on trouve dans les Catalogues, ſous le titre de *variation annuelle:* on verra par

cette Table, que la Comète m'a donné occaſion de déterminer les poſitions de cinq Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore dans nos Catalogues.

Je joins à ce Mémoire une Carte céleſte qui repréſente la route apparente que la Comète a tenue parmi les Étoiles fixes. Cette Carte eſt diviſée en degrés d'aſcenſion droite & de déclinaiſon, & contient les conſtellations ſuivantes; le Bélier, la Baleine, le Taureau, l'Éridan, Orion, la Licorne, le petit Chien, le grand Chien & la poupe du Vaiſſeau: j'y ai rapporté les Étoiles qui ſont déſignées dans le Catalogue britannique ſous des lettres grecques & autres, à l'exception des Étoiles qui compoſent la nouvelle conſtellation de la Licorne.

TABLE I.

TABLE des positions apparentes de la première Comète observée en 1760, comparée aux Étoiles fixes depuis le 8 Janvier, jour de son apparition, jusqu'au 30 du même mois.

Là où il y a des astérisques, la Comète a été observée au Méridien avec l'Étoile.

JANVIER.	TEMPS vrai.	ASCENS. droite observée.	DÉCLIN. observée.	DIFFÉRENCE en Ascens. droite par les Étoiles.	DIFFÉRENCE en Déclinaison par les Étoiles.	Grand. des Étoiles.	Lettres de Bayer & N.os des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.			
			Australe.					
8	10. 25. 51	86. 12. 27	9. 17. 44	2. 6. 26 +	0. 28. 36 —	3	κ	d'Orion. *
	10. 25. 51	86. 12. 45	9. 18. 16	1. 1. 45 +	0. 10. 40 +	7	5	déterminée par observ. *
	10. 55. 37	85. 38. 56	9. 7. 15	0. 27. 56 +	0. 0. 21 —	7	5	la même.
	11. 10. 46	85. 21. 8	9. 0. 50	0. 10. 8 +	0. 6. 40 —	7	5	la même.
9	9. 14. 45	65. 52. 20	2. 14. 0	0. 7. 0 —	0. 30. 56 —	7	4	déterminée.
	9. 20. 27	65. 46. 57	2. 13. 14	0. 6. 37 +	0. 11. 24 —	8	3	déterminée.
	9. 27. 17	65. 44. 12	2. 12. 53	0. 3. 52 +	0. 11. 45 —	8	3	la même.
	9. 43. 25	65. 33. 27	2. 9. 7	0. 10. 52 +	0. 14. 2 —	7	2	déterminée.
			Boréale.					
12	7. 15. 59	42. 56. 37	6. 4. 43	5. 2. 15 —	2. 5. 36 —	4	ο	du Taureau *.
	7. 15. 59	42. 56. 37	6. 4. 43	5. 36. 15 —	2. 48. 15 —	4	ξ	du Taureau *.
	7. 15. 59	42. 56. 12	6. 4. 38	1. 13. 0 +	1. 51. 39 —	4	λ	de la Baleine *.
	7. 15. 59	42. 56. 7	6. 4. 28	4. 56. 7 +	3. 0. 51 —	4	μ	de la Baleine *.
	11. 23. 0	42. 20. 11	6. 24. 53	1. 56. 0 +	0. 16. 50 —	8	ι	déterminée.
	11. 37. 53	42. 17. 56	6. 25. 4	1. 53. 45 +	0. 16. 39 —	8	ι	la même.
	11. 48. 43	42. 16. 37	6. 25. 18	1. 52. 26 +	0. 16. 25 —	8	ι	la même.
15	9. 25. 45	35. 49. 45	8. 41. 28	2. 10. 15 —	0. 23. 51 —	4	μ	de la Baleine.
	9. 44. 30	35. 48. 30	8. 41. 38	2. 11. 30 —	0. 23. 41 —	4	μ	la même.
16	9. 33. 55	34. 31. 26	9. 9. 47	1. 31. 45 +	0. 21. 3 —	5	ξ	du Bélier.
	11. 5. 2	34. 29. 49	9. 10. 29	1. 30. 8 +	0. 20. 21 —	5	ξ	la même.
	11. 17. 57	34. 29. 11	9. 10. 33	1. 29. 30 +	0. 20. 17 —	5	ξ	la même.
	11. 28. 56	34. 28. 56	9. 10. 36	1. 29. 15 +	0. 20. 14 —	5	ξ	la même.
30	7. 18. 0	28. 54. 40	11. 25. 14	6. 59. 5 —	0. 0. 0	5	53	du Bélier. Cat. de la Caille.

TABLE II.

TABLE des Ascensions droites & Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la première Comète observée en 1760, a été comparée; leurs positions réduites au temps des Observations.

ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.	Grand. des Étoiles	Lettres de Bayer & N.° des Étoiles.	ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
32. 59. 41	9. 30. 50	5	ξ	du Belier, la Comète comparée le 16 Janvier.
35. 53. 45	11. 25. 24	5	53	du Bél. cat. de M. de la Caille. Com. comp. le 30
38. 0. 0	9. 5. 19	4	μ	de la Baleine. Comète comp. le 12 & le 15.
40. 24. 11	6. 41. 43	8	ι	déterm. par α de la Baleine. Com. comp. le 12.
41. 43. 12	7. 56. 17	4	λ	de la Baleine. Com. comp. le 12 au méridien.
47. 58. 52	8. 10. 19	4	ο	du Taureau. Com. comp. le 12 au méridien.
48. 32. 52	8. 52. 58	4	ξ	du Taureau. Com. comp. le 12 au méridien.
	Australe.			
65. 22. 35	2. 23. 9	7	2	déterminée. Comète comparée le 9.
65. 40. 20	2. 24. 38	8	3	déterminée. Comète comparée le 9.
65. 59. 20	2. 44. 56	7	4	déterminée. Comète comparée le 9.
84. 6. 1	9. 46. 20	3	κ	d'Orion. Comète comparée le 8 au méridien.
85. 11. 0	9. 7. 36	7	5	déterm. Com. comp. le 8 au mér. & hors du mér.

Les élémens de la théorie de cette Comète ont été calculés par M. l'abbé de la Caille sur trois de ses observations, savoir, celles du 8, du 16 Janvier & du 3 Février; les mêmes élémens calculés par M. l'abbé Chappe, d'après les observations du 8, faites par M. Maraldi; & celles des 12 & 16 Janvier, faites par lui-même.

	Selon M. de la Caille.	*Selon M. l'abbé Chappe.*
Lieu du nœud ascendant.	$2^s\ 19^d\ 50'\ 45''$	$2^s\ 19^d\ 20'\ 24''$
Lieu du périhélie	4. 18. 24. 35	4. 19. 3. 52
Inclinaison de l'orbite.	4. 51. 32	4. 42. 10
Logarithme de la distance périhélie. . .	9,984972	9,983064
Passage au périhélie le 16 Déc. 1759, à	$21^h\ 13'\ 0''$	$12^h\ 58'\ 12''$

Temps moyen au Méridien de Paris.

Son mouvement rétrograde, c'est-à-dire, contre l'ordre des signes.

Comme je n'avois découvert cette Comète que le 8 Janvier au ſoir, & qu'elle avoit été vue la veille à Liſbonne par M. l'Abbé Chevalier, qui l'obſerva juſqu'au 22 Janvier. Je rapporterai ici, pour complèter ce Mémoire, les obſervations qu'il en avoit faites le 7, & qu'il m'a communiquées.

« J'ai vu une Comète pour la première fois à Liſbonne le 7 Janvier après 9 heures du ſoir, le Ciel étoit clair & « ſerein: on la voyoit à la vue ſimple, ainſi que ſa chevelure, « plus grande qu'aucune Étoile, & même que Jupiter & Vénus. «

Je comparai la Comète aux Étoiles fixes les plus voiſines; « la Comète étoit un peu au-deſſus de deux Étoiles qui ſont « dans la poupe du Navire, & au-deſſous des pieds du « *Monocéros*, elle formoit un triangle avec les deux étoiles *ι* « & *e* du Navire; la Comète à l'angle du ſommet, & le côté « de la Comète à l'étoile *ι* plus grand que l'autre côté allant « de la Comète à l'étoile *e*, eſtimé à la vue ſimple. Nous « eſtimames la Comète au cinquième degré du Lion, & ſa « latitude méridionale de 38 ou 39 degrés. Son aſcenſion « droite entre 118 & 119 degrés. Après cette eſtime j'em- « ployai la lunette d'un quart-de-cercle pour déterminer « exactement la ſituation de la Comète par ſon paſſage à diverſes « repriſes par un même vertical, ainſi que les paſſages au même « fil des Étoiles voiſines & connues: je vis bientôt que le « mouvement de la Comète étoit rapide & rétrograde. «

La Comète étoit à $10^h\ 57'$ à l'orient de *Sirius* de $19^d\ 40'$ « $6''$, qui étant ajoutés à l'aſcenſion droite de l'Étoile priſe dans « la Connoiſſance des mouvemens céleſtes, de $98^d\ 38'\ 45''$, don- « nera celle de la Comète de $118^d\ 18'\ 51''$; *η* de la queue du « grand Chien, paſſa au fil vertical de la lunette à $10^h\ 26'\ 40''$; « la Comète au même fil à $11^h\ 1'\ 20''$; différence de paſſage en « temps, $34'\ 40''$; en degrés de grand cercle, $8^d\ 41'\ 25''$, qui « étant ajoutés à l'aſcenſion droite de l'Étoile, qui eſt de 108^d « $39'\ 1''$, donnent l'aſcenſion droite de la Comète de $117^d\ 20'$ « $26''$; la différence de déclinaiſon entre la Comète & l'Étoile « étoit de $10^d\ 16'$; la Comète ſupérieure, cette différence étant « ôtée de $28^d\ 51'\ 2''$, déclinaiſon de l'Étoile, l'on aura 18^d « $35'\ 2''$ pour la déclinaiſon de la Comète, méridionale. «

» La Comète au vertical, à $11^h 17' 2''$, une Étoile de ſixième » grandeur, qui eſt la douzième de la conſtellation du Navire, » ſuivant l'ordre qu'elles ont dans le Catalogue de Flamſteed: » ſon aſcenſion droite, réduite au temps de cette obſervation, » étoit de $117^d 12' 10''$; cette Étoile paſſa au fil horaire à » $11^h 18' 3''$; aſcenſion droite de la Comète, $116^d 57' 25''$.

» La Comète au vertical à $12^h 7' 22''$, la même étoile du » Navire au même vertical à $12^h 11' 58''$; aſcenſion droite » de la Comète $115^d 48' 14''$.

» La Comète & l'étoile ſeptième du Navire, ſuivant » Flamſteed, paſſent au vertical en même-temps à $12^h 41' 1''$; » l'aſcenſion droite de cette Étoile, pour le temps de l'obſer- » vation, donne pour la poſition de la Comète $114^d 57' 31''$.

» La Comète au vertical à $13^h 41' 2''$; la même étoile du » Navire, la ſeptième, au même fil à $13^h 47' 6''$; aſcenſion » droite de la Comète $113^d 26' 21''$.

» La Comète au vertical à $14^h 11' 2''$; la même étoile du » Navire, la ſeptième, au même vertical à $14^h 20' 10''$; différence » de paſſages en temps, $9' 8''$; en degrés, $2^d 17' 23''$; aſcenſion » droite de la Comète, $112^d 40' 8''$; la différence de décli- » naiſon entre la Comète & l'Étoile étoit de $6^d 53' 2''$; la » déclinaiſon de l'Étoile étant de $24^d 16' 24''$; celle de la » Comète de $17^d 23' 22''$ auſtrale.

» J'examinai la Comète avec un téleſcope Grégorien de » 7 pieds, le noyau paroiſſoit très-brillant, rond & bien ter- » miné: la chevelure étendue & d'une lumière blanchâtre: il » ne fut pas poſſible de lui apercevoir de queue, ſans doute » à cauſe de l'oppoſition de la Comète au Soleil.

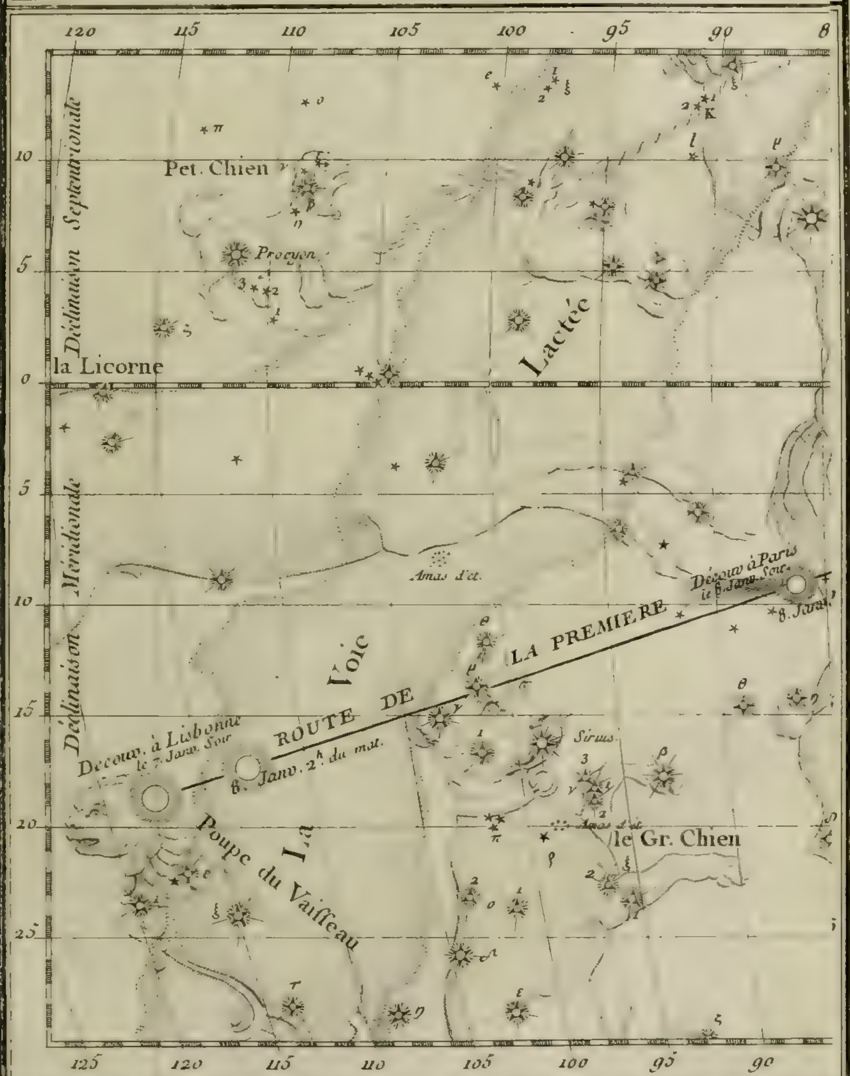
» Je meſurai le diamètre de la chevelure de la Comète par » le moyen du micromètre, & il fut eſtimé auſſi par le champ » de la lunette, & trouvé de 20 à 21 minutes de degré: le » diamètre du noyau de 45 ſecondes. Il ne fut pas poſſible » d'obſerver le paſſage de la Comète au méridien, n'ayant pu » y fixer le quart-de-cercle cette même nuit; mais elle dut y paſſer à $12^h 26' 35''$ ».

CARTE *de la route apparente de la premiere (*
Observée jusqu'au 30. du même mois étant
Par Mr. l'Abbé

Grandeur des Etoiles

1 2 3 4 5 6 7 8.

C'est



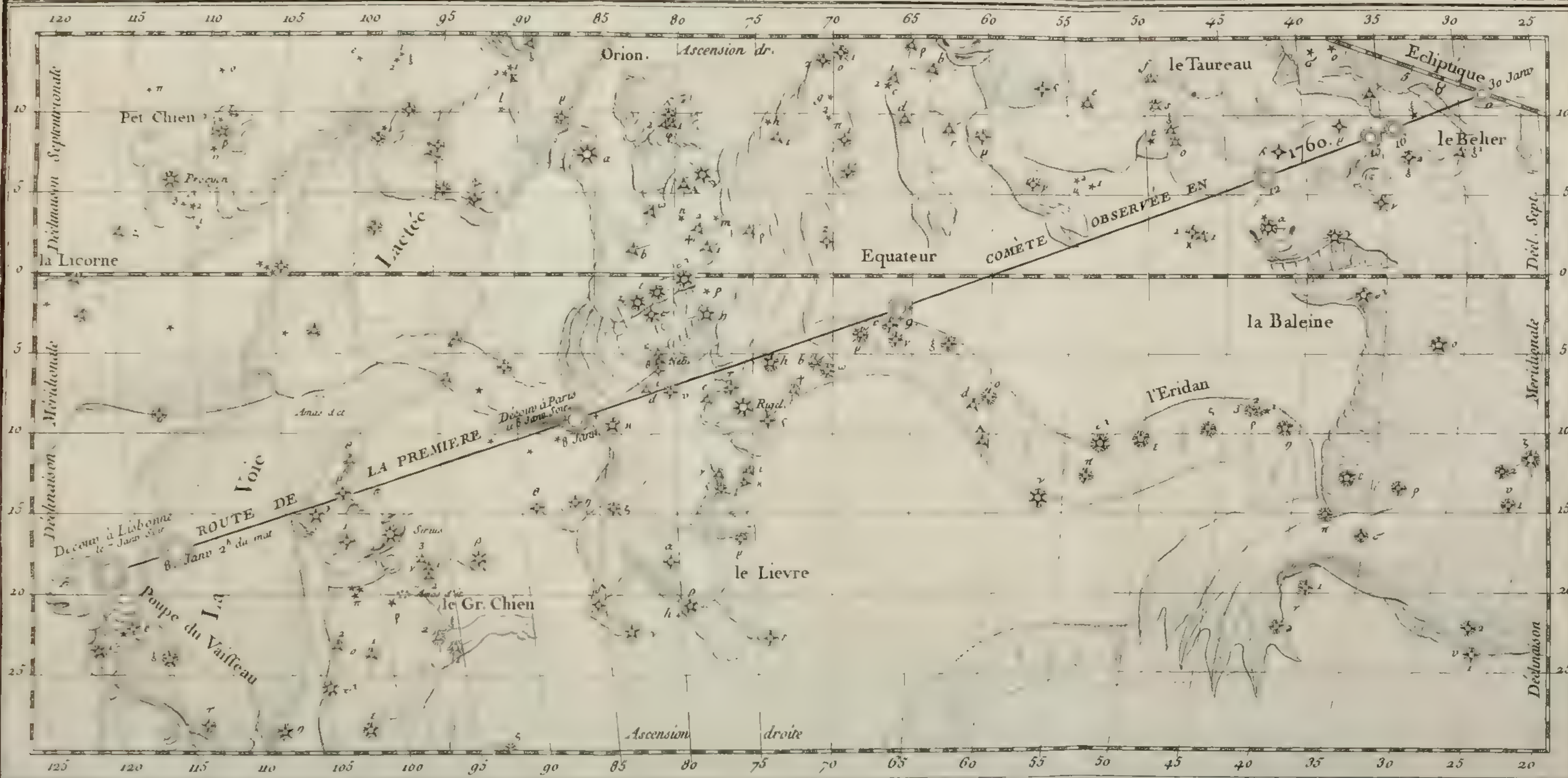
Gravé par Y. le Gouaz, d'après le dessin de M. Messier.

CARTE *de la route apparente de la première* Comète *observée en* 1760. *Découverte de l'Observatoire de la Marine à* Paris *le* 8. *Janvier*, *Observée jusqu'au* 30. *du même mois étant alors dans le Bélier*. La *même Comète découverte à* Lisbonne *dans la poupe du Vaisseau*, *Par M.r l'Abbé* Chevalier *le* 7. *Janvier entre* 9. *et* 10. *heures du Soir*.

C'est la LI.e Comète dont l'Orbite ait été calculée

Grandeur des Etoiles

1 2 3 4 5 6 7 8.



Gravé par Y. le Gouaz, d'après le dessin de M. Messier.

MÉMOIRE

Sur les Solutions particulières des Équations différentielles, & sur les inégalités séculaires des Planètes.

Par M. DE LA PLACE.

SI l'on a une équation différentielle, telle que $\partial y = p\partial x$, p étant fonction de x & de y; son intégrale générale renferme une constante arbitraire à laquelle on peut conséquemment supposer toutes les valeurs possibles; on aura ainsi une infinité de solutions de l'équation différentielle, c'est-à-dire, d'équations entre x & y, qui la rendront identiquement nulle.

Il étoit assez naturel d'en conclure que toute solution d'une équation différentielle se trouvoit comprise dans l'intégrale générale, & qu'il suffisoit pour les faire coïncider, de donner à la constante arbitraire une valeur déterminée. M. Euler est le premier qui ait remarqué le contraire *(Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1756)*; cet illustre Géomètre a de plus donné dans le premier volume de son Calcul intégral, une méthode pour déterminer si une solution d'une équation différentielle du premier ordre, est comprise ou non dans son intégrale générale, sans connoître cette intégrale; mais outre que cette méthode ne semble pas pouvoir s'étendre aux degrés ultérieurs, elle suppose d'ailleurs que la solution est sous cette forme, $y = X$, X étant fonction de x; ce qui la rend souvent impraticable.

Puisqu'il peut exister des équations qui satisfont à une équation différentielle, sans être comprises dans son intégrale générale, on ne peut se flatter d'avoir par la seule intégration, la résolution complète des Problèmes qui en dépendent; il est de plus essentiel d'avoir égard à toutes les solutions particulières, & de les déterminer. Une théorie de ce genre de solutions importe conséquemment au progrès de l'analyse infinitésimale, & doit être regardée comme un supplément

néceſſaire au Calcul intégral. Ces conſidérations m'ont fait entreprendre les recherches ſuivantes ſur cette matière.

I.

J'appellerai *ſolution* d'une équation différentielle d'un degré quelconque, toute équation d'un degré inférieur qui ſatisfera à cette équation différentielle; *intégrale particulière*, toute ſolution qui ſe trouvera de plus compriſe dans l'intégrale générale, & *ſolution particulière*, toute ſolution qui n'y eſt pas compriſe.

Si l'on a l'équation différentielle, $\mu M \partial x + \mu N \partial y = 0$; il eſt viſible qu'elle deviendra nulle par la ſuppoſition de $\mu = 0$; en ſorte que l'on pourroit conſidérer cette dernière équation, comme une ſolution de l'équation différentielle; mais il ne ſera point ici queſtion de ce genre de ſolutions qu'il eſt très-facile d'ailleurs de déterminer; nous conſidérerons celles qui ſatisfont à l'équation différentielle proprement dite, c'eſt-à-dire à l'équation miſe ſous cette forme, $\partial y = p \partial x$.

Il eſt aiſé de prouver l'exiſtence des ſolutions particulières, en conſidérant l'équation différentielle, $y \partial y + x \partial x = \partial y \sqrt{(xx + yy - aa)}$; car l'équation $xx + yy - aa = 0$, ſatisfait viſiblement à cette équation différentielle, ſans être cependant compriſe dans l'intégrale générale.......... $y + C = \sqrt{(xx + yy - aa)}$, puiſque de quelque manière que l'on détermine la conſtante arbitraire C, il eſt impoſſible d'en conclure $xx + yy = aa$.

Préſentement, tous les Problèmes que l'on peut ſe propoſer ſur ce genre de ſolutions, ſe réduiſent aux deux ſuivans.

Étant donnée une équation différentielle d'un ordre quelconque, d'un nombre quelconque de variables, & dont on ne connoît point l'intégrale complète,

1.° Déterminer ſi une équation d'un ordre inférieur qui y ſatisfait, eſt compriſe ou non dans ſon intégrale générale.

2.° Déterminer toutes les ſolutions particulières de cette équation différentielle.

Voici pour les réſoudre une méthode fort ſimple, & qui n'eſt reſtreinte ni par l'ordre de l'équation différentielle, ni par

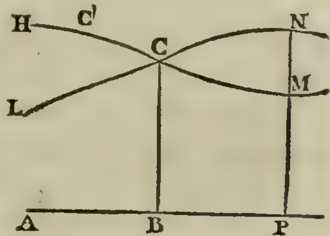
par le nombre des variables. Je ſuppoſerai d'abord qu'il n'y en a que deux, & que l'équation eſt différentielle du premier ordre. Je la repréſenterai conſéquemment par celle-ci... $\partial y = p \partial x$; p étant fonction de x & de y. Cela poſé.

II.

PROBLÈME I.

Déterminer ſi une ſolution donnée de l'équation différentielle $\partial y = p \partial x$, *eſt compriſe ou non dans ſon intégrale générale, ſans connoître cette intégrale.*

Soit $\mu = 0$, la ſolution donnée de l'équation différentielle dont je ſuppoſerai l'intégrale complète exprimée par l'équation $\varphi = 0$. Si l'on conſtruit, au moyen des deux équations, $\mu = 0$, & $\varphi = 0$, deux courbes HCM & LCN, ſur le même axe AB, des abſciſſes dont l'origine ſoit fixée au point A; & que l'on détermine la conſtante arbitraire de l'équation $\varphi = 0$, par cette condition que la courbe LCN paſſe par un point donné C, de la courbe HCM; il eſt viſible que ſi l'équation $\mu = 0$ eſt compriſe dans celle-ci, $\varphi = 0$, les deux courbes LCN & HCM doivent coïncider dans tous leurs points; ſi cela n'eſt pas, l'équation $\mu = 0$, eſt une ſolution particulière.



Si l'on prend maintenant dans les deux courbes, deux ordonnées quelconques, PM & PN répondantes à la même abſciſſe AP; & que l'on faſſe $BP = \alpha$, $AB = x$, $BC = y$, $PM = y'$, & $PN = Y'$; marquant d'ailleurs par la caractériſtique δ, les différences dans la courbe HCM, par la caractériſtique ∂, les différences dans la courbe LCN, & ſuppoſant ∂x & δx conſtans, on aura, comme l'on ſait,

$$y' = y + \frac{\alpha \delta y}{\delta x} + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} + \&c.$$

$$Y' = y + \frac{\alpha \partial y}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \&c.$$

Or, afin que les deux courbes coïncident dans tous leurs points, il faut que l'on ait conſtamment $y' = Y'$, quelque ſoit α, ce qui ne peut être, à moins que l'on n'ait au point C,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \text{\&c.}$$

J'obſerve préſentement que ſi au lieu du point C, on eût pris ſur la courbe HCM un autre point quelconque C', on auroit eu pour ce point les mêmes équations, parce que la conſtante arbitraire de l'équation $\varphi = 0$ n'entre point dans les valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, &c. de-là il ſuit que les équations précédentes doivent avoir lieu en même temps que celle-ci $\mu = 0$, quelle que ſoit x, pour que cette dernière équation ſoit une intégrale particulière. On peut donc ainſi déterminer ſi l'équation $\mu = 0$ eſt compriſe ou non dans celle-ci, $\varphi = 0$; elle y ſera compriſe, ſi elle ſatifait aux équations

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \text{\&c.}$$

autrement, elle ne ſera qu'une ſolution particulière. Or, on peut s'aſſurer ſi ces équations peuvent être ſatisfaites, ſans connoître l'intégrale générale $\varphi = 0$; car, de l'équation $\mu = 0$, il eſt facile de conclure les valeurs de $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$, &c. je les repréſente par v, v', v'', &c. De plus, l'équation différentielle $\partial y = p \partial x$, donne $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; partant, $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$; ſoit p' cette quantité, (par $\frac{\partial p}{\partial x}$, j'entends la différence entière de p, diviſée par ∂x, & par $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ j'entends le coëfficient de ∂x, dans la différence de p; il en eſt de même de toutes les autres expreſſions ſemblables); il eſt facile d'avoir par un pareil procédé, les valeurs de $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, &c. ſoient p'', p''', &c.

ces valeurs; les équations précédentes deviendront $v - p = 0$, $v' - p' = 0$, $v'' - p'' = 0$, &c. La première de ces équations a nécessairement lieu, puisque l'équation $\mu = 0$, satisfait à l'équation différentielle $\partial y = p\,\partial x$; ainsi ce ne peut être que dans les suivantes que l'on peut apercevoir si la solution $\mu = 0$ est, ou n'est pas une intégrale particulière.

I I I.

Si l'équation $y = 0$, étoit une intégrale particulière, on auroit $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$, &c. il faudroit donc que l'équation $y = 0$, rendit nulles les quantités p, p', p'', &c. ou, ce qui revient au même, les valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, &c. tirées de l'équation $\partial y = p\,\partial x$; voyons quelle doit être pour cela la nature de p; je suppose qu'on le réduise dans une suite ascendante par rapport à y, on aura

$$p = f.y^n + f'.y^{n'} + f''.y^{n''} + \&c.$$

f, f', f'', &c. étant fonctions de x, & n étant nécessairement positif; on peut donc mettre p sous cette forme $y^n.q$, q ne devenant ni infini, ni zéro, en vertu de l'équation $y = 0$; présentement que l'on différencie l'expression précédente de p réduit en séries, on aura

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial x}.[nf.y^{n-1} + n'f'.y^{n'-1} + \&c.] + y^n.\frac{\partial f}{\partial x} + y^{n'}.\frac{\partial f'}{\partial x} + \&c.$$

Si l'on substitue dans cette équation, au lieu de $\frac{\partial y}{\partial x}$, sa valeur, $f.y^n + f'.y^{n'} + \&c.$ on aura

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = nf^2.y^{2n-1} + (n + n')ff'.y^{n+n'-1} + \&c. + y^n.\frac{\partial f}{\partial x} + \&c.$$ On trouvera pareillement,

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = n.(2n - 1).f^3.y^{3n-2} + \&c.$$

& ainsi de suite; or, il est aisé de voir, en examinant la

loi de ces différences, qu'elles ne peuvent s'évanouir toutes par la supposition de $y = 0$, que dans le cas où n est égal ou plus grand que l'unité; d'où il suit que si l'équation $y = 0$ est une intégrale particulière de l'équation différentielle $\partial y = p \partial x$, p est réductible à cette forme $y^n . q$, n étant nécessairement positif, égal ou plus grand que l'unité, & q restant fini, lorsqu'on y fait $y = 0$; si n est positif & moindre que l'unité, l'équation $y = 0$, n'est qu'une solution particulière.

Il pourroit arriver cependant que p, au lieu d'être réductible à cette forme $y^n . q$, le fût à celle-ci, $\frac{q}{(l.y)^r}$, r étant positif; la supposition de $y = 0$, satisferoit à l'équation $dy = p dx$, parce qu'en faisant $y = 0$, $\frac{1}{(l.y)^r}$ devient nul, le logarithme de zéro étant infini. Mais l'équation $y = 0$ n'est alors qu'une solution particulière, parce que $(l.y)^r$ est toujours infiniment moindre que $\frac{1}{y^n}$, quelque grand que soit r, & quelque petit que soit n, lorsque $y = 0$; ce cas rentre donc dans celui où n est moindre que l'unité.

Comme on a dans le cas particulier, où $y = 0$, est une solution de l'équation différentielle, un moyen fort simple pour reconnoître si cette solution est en même temps une intégrale particulière, je vais chercher à y ramener le cas général, où la solution est une équation quelconque entre x & y.

I V.

Soit comme ci-dessus $\mu = 0$, une solution quelconque de l'équation $\partial y = p \partial x$; elle donnera par ce qui précède $v - p = 0$; ces deux quantités μ & $v - p$, doivent conséquemment avoir un facteur commun, lequel sera la vraie solution de l'équation différentielle; ainsi je puis considérer μ comme étant ce facteur lui-même. J'observerai ici que par facteur d'une quantité, j'entends toute fonction qui égalée à zéro, la fait évanouir. Je conçois maintenant μ sous une forme telle que $\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)$ & $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)$ ne deviennent ni

zéro, ni infinis par la supposition de $\mu = 0$; c'est ce qui aura toujours lieu, si les facteurs de μ n'y sont point élevés à d'autres puissances que l'unité: je suppose, en effet, que toutes les valeurs qui satisfont pour y dans l'équation $\mu = 0$, soient $y = M$, $y = M'$, $y = M''$, &c. M, M', M'', &c. étant des fonctions différentes de x, & que l'on ait $\mu = (y - M)(y - M')(y - M'')$ &c. Partant $\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) = (y - M')(y - M'')$ &c. $+ (y - M)$. $(y - M'')$ &c. $+ (y - M)(y - M')$ &c. $+$ &c. & $\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot (y - M') \cdot (y - M'')$ &c. $+ \frac{\partial M'}{\partial x} \cdot (y - M) \cdot (y - M'')$ &c. $+$ &c. Or il est aisé de voir, cela posé, qu'aucune des équations $y - M = 0$, $y - M' = 0$, &c. ne peut rendre infinies ou nulles les quantités $\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)$ & $\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)$.

Maintenant soit n l'exposant de la puissance à laquelle le facteur μ est élevé dans la quantité $v - p$, en sorte que l'on ait $v - p = \mu^n \cdot q$, q ne devenant ni infini, ni zéro, par la supposition de $\mu = 0$, & n étant nécessairement positif; puisque l'on a, $v = -\frac{\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}$, & $\frac{\partial y}{\partial x} = p$,

on aura, $-\mu^n q \partial x = \frac{\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)} \partial x + \partial y$. Partant,

$\partial\mu = -\mu^n \cdot q \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) \partial x$; cette équation est évidemment l'équation $\partial y = p \partial x$, mise sous une autre forme. Maintenant, puisque μ est fonction de x & de y, on peut avoir y, en fonction de x & de μ; de cette manière, $- q \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)$

deviendra une fonction de x & de μ, que je représente par h, h restant toujours fini dans la supposition de $\mu = 0$; on aura ainsi $\partial\mu = \mu^n . h\partial x$; l'équation $\partial y = p\partial x$ étant mise sous cette forme, il est aisé de voir par l'article précédent, que l'équation $\mu = 0$ ne peut en être une intégrale particulière, que dans le cas où n est égal ou plus grand que l'unité; autrement cette équation n'est qu'une solution particulière.

Je suppose que l'on ait $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{y - \surd(xx + yy - aa)}$; équation à laquelle satisfait celle-ci, $xx + yy - aa = 0$; on aura dans ce cas, $\mu = xx + yy - aa$, & l'on trouvera $\mu^n . q = \frac{x}{y - \surd(xx + yy - aa)} - \frac{x}{y} = \mu^{\frac{1}{2}} . [\frac{x}{yy - y\surd(xx + yy - aa)}]$. Partant, $n = \frac{1}{2}$, d'où il résulte que l'équation ...... $xx + yy - aa = 0$ n'est qu'une solution particulière.

V.

Je reprends l'équation $\partial\mu = \mu^n h\partial x$, & je réduis $\mu^n h$ dans une suite ascendante par rapport à μ; soit $\mu^n h = \mu^n . l + \mu^{n'} . l' +$ &c. l, l', &c. étant fonctions de x; que l'on différencie présentement cette expression de $\mu^n h$ par rapport à x seul, en regardant μ comme fonction de x & de y; elle deviendra en divisant par ∂x, $n\mu^{n-1} l . (\frac{\partial\mu}{\partial x}) + \mu^n (\frac{\partial l}{\partial x}) +$ &c. Il est aisé de voir que cette quantité devient infinie par la supposition de $\mu = 0$, toutefois que n est moindre que l'unité; or, $\mu^n h = \frac{\partial\mu}{\partial x} = (\frac{\partial\mu}{\partial x}) + (\frac{\partial\mu}{\partial y}) . \frac{\partial y}{\partial x} = (\frac{\partial\mu}{\partial x}) + p(\frac{\partial\mu}{\partial y})$. Partant, si l'équation $\mu = 0$ est une solution particulière, elle doit rendre infinie la différence de, $(\frac{\partial\mu}{\partial x}) + p(\frac{\partial\mu}{\partial y})$, prise en ne faisant varier que x, & divisée par ∂x; d'où résulte ce Théorème.

THÉORÈME.

Si l'équation $\mu = 0$, est une solution de l'équation différentielle $\partial y = p\partial x$, elle sera une solution particulière, toutes les fois qu'elle rendra nulle la quantité,

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2}\right) + p\left(\frac{\partial\partial\mu}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)},$$

autrement, elle sera une intégrale particulière.

Ce Théorème suppose que μ est fonction des deux variables x & y; si l'on vouloit en faire usage dans le cas où μ seroit fonction de x seul, ou de y seul, il faudroit transformer les variables x & y en d'autres x' & y', telles que l'on ait, par exemple, $x = x' + y'$, & $y = x' - y'$.

Il y a des équations différentielles qui n'ont aucunes solutions particulières, & qui par leur forme excluent ce genre de solutions. Ainsi on peut assurer en général que l'équation $\partial y = p\partial x$. ne peut avoir de solutions particulières qui soient fonctions de x & de y, ou de y seul, toutes les fois que p étant fonction de x & de y, est rationnel par rapport à y; car ces solutions sont toujours réductibles à la forme $y - X = 0$, X étant fonction de x & de constantes; or il est aisé de voir que si l'on fait $y - X = \mu$, l'équation $\partial y = p\partial x$, se transformera par ce qui précède, dans la suivante $\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu^n.q$, n étant nécessairement alors un nombre entier positif, égal ou plus grand que l'unité; la même chose a lieu pour la variable x; donc si p est rationnel par rapport à x & à y à la fois, l'équation $\partial y = p\partial x$ ne peut avoir aucunes solutions particulières.

Déterminons présentement toutes les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

VI.

PROBLÈME II.

L'équation différentielle $\partial y = p\partial x$ *étant donnée, il faut en déterminer toutes les solutions particulières.*

Je suppose d'abord que l'intégrale complète soit connue; soit $\mathcal{C}$ le facteur par lequel on doit multiplier $\partial y - p\partial x$, pour rendre cette quantité une différence exacte, & $\mu = 0$, une solution particulière de l'équation différentielle proposée; on aura $\mathcal{C}\partial y - \mathcal{C}p\partial x = \partial . \varphi(x,y)$; mais de ce que μ est fonction de x & de y, on aura $y = \Gamma . (x,\mu)$; donc $\partial . \varphi(x,y)$ deviendra $\partial . \varphi'(x,\mu)$. Partant $\psi(x,\mu) + C$, est l'intégrale complète de l'équation $\partial y = p\partial x$, C étant une constante arbitraire: présentement puisque l'équation $\mu = 0$, n'est point une intégrale particulière, elle ne peut faire évanouir, $\psi(x,\mu) + C$, quelque valeur que l'on donne à C; donc elle ne peut faire évanouir sa différence, $\mathcal{C}(\partial y - p\partial x)$; mais par la supposition elle rend nulle, $\partial y - p\partial x$; il faut donc que l'équation $\mu = 0$, rende $\mathcal{C}$ infini, & partant qu'elle fasse évanouir $\frac{1}{\mathcal{C}}$; donc μ est facteur de $\frac{1}{\mathcal{C}}$. Je dois observer ici que M. le Marquis de Condorcet est parvenu à ce résultat, mais par une autre méthode, *(voyez son Calcul intégral)*.

Maintenant si l'on essaie parmi les facteurs de $\frac{1}{\mathcal{C}}$, ceux qui satisfont à l'équation $\partial y = p\partial x$, & que l'on distingue ceux qui sont des intégrales particulières d'avec ceux qui ne le sont pas, on sera sûr d'avoir toutes les solutions particulières de cette équation différentielle. Il ne s'agit donc que de connoître la fonction $\mathcal{C}$; or, elle est facile à conclure de l'intégrale générale; car, soit $T = C$, cette intégrale, on aura en différentiant, $L\partial y - O\partial x = 0$, ou $\mathcal{C}.\partial y - \mathcal{C}p\partial x = 0$. Donc, $\mathcal{C} = L$. On sait que $\mathcal{C}$ a une infinité de valeurs, lesquelles peuvent être généralement représentées par $\mathcal{C}.\varphi(T)$; mais on ne doit admettre que la plus simple $\mathcal{C}$ de ces valeurs; car toutes les autres donneront pour solution, ou $T + q = 0$, ou $\frac{1}{T+q} = 0$; q étant constant; or ces deux solutions sont comprises dans l'intégrale

l'intégrale générale $T = C$, en ſuppoſant dans le premier cas, $C + q = 0$, & dans le ſecond cas, $\frac{1}{C + q} = 0$.

Pour déterminer tous les facteurs de $\frac{1}{\epsilon}$, qui égalés à zéro, ſont des ſolutions de l'équation $\partial y = p \partial x$, je nomme μ l'un de ces facteurs; ſi l'on différentie l'équation $\frac{1}{\epsilon} = 0$, on en conclura $\partial y = \gamma \partial x$, & l'équation $\mu = 0$ ſatisfera viſiblement à cette équation différentielle; mais par la ſuppoſition, elle fait évanouir $\partial y - p \partial x$; donc elle fera évanouir $\gamma - p$; μ ſera donc un facteur commun aux deux quantités $\frac{1}{\epsilon}$ & $\gamma - p$. La détermination de ce facteur eſt du reſſort de l'analyſe ordinaire; tout facteur commun a ces deux quantités, égalé à zéro, eſt une ſolution de l'équation $\partial y = p \partial x$; car ce facteur égalé à zéro faiſant évanouir les deux quantités $\partial y - \gamma \partial x$ & $\gamma \partial x - p \partial x$ doit faire évanouir leur ſomme $\partial y - p \partial x$. On diſtinguera enſuite fort aiſément, ſi $\mu = 0$ eſt ou n'eſt pas une intégrale particulière. Voilà donc un moyen aſſez ſimple pour trouver toutes les ſolutions particulières d'une équation différentielle, dont on connoît l'intégrale complète.

Cette intégrale eſt dans un très-grand nombre de cas, indéterminable au moins par les méthodes connues; on eſt donc obligé de recourir alors aux approximations qui la donnent ſouvent avec une préciſion ſuffiſante. Mais comme il importe dans tous les cas d'avoir toutes les ſolutions particulières, & que la méthode précédente ſuppoſe l'intégrale exactement connue; il ſeroit très-intéreſſant d'avoir une méthode générale de les déterminer, entièrement indépendante de la connoiſſance de l'intégrale complète; en voici une très-ſimple, & d'un uſage plus facile que la précédente, dans le cas même où l'intégrale complète eſt donnée.

Soit $\mu = 0$, une ſolution particulière de l'équation différentielle $\partial y = p \partial x$; cette dernière équation eſt, par

l'*article IV*, réductible à cette forme, $d\mu = \mu^n . h\partial x$, n étant moindre que l'unité. Or, $\partial\mu$ étant égal à $(\frac{\partial\mu}{\partial x})\partial x + (\frac{\partial\mu}{\partial y})\partial y$, on aura $(\frac{\partial\mu}{\partial y})\partial y = \mu^n . h\partial x - (\frac{\partial\mu}{\partial x})\partial x$. Mais $\partial y = p\partial x$; partant, $p = \frac{\mu^n . h}{(\frac{\partial\mu}{\partial y})} - \frac{(\frac{\partial\mu}{\partial x})}{(\frac{\partial\mu}{\partial y})}$. Je suppose maintenant (ce qui est toujours possible), que la quantité μ ait cette forme $y - X$, X étant fonction de x; on aura $(\frac{\partial\mu}{\partial y}) = 1$, & $-(\frac{\partial\mu}{\partial x}) = \frac{\partial X}{\partial x}$. Si dans la quantité h, on substitue $X + \mu$, au lieu de y, & qu'on la développe dans une suite ascendante par rapport à μ, en sorte que l'on ait...... $h = l + \mu^{n'} . l' +$ &c. l, l', &c. étant fonctions de x seul, on aura $p = \frac{\partial X}{\partial x} + \mu^n . l + \mu^{n+n'} . l' +$ &c. donc en différentiant par rapport à y, on aura .... $(\frac{\partial p}{\partial y}) = n\mu^{n-1} . l + (n + n')\mu^{n+n'-1} l' +$ &c. Cette expression de $(\frac{\partial p}{\partial y})$, devient infinie par la supposition de $\mu = 0$; car il est clair que par cette supposition, le premier terme $n\mu^{n-1} l$, devient infini & infiniment plus grand que les suivans. L'équation $\mu = 0$ rend donc nulle la quantité $\frac{1}{(\frac{\partial p}{\partial y})}$; ainsi μ est facteur de $\frac{1}{(\frac{\partial p}{\partial y})}$. On prouveroit, par le même procédé, qu'il est facteur de $\frac{1}{(\frac{\partial p}{\partial x})}$; pour trouver ce facteur, je différentie l'équation $\frac{1}{(\frac{\partial p}{\partial y})} = 0$, & je suppose qu'elle donne $\partial y = \mathfrak{C}\partial x$. L'équation $\mu = 0$,

ſatisfera viſiblement à cette équation différentielle; mais elle ſatisfait à celle-ci, $\partial y = p \partial x$; partant elle rendra nulle la quantité $p - \mathfrak{C}$; μ ſera donc facteur commun aux deux quantités $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$ & $p - \mathfrak{C}$; de plus, il eſt viſible que tout facteur commun à ces deux quantités, eſt une ſolution particulière de l'équation différentielle $\partial y = p \partial x$; car μ étant ce facteur, l'équation $\mu = 0$, fait évanouir les quantités $\partial y - \mathfrak{C} \partial x$, & $p \partial x - \mathfrak{C} \partial x$, elle fera donc évanouir leur différence $\partial y - p \partial x$; & puiſqu'elle rend $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$ nul, elle ne peut être une intégrale particulière. Il eſt aiſé de voir que $\mathfrak{C} = -\frac{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial x \, \partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial y^2}\right)}$, d'où réſulte ce Théorème.

THÉORÈME.

Si $\mu = 0$ eſt une ſolution particulière de l'équation différentielle $\partial y = p \partial x$; μ eſt facteur commun aux deux quantités $p + \frac{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial x \, \partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial y^2}\right)}$ & $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$; & réciproquement, tout facteur commun à ces deux quantités, égalé à zéro, eſt une ſolution particulière de l'équation différentielle $\partial y = p \partial x$.

C'eſt le Théorème que j'ai donné ſans démonſtration à la fin du Mémoire ſur la probabilité des Cauſes par les évènemens *(voyez le VI.e Volume des Savans étrangers).* Il en réſulte une méthode fort ſimple pour trouver directement toutes les ſolutions particulières d'une équation différentielle, ſans connoître ſon intégrale générale.

Je ſuppoſe, par exemple, que l'on ait l'équation différentielle

$\partial y = \frac{-x\partial x}{y - \sqrt{(xx+yy-aa)}}$; on aura $p = \frac{-x}{y-\sqrt{(xx+yy-aa)}}$;

& $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)} = -\frac{\sqrt{(xx+yy-aa)}.[y-\sqrt{(xx+yy-aa)}]}{x}$,

d'où l'on aura

$$p + \frac{\left(\frac{\partial\partial p}{\partial x\,\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\partial p}{\partial y^2}\right)} = \frac{\sqrt{(xx+yy-aa)}.[yy-aa-y\sqrt{(xx+yy-aa)}]}{x[y-\sqrt{(xx+yy-aa)}]^2}.$$

Il eſt aiſé de voir que les deux quantités, $p + \frac{\left(\frac{\partial\partial p}{\partial x\,\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\partial p}{\partial y^2}\right)}$

& $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$ ont pour facteur commun, $\sqrt{(xx+yy-aa)}$,

& qu'elles n'ont que celui-là; d'où il réſulte 1.° que l'équation $xx + yy - aa = 0$, eſt une ſolution particulière de l'équation différentielle propoſée: 2.° qu'elle eſt unique.

Le Théorème précédent a généralement lieu toutes les fois que la ſolution particulière $\mu = 0$, renferme x & y; mais il peut ſouffrir des exceptions, ſi μ eſt fonction de x ſeul, ou de y ſeul. Voici comme on peut la déterminer dans ce cas. Je ſuppoſe d'abord μ fonction de y ſeul. L'équation $\mu = 0$ donnera $\partial y = 0$; donc, puiſqu'elle rend nul $\partial y - p\partial x$, elle donnera $p = 0$. Partant, on aura $p = \mu^n.h$, h étant une fonction de x & de y, qui ne devient ni zéro ni infinie, en vertu de l'équation $\mu = 0$. Préſentement, de ce que μ eſt fonction de y, on aura y en fonction de μ; h deviendra ainſi fonction de x & de μ, & en réduiſant p dans une ſuite aſcendante par rapport à μ, on aura, $p = \mu^n.l + \mu^{n+n'}l' +$ &c. l, l', &c. étant fonctions de x; on aura donc $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = n\mu^{n-1}.l\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) +$ &c.

Donc, puiſque n eſt moindre que l'unité, $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$ devient infini en vertu de l'équation $\mu = 0$. Partant, $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$ eſt nul, ainſi μ eſt facteur commun aux deux quantités p, & $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$; & réciproquement, tout facteur commun à ces deux quantités qui ſera fonction de y ſeul, égalé à zéro, ſera une ſolution particulière de l'équation $\partial y = p \partial x$.

Si μ eſt fonction de x ſeul; en conſidérant l'équation $\partial x = \frac{1}{p} \partial y$, on trouvera pareillement qu'il doit être facteur commun aux deux quantités $\frac{1}{p}$ & $\frac{p^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}$, & réciproquement, que tout facteur commun à ces deux quantités, qui ſera fonction de x ſeul, égalé à zéro, eſt une ſolution particulière de l'équation $\partial y = p \partial x$.

Examinons préſentement les équations différentielles du ſecond ordre.

VII.

Une équation différentielle du ſecond ordre peut avoir pour ſolutions particulières des équations finies, ou des équations différentielles du premier ordre; les unes & les autres peuvent également ſe déterminer par la méthode précédente.

PROBLÈME III.

Déterminer ſi une ſolution $\mu = 0$, *de l'équation différentielle* $\partial\partial y = p \partial x^2$, *eſt une intégrale particulière, ſans connoître l'intégrale générale;* μ & p *étant fonctions de* x, y *&* $\frac{dy}{dx}$, dx *étant ſuppoſé conſtant.*

En faiſant uſage de la méthode du Problème I, on verra

facilement que si de l'équation $\mu = 0$, on tire les valeurs de $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, &c. & qu'on les représente par v, v', v'', &c. qu'ensuite on représente par p', p'', &c. les valeurs de $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ &c. tirées de l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$; v, v', v'', &c. p, p', p'', &c. étant fonctions de x, y, & $\frac{\partial y}{\partial x}$; si $\mu = 0$ est une intégrale particulière, non-seulement la quantité $v - p$, mais les suivantes $v' - p'$, $v'' - p''$, &c. doivent s'évanouir par la supposition de $\mu = 0$, & si cela n'arrive pas, l'équation $\mu = 0$, est une solution particulière.

Puisque $\mu = 0$ donne $v - p = 0$, on aura $v - p = \mu^n . q$, n étant positif, & q ne s'évanouissant pas par la supposition de $\mu = 0$; donc $v - \frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = \mu^n . q$, &

$$v = \frac{-\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) . \frac{\partial y}{\partial x}}{dx . \left(\frac{\partial\mu}{\partial\partial y}\right)} .$$ Donc

$d\mu = -\mu^n . q . dx^2 . \left(\frac{\partial\mu}{\partial\partial y}\right)$; la quantité μ peut toujours être imaginée sous la forme $\frac{\partial y}{\partial x} - R$, R étant fonction de x & de y, & dans ce cas, $dx . \left(\frac{\partial\mu}{\partial\partial y}\right) = 1$, maintenant puisque l'on a $\frac{\partial y}{\partial x} = R + \mu$; si l'on substitue cette valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$ dans la quantité q, elle deviendra fonction de x, y & μ; je suppose qu'en la développant dans une suite ascendante par rapport à μ, on ait

$-q = l + \mu^{n'} . l' + \mu^{n''} . l'' +$ &c. $l, l'\ l''$, &c. étant fonctions de x & de y; on aura $\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu^n . l + \mu^{n+n'} l' +$ &c.

partant,

$$\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2} = n\mu^{n-1}.l.\frac{\partial\mu}{\partial x} + (n+n').\mu^{n+n'-1}.l'.\frac{\partial\mu}{\partial x} + \&c.$$

$$+ \mu^n.\frac{\partial l}{\partial x} + \mu^{n+n'}.\frac{\partial l'}{\partial x} + \&c.$$

& en ſubſtituant au lieu de $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, ſa valeur, & au lieu de $\frac{\partial l}{\partial x}$, $(\frac{\partial l}{\partial x}) + (\frac{\partial l}{\partial y}).(R+\mu)$, on aura

$$\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2} = n\mu^{2n-1}l^2 + (2n+n')\mu^{2n+n'-1}ll' + \&c,$$

$$+ \mu^n[(\frac{\partial l}{\partial x}) + R(\frac{\partial l}{\partial y})] + \mu^{n+1}.(\frac{\partial l}{\partial y}) + \&c.$$

En continuant ainſi de prendre les différences ſucceſſives de μ, & obſervant la loi de ces différences, on verra facilement qu'elles ne peuvent s'évanouir toutes par la ſuppoſition de $\mu = 0$, que dans le cas où n eſt égal ou plus grand que l'unité; l'équation $\mu = 0$ n'eſt donc une intégrale particulière que dans ce cas; autrement, elle n'eſt qu'une ſolution particulière; réſultat analogue à celui que j'ai trouvé, *art. IV*, pour les équations différentielles du premier ordre.

VIII.

PROBLÈME IV.

Déterminer toutes les ſolutions particulières aux premières différences de l'équation différentielle $\partial\partial y = p\partial x^2$.

Si l'on connoiſſoit l'intégrale complète aux premières différences de cette équation, on pourroit trouver ainſi toutes ſes ſolutions particulières aux premières différences. Soit $\mathfrak{C}$ le facteur par lequel il faut multiplier l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$, pour la rendre intégrable, on aura

$$\mathfrak{C}.(\frac{\partial\partial y}{\partial x} - p\partial x) = \partial.\varphi(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}),$$

& l'intégrale de l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$, eſt $\varphi(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}) + C = 0$,

Préſentement, je ſuppoſe que $\mu = 0$, ſoit une ſolution particulière, μ étant fonction de $x, y. \frac{\partial y}{\partial x}$; puiſque cette ſolution ne peut faire évanouir $\varphi(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}) + C$, quelque valeur que l'on donne à C, elle ne fera pas évanouir ſa différence $6.(\frac{\partial\partial y}{\partial x} - p\partial x)$; mais par la ſuppoſition, elle fait évanouir $\frac{\partial\partial y}{\partial x} - p\partial x$; donc elle rend 6 infini, c'eſt-à-dire qu'elle fait évanouir $\frac{1}{6}$. Je ſuppoſe qu'en différentiant l'équation $\frac{1}{6}$, on ait $\frac{\partial\partial y}{\partial x} = \gamma\partial x$; l'équation $\mu = 0$, fait évanouir $\gamma - p$, & $\frac{1}{6}$. Donc, μ eſt facteur commun à ces deux quantités; de plus, tout facteur commun à ces deux quantités eſt une ſolution de l'équation différentielle $\partial\partial y = p\partial x^2$. Or, on diſtinguera aiſément parmi ces ſolutions, celles qui ſont des intégrales particulières d'avec celles qui ne le ſont pas.

Si l'intégrale complète aux premières différences de l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$, eſt inconnue, on trouvera de la manière ſuivante, toutes les ſolutions particulières aux premières différences de cette équation.

L'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$ peut recevoir, par l'*art. précéd.* cette forme, $\partial\mu = \mu^n q\partial x$, n étant moindre que l'unité. Partant, on aura $p = -\mu^n q \frac{-(\frac{\partial\mu}{\partial x}) - (\frac{\partial\mu}{\partial y}) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}{\partial x \cdot (\frac{\partial\mu}{\partial\partial y})}$;

on peut toujours ſuppoſer au facteur μ cette forme, $\frac{\partial y}{\partial x} - R$, ce qui donne

$$\partial x \cdot (\frac{\partial\mu}{\partial\partial y}) = 1, (\frac{\partial\mu}{\partial x}) = -(\frac{\partial R}{\partial x}), (\frac{\partial\mu}{\partial y}) = -(\frac{\partial R}{\partial y}).$$

Donc,

Donc,

$$p = -\mu^n q - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - (R + \mu)\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right);$$

ce qui donne en ſubſtituant dans q, $R + \mu$, au lieu de $\frac{\partial y}{\partial x}$, & réduiſant en une ſuite aſcendante par rapport à μ,

$$p = l + \mu^n l' + \mu^{n+n'} l'' + \text{\&c.}$$

l, l', &c. étant fonctions de x & de y; ſi l'on différentie cette équation par rapport à ∂y, on aura,

$$\partial x\left(\frac{\partial p}{\partial\partial y}\right) = n\mu^{n-1} l' + (n + n')\mu^{n+n'-1} l'' + \text{\&c.}$$

or, puiſque n eſt moindre que l'unité, il eſt clair que $\partial x\left(\frac{\partial p}{\partial\partial y}\right)$ devient infini par la ſuppoſition de $\mu = 0$. Partant, $\frac{1}{\partial x\left(\frac{\partial p}{\partial\partial y}\right)}$ devient nul, en ſorte que μ eſt facteur de cette quantité. Je ſuppoſe que de l'équation $\frac{1}{\partial x . \left(\frac{\partial p}{\partial\partial y}\right)} = 0$, on tire par la différentiation $\partial\partial y = \gamma \partial x^2$, μ ſera facteur commun aux deux quantités $\gamma - p$ & $\frac{1}{\partial x . \left(\frac{\partial p}{\partial\partial y}\right)}$. De plus, tout facteur commun à ces deux quantités & qui renfermera $\frac{\partial y}{\partial x}$, égalé à zéro, ſera une ſolution particulière de l'équation différentielle $\partial\partial y = p\partial x^2$.

Puiſque $\gamma = \frac{-\left(\frac{\partial\partial p}{\partial x\,\partial\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\partial p}{\partial y\,\partial\partial y}\right) . \frac{\partial y}{\partial x}}{\partial x . \left(\frac{\partial\partial p}{\partial\partial y^2}\right)}$, on aura le Théorème ſuivant.

THÉORÈME.

L'équation différentielle $\partial\partial y = p\,\partial x^2$ étant donnée, si l'on différentie p par rapport à $\frac{\partial y}{\partial x}$ seul, que l'on nomme $\frac{1}{q}$, cette différence divisée par $\frac{\partial\partial y}{\partial x}$; que l'on différentie q en regardant $\frac{\partial y}{\partial x}$ comme constant; soit $R\partial x$ cette différence, & $R'\partial x$ la différence de q prise en ne faisant varier que $\frac{\partial y}{\partial x}$, & divisée par $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2}$; cela posé. Si $\mu = 0$ est une solution particulière du premier ordre de l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$; μ sera facteur commun aux deux quantités $p + \frac{R}{R'}$, & q; & réciproquement, tout facteur du premier ordre, commun à ces deux quantités, égalé à zéro, est une solution particulière de la proposée. Théorème analogue à celui de l'*article VI*, sur les équations différentielles du premier ordre. On peut généraliser ce Théorème & l'étendre aux équations différentielles de tous les ordres.

Si l'on a l'équation différentielle $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = p$, p étant fonction de $x, y, \frac{\partial y}{\partial x} \ldots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$, ∂x étant supposé constant; que l'on différentie p par rapport à $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$. & que l'on nomme $\frac{1}{q}$ cette différence divisée par $\frac{\partial^n y}{\partial x^{n-1}}$; si l'on différentie q, en regardant $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ comme constant, & que l'on nomme $R\partial x$ cette différence; qu'ensuite on différentie q, en regardant $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ comme seule variable, & que l'on nomme $R'\partial x$ cette différence divisée par $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$; cela posé. Si $\mu = 0$ est

une ſolution particulière de l'ordre $n - 1$ de l'équation propoſée, μ eſt facteur commun aux deux quantités q & $p + \frac{R}{R'}$; & réciproquement tout facteur de l'ordre $n - 1$ commun à ces deux quantités, égalé à zéro, eſt une ſolution particulière de la propoſée.

Il eſt aiſé de conclure de ce qui précède, que ſi dans l'équation $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = p$, p eſt rationnel par rapport à $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$; cette équation ne peut avoir de ſolutions particulières de l'ordre $n - 1$.

I X.

Examinons préſentement les ſolutions particulières & ſans différences de l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$. Je ſuppoſe que $\mu = 0$ ſoit une de ces ſolutions; en conſervant les mêmes dénominations que dans l'*article VII;* on verra que puiſque $v - p$ s'évanouit par la ſuppoſition de $\mu = 0$, on aura

$$v - p = \mu^n \frac{\partial \mu^i}{\partial x^i} \cdot q + \mu^{n'} \frac{\partial \mu^{i'}}{\partial x^{i'}} q' + \&c.$$

mais

$$v = -\left(\frac{\partial\partial\mu}{\partial y^2}\right) \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial\partial\mu}{\partial x \partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - \left(\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2}\right).$$

Donc,

$$\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) \cdot \left[q\mu^n \cdot \frac{\partial\mu^i}{\partial x^i} + q'\mu^{n'} \frac{\partial\mu^{i'}}{\partial x^{i'}} + \&c.\right]$$

Cela poſé, voici comme on reconnoîtra ſi $\mu = 0$ eſt ou n'eſt pas une ſolution particulière. Prenez les différences ſucceſſives $\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3\mu}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4\mu}{\partial x^4}$, &c. elles ſeront toutes données en fonctions de x, y, & $\frac{\partial\mu}{\partial x}$; examinez enſuite la loi de ces différences. Si on peut les faire évanouir toutes en ſuppoſant le rapport de $\frac{\partial\mu}{\partial x}$ à μ fini ou infiniment grand,

l'équation $\mu = 0$ eſt une intégrale particulière; autrement, elle n'eſt qu'une ſolution particulière.

Je ſuppoſe que l'on ait $\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2} = \mu^n h$, h étant fonction de x & de μ, on trouvera facilement que $\mu = 0$ n'eſt intégrale particulière que dans le cas où n eſt égal ou plus grand que l'unité. Ainſi dans l'équation

$$\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = a[\overline{1 - x^3}^4 - (1 - y^3)^4],$$

à laquelle ſatisfait l'équation $y = x$; ſi l'on fait $y - x = \mu$, on aura

$$\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2} = a[(1 - x^3)^4 - (1 - \overline{x + \mu}^3)^4];$$

en réduiſant en ſuite aſcendante par rapport à μ, on a

$$\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2} = 12\,a\,.\,\mu x^2 (1 - x^3)^3 + \&c.$$

or, l'expoſant de μ étant dans ce cas, égal à l'unité, il ſuit que $\mu = 0$ eſt une intégrale particulière; mais dans l'équation $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = \sqrt{(xx - yy)}$, à laquelle ſatisfait pareillement celle-ci, $y = x$, on verra facilement que cette dernière équation n'eſt qu'une ſolution particulière.

Pour trouver maintenant toutes les ſolutions particulières ſans différences de l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$, je ſuppoſe que $\mu = 0$ ſoit une de ces ſolutions; la propoſée peut être tranſformée dans la ſuivante:

$$\frac{\partial\partial\mu}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\left[\mu^n \frac{\partial\mu^i}{\partial x^i}\, q + \&c.\right]$$

Or, ſi l'on conçoit μ ſous la forme $y - X$, X étant fonction de x; on aura $\partial\partial\mu = \partial\partial y - \partial\partial X$. Donc,

$$p = -\mu^n\,.\,\frac{\partial\mu^i}{\partial x^i}\,.\,q - \mu^{n'}\,.\,\frac{\partial\mu^{i'}}{\partial x^{i'}}\,.\,q' - \&c. + \frac{\partial\partial X}{\partial x^2}.$$

Or, ſi la plus petite des quantités i, i', &c. que je ſuppoſe être i, eſt poſitive & moindre que l'unité, $\partial\mu = 0$, eſt

une ſolution particulière, qui ſe déterminera par les articles précédens. Si i eſt négatif, en ſuppoſant $\partial\mu = 0$, p deviendra infini; partant, $\partial\mu$ ſera facteur de $\frac{1}{p}$. Enfin, ſi $i = 0$, n ſera moindre que l'unité; donc μ ſera facteur de $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)} = -\frac{1}{n\mu^{n-1}q + \&c.}$ Dans tous ces cas, il ſera facile de déterminer toutes les ſolutions particulières ſans différences, de l'équation $\partial\partial y = p\partial x^2$.

On peut donc, au moyen de la méthode précédente, déterminer toutes les ſolutions particulières des équations différentielles du ſecond ordre; il eſt aiſé de voir qu'elle s'étend également aux ordres ultérieurs, mais il ſeroit inutile de nous y arrêter davantage. Appliquons-la préſentement aux équations qui renferment trois variables.

X.

PROBLÈME V.

Déterminer ſi une ſolution $\mu = 0$ *eſt une intégrale particulière de l'équation différentielle à trois variables* $dz = p\,dx + q\,dy$.

Je ſuppoſe que cette équation ſoit intégrable. Cela poſé.

Si l'on a l'équation $z = \varphi(x, y)$, & que l'on veuille déterminer la variable z', qui répond à $x + \alpha$, & à $y + \beta$, on aura $z' = \varphi(x + \alpha, y + \beta)$. Or, en ſuppoſant ∂x conſtant, on a

$$\varphi(x + \alpha, y + \beta) = \varphi(x, y + \beta) + \alpha\,\frac{\partial.\varphi(x, y + \beta)}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{1.2}\,.\,\frac{\partial\partial.\varphi(x, y + \beta)}{\partial x^2} + \&c.$$

de plus, en ſuppoſant ∂y conſtant,

$$\varphi(x,y+\beta) = \varphi(x,y) + \beta.\frac{\partial.\varphi(x,y)}{\partial y} + \frac{\beta^2}{1.2}.\frac{\partial\partial.\varphi(x,y)}{\partial y^2} + \&c.$$

$$\frac{\partial.\varphi(x,y+\beta)}{\partial x} = \frac{\partial.\varphi(x,y)}{\partial x} + \beta.\frac{\partial\partial.\varphi(x,y)}{\partial x\,\partial y} + \&c.$$

&c.

Donc, on aura

$$z' = z + \alpha\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\alpha^2}{1.2}.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \&c.$$
$$+ \beta.\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \alpha\beta.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) + \&c.$$
$$+ \frac{\beta^2}{1.2}.\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \&c.$$

L'équation $\partial z = p\partial x + q\partial y$ donne $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = q$. Donc,

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right);$$

Soit p' cette quantité, on aura facilement $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$, &c. je nomme p', p'', &c. ces quantités; maintenant, si de l'équation $\mu = 0$ on tire les valeurs de $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$, &c. & qu'on les nomme v, $'v$, l, l', &c. il est aisé de conclure, par un raisonnement entièrement analogue à celui de l'*art. II*, que l'équation $\mu = 0$ ne peut être une intégrale particulière que dans le cas où elle fait évanouir non-seulement les quantités $v - p$, $'v - q$, mais encore les suivantes $l - p'$, $l' - p''$, &c. Puisque l'équation $\mu = 0$ fait disparoître $v - p$, on aura $v - p = \mu^n.K$, & puisqu'elle fait disparoître $'v - q$, on aura $'v - q = \mu^{n'}.K'$. Si l'on multiplie la première de ces équations par ∂x, la seconde, par ∂y; qu'ensuite on les ajoute, on aura

$$v\partial x + {'v}\partial y - p\partial x - q\partial y = \mu^n.K\partial x + \mu^{n'}K'\partial y,$$

ou à cauſe de $\partial z = p\partial x + q\partial y$;

$$v\partial x + {}'v\partial y - \partial z = \mu^{n} K\partial x + \mu^{n'} K'\partial y;$$

mais on a, $v = \frac{-\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}$, & $'v = \frac{-\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}$:

Donc,

$$\partial \mu = -\mu^{n}.K.\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\partial x - \mu^{n'} K'\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\partial y.$$

Or il eſt aiſé de voir que $\mu = 0$ ne peut être une intégrale particulière, que dans le cas où le moindre des expoſans n, n' eſt égal ou plus grand que l'unité; autrement $\mu = 0$ n'eſt qu'une ſolution particulière.

X I.

PROBLÈME VI.

On propoſe de trouver toutes les ſolutions particulières de l'équation $\partial z = p\partial x + q\partial y$.

Soit $\mu = 0$, une de ces ſolutions; on aura par l'*article précédent*, $p = -\mu^{n} K \frac{-\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}$, & $q = -\mu^{n'} K' \frac{-\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}$;

& puiſque l'un des deux expoſans n & n' doit être moindre que l'unité, ſi l'on ſuppoſe que ce ſoit n, on aura

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -n\mu^{n-1} K\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) - \&c.$$

d'où l'on voit que $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ devient infini par la ſuppoſition de $\mu = 0$; partant, $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}$ devient nulle par cette même

ſuppoſition. Si c'étoit n' qui fût moindre que l'unité, $\frac{1}{\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)}$ deviendroit nul, en faiſant $\mu = 0$. En cherchant donc parmi les facteurs de $\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)}$, & $\frac{1}{\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)}$; ceux qui ſatisfont à l'équation $\partial z = p\partial x + q\partial y$, & diſtinguant ceux qui ſont des intégrales particulières, on aura toutes les ſolutions particulières de cette équation différentielle.

X I I.

Il arrive ſouvent que l'équation $\partial z = p\partial x + q\partial y$, n'eſt point intégrable, & cela a lieu, comme l'on ſait, lorſque l'équation de condition

$$p\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) - q\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0,$$

n'eſt point identiquement nulle. Dans ce cas, on ne peut donc eſpérer que des ſolutions particulières de la propoſée. M. Euler donne cette règle pour les déterminer, dans ſes Inſtitutions du Calcul différentiel, *page 275. Formez l'équation de condition, laquelle ne ſera point identiquement nulle, puiſque par hypothèſe, la propoſée n'eſt pas intégrable; examinez enſuite ſi cette équation ſatisfait à la propoſée; ſi cela eſt, vous aurez par ce moyen, toutes les ſolutions poſſibles de l'équation différentielle; mais ſi cela n'eſt pas, vous ſerez ſûr qu'aucune équation finie ne peut y ſatisfaire.*

Cette règle n'eſt pas générale, car ſi l'on a

$$\partial z = \partial x\left[1 + \sqrt[3]{(z - y - x)}\left\{y + a\sqrt[4]{(z - y - x)} - b\sqrt[3]{(z - y - x)}\right\}\right] + \partial y\left(1 + x\,.\sqrt[3]{(z - y - x)}\right)$$

l'équation réſultante de l'équation de condition eſt $z = x + y + \left(\frac{3a}{4b}\right)^{12}$, équation qui ne ſatisfait point à l'équation différentielle. On auroit tort cependant d'en conclure que cette

cette équation ne peut avoir de solutions, puisqu'elle est satisfaite par celle-ci, $z = x + y$. Voici présentement une méthode pour trouver toutes ces solutions.

Soit $\mu = 0$, une de ces solutions; l'équation $\partial z = p \partial x + q \partial y$, peut être transformée dans la suivante, $\partial \mu = \mu^{n} . h \partial x + \mu^{n'} . h' \partial y$, h & h' étant fonctions de x, y & μ. Or, si l'un des deux exposans, n ou n' est moindre que l'unité, on trouvera facilement μ par l'article précédent. Reste donc à déterminer μ, lorsque le moindre des exposans n & n' est égal ou plus grand que l'unité. Or, dans ce cas, l'équation $\mu = 0$, satisfait à l'équation de condition, & la règle de M. Euler est exacte. Pour le faire voir, j'observe que l'équation de condition, pour que $\partial \mu = \mu^{n} h \partial x + \mu^{n'} h' \partial y$; soit intégrable, est

$$0 = (n' - n) . h h' . \mu^{n + n' - 1} + \mu^{n + n'} \left[h \left(\frac{\partial h'}{\partial \mu} \right) - h' \left(\frac{\partial h}{\partial \mu} \right) \right] - \mu^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu^{n'} \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \right).$$

Il est clair que si n & n' sont égaux ou plus grands que l'unité, cette quantité devient nulle par la supposition de $\mu = 0$; car les quantités $\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)$ & $\left(\frac{\partial h'}{\partial x} \right)$ ne peuvent devenir infinies en vertu de cette supposition, comme il aisé de s'en convaincre en réduisant h & h' en suites ascendantes par rapport à μ; les quantités $\left(\frac{\partial h}{\partial \mu} \right)$, $\left(\frac{\partial h'}{\partial \mu} \right)$ peuvent le devenir, si, par exemple, h & h' renferment des termes tels que $\mu^{i} . \varphi (x, y)$, i étant positif & moindre que l'unité; mais la différence de ces termes prise par rapport à μ, & multipliée par $\mu^{n + n'}$, sera toujours nulle en y faisant $\mu = 0$, puisque n & n' sont supposés plus grands que l'unité. L'équation de condition

$$0 = (n' - n) \mu^{n + n' - 1} h h' + \mu^{n + n'} \left[h \left(\frac{\partial h'}{\partial \mu} \right) - h' \left(\frac{\partial h}{\partial \mu} \right) \right] - \mu^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu^{n'} \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \right),$$

est donc satisfaite par la supposition de $\mu = 0$.

On pourroit craindre cependant que celle-ci

$$0 = p\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) - q\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

ne le fût pas en vertu de cette même ſuppoſition; car bien que ces deux équations ſoient les mêmes, cependant il peut arriver que pour avoir la ſeconde, il fallut diviſer la première par un facteur; & ſi ce facteur étoit une puiſſance poſitive de μ, alors l'équation $\mu = 0$, qui rend la première nulle, pourroit ne pas ſatisfaire à la ſeconde. Il eſt donc eſſentiel de faire voir que ces deux équations ont le même facteur μ; pour cela je les repréſente, la première, par celle-ci $R = 0$, & la ſeconde, par celle-ci, $S = 0$. Cela poſé, on a, par l'*article X*,

$$p = \frac{-\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) + \mu^n h}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}, \qquad q = \frac{-\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) + \mu^{n'} h'}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)};$$

D'où, en faiſant le calcul, je tire $S = \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) . R$; ainſi μ étant facteur de R, ſera néceſſairement facteur de S; partant, il ſera facile de le déterminer.

XIII.

Sur les Inégalités ſéculaires des Planètes.

J'ai donné dans un autre Mémoire*, les expreſſions des inégalités ſéculaires des Planètes, ſous une forme, ce me ſemble, auſſi ſimple qu'on puiſſe le deſirer; & ce qui peut être de quelque utilité dans l'Aſtronomie Phyſique, j'ai fait voir que les moyens mouvemens des Planètes, & par conſé-

* Voyez dans le tome VII des Savans Étrangers, un Mémoire qui a pour titre, *Recherches, 1.° ſur l'intégration des équations aux différences finies, & ſur leur uſage dans l'analyſe des haſards; 2.° ſur le principe de la gravitation univerſelle, & ſur les inégalités ſéculaires des Planètes qui en dépendent.* Comme j'aurai occaſion de citer ce Mémoire, j'en déſignerai les articles de cette manière, *(M. E. art.)*; ainſi *(M. E. art. 30)* en déſignera le 30.me article.

quent leurs moyennes diſtances, n'étoient aſſujettis à aucune équation ſéculaire, en vertu de leur action les unes ſur les autres; mais les formules auxquelles je ſuis parvenu, ne peuvent avoir lieu que pour un temps limité, après lequel elles deviennent inexactes, & quoiqu'elles me paroiſſent ſuffiſantes pour tout le temps durant lequel l'Aſtronomie a été cultivée, ſur-tout en ayant égard aux quantités proportionnelles au quarré du temps *(M. E. art. 56)*; cependant il ſeroit très-intéreſſant du côté de l'analyſe, d'avoir les expreſſions exactes de ces inégalités. Celles que j'ai données, n'en ſont que les différentielles; je m'étois propoſé depuis long-temps de les intégrer; mais le peu d'utilité de ce calcul pour les beſoins de l'Aſtronomie, joint aux difficultés qu'il préſentoit, m'avoit fait abandonner cette idée, & j'avoue que je ne l'aurois pas repriſe, ſans la lecture d'un excellent Mémoire *ſur les Inégalités ſéculaires du mouvement des nœuds & de l'inclinaiſon des orbites des Planètes*, que M. de la Grange vient d'envoyer à l'Académie, & qui paroîtra dans un des volumes ſuivans. Cet illuſtre Géomètre, au moyen d'une transformation heureuſe, réduit le problème à l'intégration d'autant d'équations différentielles linéaires du premier ordre, qu'il y a d'inconnues; il donne enſuite une méthode fort ingénieuſe pour les intégrer, & pour déterminer les conſtantes que renferme l'intégrale, quel que ſoit le nombre des Planètes. En employant la même transformation, j'ai tiré les mêmes équations de mes formules; j'ai de plus cherché, ſi l'on ne pourroit pas déterminer d'une manière analogue, les inégalités ſéculaires de l'excentricité & du mouvement de l'aphélie, & j'y ſuis heureuſement parvenu; en ſorte que je puis déterminer non-ſeulement les inégalités ſéculaires du mouvement des nœuds & de l'inclinaiſon des orbites des Planètes, les ſeules que M. de la Grange ait conſidérées, mais encore celles de l'excentricité & du mouvement des aphélies, & comme j'ai fait voir que les inégalités du moyen mouvement, & de la diſtance moyenne ſont nulles, on aura ainſi une théorie complète & rigoureuſe de toutes les inégalités ſéculaires des

orbites des planètes. J'obſerverai ici que la conſtance du moyen mouvement des Planètes & de leur moyenne diſtance, eſt néceſſaire à l'exactitude des réſultats de M. de la Grange, & de ceux que je vais donner *.

XIV.

J'imagine une Planète p, troublée par l'action de tant de Planètes p', p'', p''', &c. qu'on voudra; ſoient a, a', a'', &c. les moyennes diſtances de p, p', p'', &c. au Soleil; ea, $e'a'$, $e''a''$, &c. les excentricités de leurs orbites; L, L', L'', &c. les longitudes de leurs aphélies, le point d'où l'on commence à compter les longitudes étant ſuppoſé fixe; & les angles L, L', &c. pouvant être comptés ſur un plan fixe & peu incliné à celui de l'orbite de p. Soient encore γ, γ', γ'', &c. les tangentes des inclinaiſons de leurs orbites ſur le plan fixe; Γ, Γ', Γ'', &c. les longitudes de leurs nœuds comptées ſur le plan fixe; $\delta\mu$, $\delta\mu'$, $\delta\mu''$, &c. les rapports de leurs maſſes à celles du Soleil; i, i', i'', &c. le nombre de leurs révolutions depuis une époque donnée où l'on fixe l'origine de leurs mouvemens: on ſuppoſe les inclinaiſons & les excentricités fort petites. Soit $\frac{a'}{a} = z$, & $\frac{1}{(1 - 2z\,\text{coſ.}\,\theta + zz)^{\frac{1}{2}}} = b + b_{1}\,.\,\text{coſ.}\,\theta + \text{\&c.}$ que dt exprime l'arc infiniment petit décrit par la Terre dans ſon orbite avec ſa vîteſſe moyenne; la diſtance moyenne de la Terre au Soleil étant priſe pour l'unité; & que $di\,.\,360^{d}$ exprime le mouvement angulaire moyen de p autour du Soleil, tandis que la Terre décrit l'angle dt; ſoit $(0,1)\ dt = \frac{1}{4}\,.\,zb_{1}\,.\,\delta\mu'\,.\,di\,.\,360^{d}$,

* J'aurois dû naturellement attendre que les recherches de M. de la Grange fuſſent publiées avant que de donner les miennes; mais venant de faire paroître dans les Savans Étrangers, *année 1773*, un Mémoire ſur cette matière, j'ai cru pouvoir communiquer ici aux Géomètres, en forme de ſupplément, ce qui lui manquoit encore pour être complet, en rendant d'ailleurs au Mémoire de M. de la Grange toute la juſtice qu'il mérite; je m'y ſuis d'autant plus volontiers déterminé, que j'eſpère qu'ils me ſauront gré de leur préſenter d'avance l'eſquiſſe de cet excellent ouvrage.

ou $(0,1) = \frac{1}{4} z b_1 . \delta\mu' . \frac{di . 360^d}{dt}$, $\frac{di . 360^d}{dt}$ exprimera le rapport du temps de la révolution de la Terre à celui de la révolution de la Planète p; soit de plus $\overline{(0,1)} . dt = \frac{1}{2} [b_1 (1 + zz) - 3 b z] . \delta\mu' . di . 360^d$; que l'on forme des expressions analogues pour p'', p''', &c. considérés par rapport à p, de la même manière que p' vient de l'être; & qu'on les représente par $(0,2).dt$, $\overline{(0,2)}.dt$; $(0,3).dt$, $\overline{(0,3)}.dt$; &c. que l'on désigne par $(1,0)$, $\overline{(1,0)}$; $(1,2)$, $\overline{(1,2)}$; &c. $(2,0)$, $\overline{(2,0)}$; $(2,1)$, $\overline{(2,1)}$, &c. des quantités analogues divisées par ∂t, en considérant les autres Planètes par rapport à p' ou p'', &c. comme on vient de les considérer par rapport à p; enfin que l'on désigne par dL, de, $d\Gamma$, $d\gamma$, dL', &c. les variations moyennes infiniment petites de L, e, Γ, γ, L', &c. on aura *(M. E. art. 59, page 221)*

$$dL = (0,1)\, dt - \overline{(0,1)} . \frac{e'}{e} . \text{cof.}\, (L' - L) . dt + (0,2)\, dt + \&c.$$

$$de = \overline{(0,1)} . e' . dt . \text{fin.}\, (L' - L) + \overline{(0,2)} . e'' . dt . \text{fin.}\, (L'' - L) + \&c.$$

$$- d\Gamma = (0,1) . \left[1 - \frac{\gamma'}{\gamma} . \text{cof.}(\Gamma' - \Gamma)\right] . dt + \&c.$$

$$- d\gamma = (0,1)\gamma' . \text{fin.}\, (\Gamma' - \Gamma) . dt + \&c.$$

on aura des équations semblables pour dL', de', $d\gamma'$, $d\Gamma'$, &c. je fais présentement

$$\begin{array}{ll} x = e . \text{fin.} L, & z = \gamma . \text{fin.} \Gamma, \\ y = e . \text{cof.} L, & s = \gamma . \text{cof.} \Gamma, \\ x' = e' . \text{fin.} L', & z' = \gamma' . \text{fin.} \Gamma', \\ y' = e' . \text{cof.} L', & s' = \gamma' . \text{cof.} \Gamma', \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

De-là je conclus, $e = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, & $de = \frac{x dx + y dy}{e}$;

ensuite $dL.\text{cos}.L = \frac{edx - xde}{e^2}$, donc $dL = \frac{ydx - xdy}{e^2}$; d'ailleurs $\text{sin}.(L' - L) = \text{sin}.L'.\text{cos}.L - \text{sin}.L.\text{cos}.L' = \frac{yx' - xy'}{ee'}$; $\text{cos}.(L' - L) = \text{sin}.L'.\text{sin}.L + \text{cos}.L'.\text{cos}.L = \frac{xx' + yy'}{ee'}$. Cela posé, on aura les deux équations suivantes

$$y\,dx - x\,dy = (xx + yy).(0,1)dt - \overline{(0,1)}.dt.(xx' + yy') + \&c.$$

$$\& \; x\,dx + y\,dy = dt.\overline{(0,1)}.(yx' - xy'). + \&c.$$

Je multiplie la première de ces équations par y & la seconde par x, & je les ajoute ensemble, ce qui donne après avoir divisé par $(xx + yy)$,

$$dx = dt.\left\{\begin{array}{l} \quad (0,1)y - \overline{(0,1)}.y' \\ + (0,2)y - \overline{(0,2)}.y'' \\ + (0,3)y - \overline{(0,3)}.y''' \\ + \&c. \end{array}\right\}(1).$$

Je multiplie ensuite la première des équations précédentes par x, & je la retranche de la seconde multipliée par y; ce qui donne

$$dy = dt.\left\{\begin{array}{l} - x.(0,1) + x'.\overline{(0,1)} \\ - x.(0,2) + x''.\overline{(0,2)} \\ - x.(0,3) + x'''.\overline{(0,3)} \\ - \&c. \end{array}\right\}(2).$$

On aura de la même manière

$$dx' = dt\left\{\begin{array}{l} \quad (1,0)y' - \overline{(1,0)}y \\ + (1,2)y' - \overline{(1,2)}y'' \\ + \&c. \end{array}\right.$$

$$dy' = dt. \begin{cases} - x'.(1,0) + x.\overline{(1,0)} \\ - x'.(1,2) + x''.\overline{(1,2)} \\ - \&c. \end{cases}$$

& ainsi du reste. Si donc il y a un nombre n de Planètes, & par conséquent un nombre $2n$ de variables, on aura un nombre $2n$ d'équations différentielles linéaires du premier ordre, pour les déterminer; ayant ensuite x & y, on aura facilement L & e au moyen des équations $e = \sqrt{(xx + yy)}$, & tang. $L = \frac{x}{y}$.

en faisant des opérations analogues sur les équations relatives au mouvement des nœuds, & à l'inclinaison des orbites; on aura

$$dz = dt.[(0,1)(s' - s) + (0,2)(s'' - s) + \&c.]$$
$$ds = dt.[(0,1)(z - z') + (0,2)(z - z'') + \&c.]$$
$$dz' = dt'.[(1,0)(s - s') + \&c.]$$
$$\&c.$$

Ces dernières équations sont les mêmes que celles de M. de la Grange, & l'on voit que les équations du mouvement des aphélies & de l'excentricité, ont une forme à peu-près semblable, quoique différente à quelques égards; celles du mouvement des nœuds & de l'inclinaison y sont réductibles en y supposant $\overline{(0,1)} = (0,1)$, $(0,2) = \overline{(0,2)}$, &c. il nous suffira donc ici de considérer les équations de l'excentricité & des aphélies, d'autant plus que M. de la Grange a traité les autres dans le plus grand détail.

X V.

Si l'on fait, suivant la méthode que M. de la Grange a donnée dans le Mémoire cité,

$$x = A.\sin.(ht + \alpha), \quad y = A.\cos.(ht + \alpha),$$
$$x' = A'.\sin.(ht + \alpha), \quad y' = A'.\cos.(ht + \alpha),$$
$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

on aura pour le nombre n de Planètes, les n équations

$$\begin{aligned} h.A &= (0,1).A - \overline{(0,1)}.A', \\ &+ (0,2).A - \overline{(0,2)}.A'', \\ &+ \&c. \\ h.A' &= (1,0).A' - \overline{(1,0)}.A, \\ &+ (1,2).A' - \overline{(1,2)}.A'', \\ &+ \&c. \\ h.A'' &= (2,0).A'' - \overline{(2,0)}.A, \\ &+ \&c. \end{aligned} \qquad (\sigma)$$

au moyen de ces équations, on aura une équation en h du degré n, d'où l'on aura n racines pour h; & en désignant par h, $'h$, $''h$, &c. ces n racines, on aura pour les expressions complètes de x & de y,

$$x = A.\text{fin.}(ht + \alpha) + {}'A.\text{fin.}({}'ht + {}'\alpha) + {}''A.\text{fin.}({}''ht + {}''\alpha) + \&c.$$

$$y = A.\text{cof.}(ht + \alpha) + {}'A.\text{cof.}({}'ht + {}'\alpha) + {}''A.\text{cof.}({}''ht + {}''\alpha) + \&c.$$

A, $'A$, $''A$, &c. α, $'\alpha$, $''\alpha$, &c. étant des conſtantes telles que A & α doivent dépendre de h, de la même manière que $'A$ & $'\alpha$ dépendent de $'h$, ou que $''A$ & $''\alpha$ dépendent de $''h$, &c. on aura de la même manière

$$x' = A'.\text{fin.}(ht + \alpha) + {}'A'.\text{fin.}({}'ht + {}'\alpha) + \&c.$$

$$y' = A'.\text{cof.}(ht + \alpha) + {}'A'.\text{cof.}({}'ht + {}'\alpha) + \&c.$$

& ainſi de ſuite. Il faut préſentement déterminer les conſtantes A, $'A$, $''A$, &c. A', $'A'$, &c. α, $'\alpha$, $''\alpha$, &c. pour cela nommons X, X', X'', &c. Y, Y', Y'', &c. les valeurs de x, x', x'', &c. y, y', y'', &c. lorſque $t = 0$, & nous aurons

$$X = A.\text{fin.}\,\alpha + {}'A.\text{fin.}\,{}'\alpha + \&c.$$

$$X' = A'.\text{fin.}\,\alpha + {}'A'.\text{fin.}\,{}'\alpha + \&c.$$

&c.

$Y =$

$$Y = A\,.\text{cof.}\alpha + {}'A\,.\text{cof.}{}'\alpha + \&c.$$
$$Y' = A'\,.\text{cof.}\alpha + {}'A'\,.\text{cof.}{}'\alpha + \&c.$$
&c.

On aura ainſi $2n$ équations; mais on formera $(n - 1)$ ſyſtèmes d'équations ſemblables à celui des équations (σ), en marquant ſucceſſivement d'un trait, de deux traits, &c. à gauche, les lettres h, A, A', &c. ce qui donnera après avoir éliminé h, $'h$, &c. $n.(n - 1)$ équations, qui ajoutées avec les $2n$ précédentes, donneront $nn + n$ équations entre les variables A, $'A$, &c. A', $'A'$, &c. α, $'\alpha$, &c. leſquelles ſont pareillement au nombre de $nn + n$. Si l'on vouloit faire uſage des méthodes ordinaires d'élimination, on tomberoit dans des calculs extrêmement compliqués; mais M. de la Grange a donné dans le Mémoire cité, une très-belle méthode pour éliminer dans ce cas & dans d'autres ſemblables.

Ce ſeroit ici le lieu d'appliquer les recherches précédentes aux différens corps de notre ſyſtème Planétaire, mais je me propoſe de donner dans un des volumes ſuivans, une théorie générale du mouvement des Planètes dans laquelle je reprendrai toute cette matière.

OBSERVATION
DE QUELQUES
PHASES DE L'ÉCLIPSE DE LUNE
Du 11 Octobre 1772,
FAITES À FONTAINEBLEAU.

Par M. le Cardinal DE LUYNES.

Temps vrai.	
6h 58′ 12″ 0‴	L'OMBRE paroît couper le disque de la Lune en deux parties égales, ce qui donne la phase de six doigts à peu près.
7. 24. 52. 0.	L'ombre quitte les taches de Proclus & Cléomèdes, marquées sur la figure de la Lune, gravée dans la Connoissance des Temps, *N.os 35 & 36.*
7. 34. 55. 8.	Fin de l'Éclipse.

On a remarqué que l'ombre a été toujours assez transparente pour laisser voir le disque de la Lune en son entier, & que cette ombre étoit d'une couleur sombre, fort égale & ressemblante à une teinte d'encre de la Chine peu foncée. 10 ou 12 minutes avant la fin de l'Éclipse, il a été observé que, quoique le télescope soit excellent, les taches de la partie éclairée de la Lune n'étoient point tranchées. On a soupçonné d'abord qu'un halo dont la Lune étoit environnée en étoit la cause; mais on a bientôt reconnu que la seule cause de cette apparence étoit une pénombre légère & très-égale qui étoit répandue sur tout le disque de la Lune, & qui ressembloit à une teinte fort légère d'encre de la Chine répandue sur son disque. La preuve en a été complète 8 ou 10 minutes après la fin de l'éclipse, temps où l'on a aperçu les taches avec netteté, quoique l'halo fût augmenté. On a pris pour la fin de l'éclipse le moment où le bord de la Lune a paru entièrement dégagé de l'obscurité de l'ombre certaine qui servoit

de règle pour eſtimer les phaſes, & qui n'étant jamais parfaitement tranchée dans les éclipſes de Lune, laiſſe toujours quelque incertitude ſur la préciſion du moment de la fin de l'éclipſe, ſur-tout quand il ne reſte plus ſur le diſque qu'une très-petite partie de l'ombre certaine. Ayant cependant pris pour le moment de la fin celui où la partie du diſque de la Lune où ſe faiſoit l'émerſion totale, étoit auſſi dégagée de l'ombre que les parties de la circonférence de la Lune, qui étoient au-deſſus & au-deſſous de ce point; l'erreur de l'eſtime, s'il y en a, n'a pu être que médiocre, ſur-tout le téleſcope étant excellent, & amplifiant les objets juſqu'à trente-trois fois.

SUR LE ZINC.

PREMIER MÉMOIRE.

Analogie ou ſimilitude du Zinc & du phoſphore, établie & développée par une ſuite de faits comparés.

Par M. DE LASSONE.

LE Zinc a toujours été mis au rang des Minéraux dignes d'une attention particulière; les phénomènes ſinguliers qui le caractériſent, frappèrent d'abord quelques Chimiſtes, dont les travaux n'avoient pour objet que le merveilleux de l'art; interprétant à leur manière certains paſſages de Paracelſe & de Van-Helmont, ils crurent reconnoître dans le zinc, la clef ſecrette des arcanes & de l'art ſublime des adeptes. On trouve ces grandes prétentions dans deux ouvrages curieux, publiés preſqu'en même temps à Paris, vers le milieu du dix-ſeptième ſiècle; l'un par Nicolas de Locques *(a)*, l'autre par Reſpour *(b)*, livres peu connus, parce qu'ils ſont devenus fort rares *(c)*.

(a) Les rudimens de la Philoſophie naturelle, &c. *Paris, 1665, in-8.°* Le célèbre Olaüs Borrichius, médecin Danois, qui avoit réſidé quelques années à Paris, & qui avoit conféré avec tous les Savans, cite dans les actes de Copenhague *(années 1671 & 1672, tome I)*, au ſujet d'un fait de Chimie, qu'il rapporte, le témoignage de Loques, alors vivant à Paris, en le qualifiant de *fameux Chimiſte.*

(b) Rares expériences ſur l'eſprit minéral, &c. *Paris, 1668, in-12.*

(c) Après la mort de de Loques, il ſe répandit un ouvrage manuſcrit, qui depuis n'a jamais été imprimé, & qui exiſte encore dans quelques cabinets. J'en ai eu deux exemplaires: j'en conſerve un; je donnai l'autre à M. Rouelle, de cette Académie. C'eſt une ſuite de travaux & d'expériences, la plupart ſur le zinc, & preſque tous dans les vues de l'Alchimie. On y trouve pourtant un aſſez grand nombre de faits poſitifs auſſi curieux qu'intéreſſans. Cet ouvrage paſſe pour appartenir en commun à Nicolas de Loques, auteur du livre déjà cité, poſſédant alors la charge encore ſubſiſtante de Médecin ſpagirique du Roi; & à Lebreton, Médecin de la Faculté de Paris. C'eſt, dit-on, une eſpèce de réſultat des travaux réunis de ces deux Artiſtes. On ne ſauroit douter que

Quelque chimériques que ſoient au fond les aſſertions & les promeſſes de ces Auteurs enthouſiaſtes, ils produiſent des faits qui ont réveillé l'attention des Chimiſtes les plus éclairés. Le célèbre Henckel n'a pas dédaigné de traduire en Allemand l'ouvrage de Reſpour, & d'y joindre beaucoup de ſavantes notes, tendant à démêler le vrai & le poſitif, parmi les énigmes qui l'enveloppent & l'altèrent.

Mais il étoit encore réſervé à des Chimiſtes françois de publier les premiers une ſuite d'expériences mieux faites ſur l'analyſe de ce minéral. Les travaux de M.rs Hellot & Geoffroy le cadet, qui ont précédé ceux de M. Pott; enſuite les recherches de M. Malouin rapprochées de celles de M. Margraf, & de quelques autres Chimiſtes ne laiſſent preſque rien à deſirer.

Cependant en conſidérant plus attentivement le zinc relativement à ſa déflagration & à ſa décompoſition, on remarque une propriété phoſphorique, qui lui eſt particulière & eſſentielle, que Henckel * a bien ſaiſie & entrevue, mais qu'il ſe borne preſque à énoncer. Sous cet aſpect très-intéreſſant, le zinc m'offre une ſuite de remarques & d'obſervations que je crois dignes d'être expoſées, parce qu'elles ſemblent répandre un nouveau jour ſur la connoiſſance des principes, ou de la mixtion intrinsèque de ce minéral, & peut-être d'autres ſubſtances du même règne.

* *Pyritologie, traduct. franç. ch. X, p. 267.*

Pour déduire par les faits cette analogie, ou cette ſimilitude entre le zinc & le phoſphore, que je me propoſe de développer davantage, je commence le parallèle de ces deux ſubſtances en rapprochant d'abord les phénomènes les plus caractériſtiques; & je conſidère en premier lieu, comment le

---

Lebreton n'eut, relativement au zinc, les mêmes vues que de Locques & Reſpour; car il exiſte de lui en particulier, un Ouvrage poſthume, imprimé à Paris chez Claude Jombert, en 1722, intitulé: *les Clefs de la Philoſophie ſpagirique, qui donnent la connoiſſance des principes & des véritables opérations de cet art dans les mixtes des trois genres.* On y reconnoît la même doctrine.

zinc, expoſé à un degré de feu, capable de rompre la cohéſion de ſes principes, s'enflamme en fuſant, en bouillonnant, en répandant une lumière vive & éblouiſſante: comparant enſuite à ces effets ceux du phoſphore, dont la fulguration eſt déterminée par le même moyen; pourroit-on ne pas reconnoître à ces premiers traits une parité qui devient plus frappante encore par la ſimilitude des fleurs, & d'une odeur d'ail pénétrante & arſénicale, qui ſe développe & ſe répand?

Cette odeur d'ail, propre auſſi à l'arſenic, & qui ſert à le déceler, fit d'abord ſoupçonner que le zinc étoit arſénical. De-là les Chimiſtes craignant, avec raiſon, toute ſubſtance arſénicale, ſur-tout quand elle eſt miſe en expanſion, & répand des miaſmes volatils & pénétrans, ne procédèrent d'abord qu'avec une ſorte d'appréhenſion. Ayant enfin reconnu que ces vapeurs du zinc redoutées comme arſénicales, dont l'odorat étoit frappé, & qui malgré toutes les précautions s'inſinuoient aſſez abondamment par la reſpiration, ne cauſoient d'autre incommodité ſenſible, que d'exciter un peu la toux; on ſe familiariſa davantage avec cette opération. Je puis aſſurer que dans le très-grand nombre de mes expériences ſur le zinc, ni ſon odeur d'ail, ni ſes vapeurs, dont je n'ai cherché à me garantir par nulle précaution particulière, ne m'ont jamais cauſé la moindre incommodité. Je n'en ſuis pas ſurpris; puiſqu'en effet, l'odeur & la vapeur du zinc en déflagration ne ſont point arſénicales: elles ne ſont que phoſphoriques.

D'où il ſemble réſulter que les mêmes miaſmes odorans caractériſant également l'arſenic & le zinc qui ſe volatiliſent; il faut apparemment que la vapeur odorante de l'arſenic entraîne avec elle une autre matière ſubtile & particulière, avec laquelle elle reſte ſans doute combinée, & qui la rend ſi funeſte & ſi dangereuſe: car les miaſmes odorans du phoſphore & du zinc, vraiſemblablement privés de cette même matière, ne ſont plus capables de produire d'accident, quand on les reſpire.

Cette fulguration n'arrive & ne ſauroit continuer qu'autant que l'un & l'autre mixte ne ceſſent d'avoir un contact libre & immédiat avec l'air extérieur. Ceci eſt évident pour le phoſphore. Mais les phénomènes du zinc, qui y ſont relatifs, exigent quelques détails ſur l'inflammation de ce minéral.

Dès qu'il commence à être mis en fonte, il ſe décompoſe à ſa ſurface: auſſi-tôt une petite portion du phlogiſtique ſe ſépare, mais ſans inflammation, ſans fulguration ſenſibles; & cette ſurface ainſi décompoſée devient une eſpèce de pellicule calcaire, qui couvre le minéral en fonte, & qui le garantit d'abord du contact immédiat de l'air. Le zinc complettement fondu éprouve, dans toutes ſes parties, un mouvement inteſtin, comme s'il y avoit efferveſcence ou ébullition. Il ſe bourſouffle & ſe ſoulève en différens points. Ces mouvemens entr'ouvrent la pellicule; & dans tous les points de cette déſunion, la matière en fonte expoſée à l'action immédiate de l'air au même inſtant, ſe décompoſe en fulminant. Cette inflammation rapide, détachant & conſumant, par une ſorte d'exploſion le phlogiſtique, enlève la chaux ainſi formée ſous la forme de fleurs ou de brins de coton très-ſubtils, en diſperſe une petite partie, qui voltige dans l'air; l'autre partie s'amoncèle dans le creuſet ſur la ſurface du minéral, intercepte de nouveau le contact immédiat de l'air, & fait ceſſer la fulguration. En recueillant & ramaſſant cette chaux avec une petite cuiller de fer, on découvre de nouveau la ſurface de la matière en fonte, & le ſpectacle de la déflagration recommence. C'eſt par ces alternatives répétées que l'on réduit entièrement en chaux ou en duvets cotonneux ou en laine philoſophique (expreſſion des anciens Chimiſtes) une quantité déterminée de zinc.

Rien ne prouve mieux la néceſſité du contact immédiat de l'air, pour opérer la déflagration, que ce qui arrive, lorſque le zinc placé dans un creuſet couvert & luté, ou dans quelqu'autre vaiſſeau fermé, eſt ſoumis au milieu des charbons embraſés à un degré de feu plus fort qu'il ne faut pour le mettre & l'entretenir en fonte. J'ai pluſieurs fois

remarqué qu'alors il se volatilise en entier; une partie est portée contre le couvercle du creuset, où elle adhère en forme d'une infinité de petits globules mercuriels. La plus grande partie s'échappant à travers le lut qu'elle pénètre, s'enflamme au milieu des charbons embrasés, & s'élève en fleurs un peu sales, qui sont déterminées de tous côtés par l'agitation & la force expansive de la matière ignée.

Mais afin de poursuivre & de mieux développer cette analogie du zinc & du phosphore déjà si ressemblans par ces principaux phénomènes, recherchons & comparons d'autres altérations qui leur soient propres.

Je vais donc examiner en second lieu, comment l'effet & la seule action de l'air altèrent ou plutôt décomposent ces deux mixtes.

Dans le phosphore, tel que l'art le prépare, le phlogistique surabondant ne paroît avoir qu'un assez foible rapport avec l'acide phosphorique, auquel il ne s'est uni qu'à l'aide d'un feu violent, dont la force expulsive supérieure a chassé le principe aqueux, en concentrant cet acide, & le mettant ainsi en état de saisir & de retenir plus de phlogistique. Ce mixte une fois formé & soumis à l'impression de l'air, dès-lors les vapeurs aqueuses de l'atmosphère le pénètrent, s'insinuent peu à peu dans toutes ses molécules, & sont avidement ressaisies par l'acide phosphorique concentré, en vertu d'une affinité qui surpasse celle par laquelle cet acide retenoit le phlogistique. Celui-ci est donc séparé; & comme la recombinaison du principe aqueux avec l'acide concentré se fait très-promptement, & en produisant une espèce d'effervescence; il en résulte, dans toutes les molécules intégrantes du phosphore une agitation, un mouvement intestin rapide, une sorte de bouillonnement que l'on peut très-bien observer avec une loupe; ce qui sans doute contribue à déterminer l'inflammation du phlogistique devenu libre, & qui la rend plus ou moins sensible, selon le degré de vivacité de ce mouvement intestin; & de-là il suit que pour occasionner une décomposition plus rapide; celle, par exemple, que produit

produit la fulguration, il ne s'agira que d'imprimer aux molécules phosphoriques plus de mouvement, soit par l'effet de la chaleur communiquée, soit en frottant ou en broyant.

Comparons ce qui arrive aù zinc; mais avant tout il est essentiel d'observer que la mixtion & la cohésion réciproques des principes constituans de ce minéral, étant plus intimes & plus fortes; l'action & l'effet des agens extérieurs & naturels, quoiqu'au fond les mêmes, ne sauroient être ni si prompts, ni si marqués, ni procurer une altération toute pareille à celle qu'éprouve le phosphore. Dirigés par cette remarque, considérons les faits.

Il est certain (tout Observateur pourra s'en convaincre) que le zinc exposé à l'air libre, perd un peu plus tôt que la plupart des autres substances du même règne, son éclat métallique; sa surface devient terne, blanchâtre & terreuse; elle se couvre d'une vraie chaux: les vapeurs aqueuses de l'atmosphère semblent donc opérer ici, comme sur le phosphore, une décomposition réelle, qui pourtant doit offrir quelques différences, par rapport à la métalléité du zinc; & voici ces différences.

1.° La substance que le phlogistique abandonne, en cédant à l'action des vapeurs aqueuses qui s'y insinuent, & qui vraisemblablement s'y combinent, ne se présente point, comme dans le phosphore, avec le caractère salin; néanmoins il paroît, par des observations, & par des inductions qui seront déduites, qu'il ne manque à cette substance, pour avoir une propriété décidément saline, qu'une certaine quantité du principe aqueux essentiel à la mixtion vraiment saline, dont apparemment elle est privée dans la composition intrinsèque du zinc, & qui par-là n'ayant plus de saveur bien sensible, ne conserve dès-lors que l'apparence & les caractères d'une terre ou d'une chaux: or, il paroît que cette matière terreuse est elle-même, ou du moins contient l'acide phosphorique ainsi altéré; puisque le phlogistique s'y combinant, il en résulte un mixte, dont la déflagration est tout-à-fait semblable à celle du phosphore; & qu'en général on peut inférer que

toute ſubſtance ſuſceptible d'une telle fulguration, contient l'acide phoſphorique combiné avec le phlogiſtique *(d)*.

2.° La décompoſition ſpontanée du zinc à l'air arrive avec beaucoup plus de difficulté & de lenteur que celle du phoſphore. Ce n'eſt ſans doute que parce que dans la mixtion du zinc le phlogiſtique a contracté avec le principe terreux-ſalin, une union plus forte, favoriſée par l'abſence du principe aqueux qui n'eſt pas interpoſé. D'ailleurs, la lenteur de cette décompoſition ne produiſant nulle agitation, nul mouvement dans les molécules intégrantes du minéral, le phlogiſtique alors doit s'échapper d'une manière tout-à-fait inſenſible.

Ajoutons un nouveau trait au parallèle, relativement au développement du principe inflammable dans l'une & l'autre ſubſtance, favoriſé par quelque mouvement rapide, & dès-lors marqué par des effets plus ſenſibles

J'ai déjà obſervé que pour exciter la déflagration du phoſphore, il ſuffiſoit d'imprimer plus de mouvement aux molécules par le froiſſement ou le frottement accéléré. Des obſervations nouvelles vont démontrer, que les mêmes moyens mettent auſſi en action le principe inflammable du zinc d'une manière plus marquée & à peu-près ſemblable.

Mais ceci devant être prouvé par un fait particulier, il faut faire précéder une autre obſervation qui ſervira de préliminaire.

Ayant fait fondre du zinc dans un creuſet, je me ſervis d'une petite cuiller de fer, pour agiter la matière & la faire fulminer. Je remuois ſouvent, & la cuiller étoit ainſi continuellement expoſée à l'action du zinc en déflagration. Il ſe

(d) Quoique la théorie nouvelle que j'avance ici, relativement à l'exiſtence d'une mixtion vraiment phoſphorique, conſidérée comme principe conſtituant du zinc, paroiſſe fondée dans ce Mémoire, ſur une ſuite de faits aſſez nombreux; cependant, ſentant bien qu'à raiſon de ſon importance elle exige de nouveaux faits, & plus déciſifs encore, s'il eſt poſſible, pour la mieux confirmer; je déclare que je ne la propoſe d'abord, & ne la donne qu'avec la réſerve dûe à la ſaine Phyſique; c'eſt-à-dire, comme une probabilité, ou ſi l'on veut, comme une conjecture. De nouvelles expériences, dont les détails feront l'objet d'autres Mémoires qui ſuivront celui-ci, répandront un plus grand jour ſur cette matière.

faisoit un grand pétillement, & la portion de la cuiller que je plongeois dans la matière fut en peu de temps corrodée & en partie détruite. M. Geoffroy le cadet rapporte dans les Mémoires de l'Académie, *année 1738*, que la même chose arriva à M. Groff, en remuant l'étain fondu avec une spatule de fer: *& il paroît*, ajoute-t-il, *que le soufre arsénical de l'étain se transporte, pour ainsi dire, avec avidité sur le fer, le corrode & le scorifie.*

Voici maintenant l'autre fait, que le précédent doit servir à mieux expliquer. J'avois besoin de zinc pour plusieurs de mes expériences; je chargeai un ouvrier de m'en préparer deux livres. Je fus étonné, lorsqu'en me l'apportant, cet ouvrier se plaignit à moi, en disant que j'aurois dû le prévenir, puisque ce minéral, en apparence si facile à limer, avoit rongé & gâté plusieurs limes. Il me les montra: elles étoient comme corrodées. Les mêmes effets ont eu lieu quand il a fallu préparer de nouvelle limaille.

Or l'observation qui précède celle-ci, démontre que c'est le phlogistique fulminant du *zinc*, ou ce qui est la même chose sa substance phosphorique mise en action, qui attaque & corrode le fer; d'où il résulte, dans la seconde expérience, que le frottement accéléré de la lime couverte de pointes & d'aspérités très-dures, continuant à communiquer une agitation violente aux molécules phosphoriques du zinc, fait déployer leur action rongeante & destructive sur le fer, qui les attaque, les anime & les développe; car, en répétant moi-même avec une forte lime cette expérience, mon odorat a été frappé d'une odeur d'ail ou de phosphore; & dans un lieu obscur j'ai cru apercevoir alors quelques traces d'une lueur phosphorique. Henckel * observe que *la cadmie des fourneau, sur-tout la jaune*, qui n'est qu'une concrétion des fleurs de zinc phlogistiquées, *donne des étincelles avec le briquet, ou lorsqu'on l'expose à un frottement rapide.* Voilà donc encore dans tout ceci de nouveaux traits d'analogie, ou plutôt de parité entre le zinc & le phosphore.

* *Œuvres de Henckel, traduct. franç. Dissertation sur une sueur phosphorique, page 513.*

Et peut-être, en rappelant l'obſervation déjà citée par M. Geoffroy le cadet, ſur la corroſion du fer par l'étain en fuſion, faudroit-il admettre auſſi dans l'étain, comme une des cauſes de ce phénomène, un ſemblable principe phoſphorique, en même-temps qu'un principe arſénical que M. Geoffroy y ſoupçonnoit, & qui depuis y a été démontré par M. Margraf d'une manière inconteſtable; car mettant en fuſion l'étain & le plomb mêlés en certaines proportions, les principes phoſphoriques ſe démontrent alors par une déflagration ſpontanée; d'où réſulte une très-prompte réduction en chaux de ces deux matières. M. Malouin a déjà fait connoître dans de ſavans Mémoires l'analogie entre l'étain & le zinc; d'ailleurs l'exiſtence réelle du principe phoſphorique dans l'étain ſera appuyée ſur un autre fait que je rapporterai dans l'endroit de ce Mémoire où l'ordre exige qu'il ſoit placé.

Après avoir examiné ce qui arrive au zinc & au phoſphore, tous deux altérés par le ſeul effet de l'air, ſans employer ni agens, ni intermèdes étrangers; & après avoir comparé la ſimilitude des phénomènes, je vais expoſer en troiſième lieu, & rapprocher ce que ces deux mixtes éprouvent par l'effet de l'eau ſeule, lorſqu'ils y reſtent ſubmergés, & qu'ils ſont ainſi expoſés à ſon action, mais dans des vaiſſeaux fermés, qui interceptent toute communication avec l'air extérieur, dont le concours paroît abſolument néceſſaire pour coopérer à leur décompoſition ſuivie & ſoutenue, de la même manière qu'il l'eſt pour le maintien & le progrès de la fermentation des mixtes ſuſceptibles de cette eſpèce d'altération.

On ſait qu'un moyen de conſerver le phoſphore eſt de le tenir plongé dans l'eau d'une bouteille que l'on bouche. Malgré cette précaution il s'altère; peu-à-peu ſa ſurface ſe ternit & ſe couvre d'une eſpèce d'effloreſcence poudreuſe & blanchâtre; il ſouffre dans quelques-unes de ſes parties une vraie décompoſition; le phlogiſtique ſe ſépare & s'échappe; & quoique tout ceci s'opère très-lentement, par le défaut de

communication avec l'air extérieur, une petite quantité de l'acide phoſphorique dégagé devient enfin ſenſible dans l'eau en la rendant acidule. Ces faits ont été obſervés, & je ne les rappelle que pour mieux les comparer avec ceux que je vais faire connoître.

J'ai mis du zinc récemment réduit en limaille, dans une bouteille de verre remplie d'eau ſimple diſtillée juſqu'au goulot; je l'ai bouchée exactement: le zinc occupoit environ un tiers de la bouteille, entre le bouchon & l'eau il y avoit une diſtance de plus d'un pouce; les molécules du zinc ont paru promptement & conſtamment couvertes de petites bulles d'air: dès le quatrième jour de l'expérience l'eau s'étoit déjà élevée juſqu'au bouchon, qui fut chaſſé le lendemain; une petite quantité de l'eau déborda & ſe répandit. Je rebouchai la bouteille, en laiſſant de nouveau un intervalle entre le bouchon & l'eau, qui monta encore de quelques lignes; la maſſe du zinc s'étoit un peu gonflée & bourſouflée; la ſurface ſe couvrit d'une matière blanchâtre, qui rendoit l'eau très-louche & comme laiteuſe, quand on ſecouoit la bouteille: après ces ſecouſſes les flocons blancs peu-à-peu ſe dépoſoient, & leur quantité de jour en jour augmentoit; mais cette décompoſition, qui d'abord arrive aſſez vîte, ceſſe & ne fait plus de progrès, quand la communication avec l'air extérieur eſt ſoigneuſement interceptée.

Il paroît donc que dans un vaiſſeau exactement fermé & rempli d'eau, le zinc ſubmergé éprouve, comme le phoſphore, dans quelques-unes de ſes molécules une décompoſition réelle, quoiqu'avec des différences déjà indiquées, & qui exigent un nouveau développement.

Dans le phoſphore, le phlogiſtique dégagé laiſſe à nu une petite portion du principe acide doué de tous ſes caractères; c'eſt-à-dire que cet acide conſervant l'eau eſſentielle à ſa mixtion ſaline, & ſe combinant de plus avec celle qui ſe ſubſtitue au phlogiſtique, peut dès-lors imprimer ſur les papilles de la langue la ſaveur acide qui le diſtingue.

Dans le zinc, le phlogiſtique abandonne de la même

manière la baſe phoſphorique; mais un fait ici très-remarquable, c'eſt qu'en même-temps il ſe dégage beaucoup d'air, comme on le voit par le détail de l'expérience. Cet air, qui ſans doute étoit combiné, reprenant ſon caractère élaſtique, reparoît ſous la forme d'une infinité de petites bulles adhérentes aux molécules du zinc, bourſoufle & ſoulève un peu la maſſe, & a beſoin de s'échapper, pour que la décompoſition puiſſe continuer à ſe faire. Et voilà ſans doute pourquoi la communication avec l'air extérieur n'eſt pas moins néceſſaire pour ces ſortes d'altérations, que pour la fermentation; & pourquoi dans des vaiſſeaux fermés, l'eau, malgré la loi bien poſitive des affinités, a beaucoup moins de priſe & d'action, & que même cette action eſt arrêtée & ſuſpendue *(e)*.

Pluſieurs molécules du zinc, ainſi dépouillées & privées du phlogiſtique, ne conſervent plus apparemment que leur baſe phoſphorique; mais ici cette baſe paroît privée de l'eau eſſentielle à la mixtion ſaline, & réduite à un état terreux, par conſéquent incapable de donner ſeule & par elle-même aucune ſaveur. Cependant le principe aqueux, qui a contribué à opérer la décompoſition, & qui ſans doute s'eſt combiné, ſemble dès-lors reſtituer en partie à cette terre phoſphorique un nouveau caractère à demi-ſalin, que l'on peut reconnoître; car j'ai obſervé que l'eau laiteuſe, chargée des molécules du zinc décompoſé, développe à la longue, ſur la langue, une ſaveur métallique & un peu acerbe; c'eſt préciſément celle de l'acide phoſphorique affoibli, & cette obſervation confirmant plus directement ce nouveau point de théorie, établit mieux auſſi la ſimilitude des deux faits.

La même expérience ſuivie, en admettant le libre concours de l'air extérieur, prouve que la décompoſition du phoſphore & du zinc ſe fait alors dans toute la maſſe d'une manière

---

(e) M. Pott, dans ſa Diſſertation ſur le Zinc, a déjà remarqué que l'eau ſimple avoit quelque action apparente ſur ce minéral; mais il n'énonce ce fait qu'en paſſant, & en deux mots, ſans détails, & ſans en faire aucun uſage.

plus ſoutenue, plus continue, moins lente, & tout-à-fait conforme à la loi directe & non interrompue des affinités.

J'ai beaucoup abrégé cette opération en étendant la limaille dans une large capſule de verre, n'y mettant que la quantité d'eau néceſſaire pour couvrir ſeulement de quelques lignes la ſurface du minéral, & remuant ſouvent avec une ſpatule; on obtient ainſi plus promptement la réduction en terre ou en chaux.

Il y avoit lieu de ſoupçonner qu'en mêlant la limaille de zinc avec le ſoufre, & humectant le mélange, il pourroit en réſulter une altération ſemblable à celle qui arrive en traitant de même le fer. J'ai donc entretenu pendant un mois en conſiſtance de pâte, la limaille de zinc & les fleurs de ſoufre mêlées en parties égales; la maſſe s'eſt un peu bourſouflée, & il s'eſt dégagé de l'air; enfin, ayant remis plus d'eau qu'à l'ordinaire, j'abandonnai le mélange, & n'y regardai que pluſieurs mois après; alors je trouvai la matière deſſéchée: le zinc n'avoit plus ſon éclat métallique, & le tout reſſembloit à une terre grumelée, friable, & qui ſous les doigts ſe réduiſoit en une poudre jaunâtre. J'en expoſai une portion au feu dans un creuſet; le ſoufre s'alluma, brûla foiblement, & il reſta une poudre d'une teinte brune; c'étoit une véritable chaux de zinc colorée: le gonflement ou l'eſpèce de fermentation arrivée à ce mélange n'a pas été plus conſidérable que celle qui ſurvient ſans le ſoufre. Il paroit pourtant qu'ici la limaille de zinc a été réduite en chaux dans un eſpace de temps un peu plus court; mais il eſt vraiſemblable que cet effet n'a eu lieu que parce que le ſoufre, qui n'ayant ſouffert aucune altération n'a pu lui-même en produire, a tenu plus diviſées & plus écartées les molécules de la limaille, & les a ainſi diſpoſées à être plus promptement attaquées par l'eau dans tous les points de contact. Au reſte, quoique cette expérience n'ait pas réuſſi relativement à l'objet pour lequel elle a été entrepriſe, elle nous apprend que par cette voie humide on ne combine pas mieux les principes du ſoufre avec le zinc, que par la voie sèche.

Juſqu'ici le zinc a été conſidéré ſous ſa forme métallique, dirigeant toujours mes vues au même but, je paſſe en quatrième lieu à l'examen du zinc déjà décompoſé ou réduit en chaux, pour rechercher dans cette nouvelle matière ce qui peut établir encore l'analogie, que je me ſuis propoſé de faire mieux connoître.

Voici d'abord un fait qui mérite une attention particulière. Procédant un jour à la déflagration d'une aſſez grande quantité de zinc, les fleurs, à meſure que je les recueillis, furent amoncelées dans un large vaiſſeau, dépoſé après l'opération en un endroit plus foiblement éclairé; peu de minutes après, je fus ſurpris en les voyant encore lumineuſes & embraſées; j'obſcurcis davantage le laboratoire, pour mieux juger du phénomène, qui n'en devint que plus frappant: en remuant avec une ſpatule la profondeur du monceau des fleurs, je vis qu'elles étoient entièrement pénétrées de cette lumière phoſphorique & diffuſe, qui peu-à-peu s'affoiblit & s'éteignit, après avoir ſubſiſté plus d'une heure.

De-là il réſulte que même après la fulguration ceſſée, le principe phoſphorique du zinc n'eſt pas entièrement détruit, & qu'il en reſte une bonne partie encore inhérente aux fleurs ou à la chaux du minéral. De même, le phoſphore décompoſé par la déflagration rapide eſt réduit en eſpèces de fleurs qui reſtent embraſées, & ne ceſſent de l'être que lorſque les vapeurs aqueuſes de l'atmoſphère ont été attirées & ſaiſies par l'acide concentré & mis à nu.

Or il paroît que ce qui arrive ici à la chaux ou aux fleurs du phoſphore; c'eſt-à-dire, leur extinction totale par l'effet des vapeurs aqueuſes attirées, qui décompoſent encore plus la mixtion phoſphorique, arrive pareillement aux fleurs de zinc, qui vraiſemblablement ſaiſiſſent auſſi très-rapidement dans l'atmoſphère une certaine quantité de vapeurs, qu'elles retiennent avec force. En effet, on a déjà obſervé que quoiqu'une quantité donnée de zinc, que l'on réduit en fleurs, ſouffre, par la déflagration, une déperdition aſſez conſidérable des principes phoſphoriques; cependant le poids total

des

des fleurs après l'opération, excède d'un dixième celui du zinc avant sa destruction ou sa réduction en chaux. Or, je me crois fondé à penser que ce poids excédant doit être attribué aux vapeurs de l'atmosphère très-rapidement attirées & combinées, comme le même fait est démontré à l'égard des fleurs ou de la chaux du phosphore.

Et peut-être faudroit-il plutôt rapporter à la même cause simple & naturelle l'augmentation du poids en semblable proportion de plusieurs autres chaux métalliques & terreuses, après qu'elles ont éprouvé l'action du feu; au lieu d'attribuer, avec Boile & avec ceux qui ont adopté ses expériences & sa théorie, ce phénomène surprenant aux seules molécules ignées, retenues, combinées, & qu'il faut supposer encore être devenues pesantes, en s'accumulant dans ces substances calcinées en une quantité infiniment plus considérable que dans ces mêmes substances embrasées, rougies, & tout-à-fait pénétrées de feu avant leur calcination; puisqu'alors Boërhaave n'a pas trouvé leur poids sensiblement augmenté; ou bien à la seule absence du phlogistique, selon une opinion plus récente, qui a donné lieu à un bon Ouvrage [a], rempli de vues & de recherches intéressantes *(f)*.

[a] *Dissertation sur le Phlogistique, par M. de Morveau, à Dijon, 1772. in-12.*

M. Geoffroy le cadet, dans un Mémoire déjà cité [b], remarque que si l'on fait recalciner la chaux d'étain, & qu'après avoir retiré du feu le creuset encore rouge, on le découvre; dès que la chaux a communication avec l'air extérieur, *elle s'allume, devient rouge, & pour ainsi dire lumineuse.* L'Auteur fait usage de ce phénomène, pour établir que la chaux d'étain contient un soufre qui s'y trouve fixement retenu, comme il paroît l'être dans les fleurs du zinc; & ce principe sulfureux, inflammable & lumineux, dans l'une & l'autre substance, a vraiment le caractère d'une combinaison phosphorique.

[b] *Année 1738.*

(f) Quoique cette éthiologie paroisse ici fondée sur une analogie frappante, elle ne peut être proposée que comme une conjecture; elle exigeroit sans doute un nouvel examen comparé, & des observations ultérieures.

Ce nouvel examen des fleurs de zinc, au moment que la fulguration les produit, vient de nous préſenter le principe phoſphorique du zinc dans deux états différens. Nous en voyons d'abord une portion ſe décompoſant rapidement, ſe détruiſant & s'échappant par la fulmination; & l'autre portion reſtant, après que la déflagration a ceſſé, encore inhérente à la chaux du minéral; achevant enſuite de ſe décompoſer par une inflammation lente & paiſible.

Ces fleurs, quoique dépouillées, autant qu'il eſt poſſible, par ces moyens ordinaires, du principe phoſphorique, en contiennent encore beaucoup. Le fait actuellement bien connu de leur révification ſuffiroit ſeul pour le prouver; car ſi les matières adaptées à cette réduction ne fourniſſent que le ſeul phlogiſtique pur, il faut néceſſairement, pour rétablir la mixtion phoſphorique ſuſceptible d'une nouvelle déflagration, que ce phlogiſtique s'uniſſe dans la chaux du zinc à l'autre ſubſtance, ſans laquelle il paroît qu'il ne ſauroit y avoir de déflagration phoſphorique, malgré la préſence du phlogiſtique.

A l'appui de ceci, deux obſervations nouvelles ſemblent confirmer encore dans les fleurs de zinc l'exiſtence de cette baſe phoſphorique participant du caractère ſalin.

J'ai fait un mélange de deux onces de limaille d'acier & d'une once de fleurs de zinc, je l'ai mis dans un creuſet, qui après avoir été couvert & luté, a été expoſé quatre heures de ſuite à un feu de réverbère. Après l'opération j'ai trouvé dans le creuſet une maſſe de couleur rouge extrêmement foncée. On y découvroit en différens endroits une teinte du plus beau pourpre. La maſſe fut très-aiſément réduite en poudre, & parut auſſi diviſée & atténuée que le ſafran de Mars préparé avec le ſoufre.

J'ai procédé de même avec un pareil mélange de limaille pure de cuivre & de fleurs de zinc; le réſultat a été une eſpèce de *crocus* en poudre fine & très-diviſée, d'une teinte jaune obſcure.

Il eſt certain que la limaille de fer & celle de cuivre ren-

fermées seules & séparément dans un creuset couvert & luté ne pourroient être ainsi altérées & réduites en *crocus*, en les exposant si peu de temps à ce degré de feu. Il faut donc reconnoître ici une vraie calcination opérée par un principe actif & corrodant, que les fleurs de zinc ont fourni. M. Hellot * considérant dans l'opération de l'alcahest de Respour, que le nitre mêlé avec cette chaux minérale est promptement alkalisé, sans nulle détonation, a déjà soupçonné dans la mixtion intrinséque des fleurs de zinc l'acide vitriolique. Je puis donc à plus forte raison y reconnoître aussi la présence d'un acide très-concentré, en rapprochant ce premier fait sur l'alkalisation du nitre, des deux précédens, sur la calcination rapide du fer & du cuivre; & tout jusqu'ici concourt à indiquer que cet acide est celui du phosphore.

* *Mém. Acad. année 1735.*

Examinant de nouveau ces mêmes fleurs par d'autres procédés, je vois qu'elles retiennent encore une portion de phlogistique très-profondément engagé; car j'ai déjà fait remarquer qu'en les calcinant elles acquièrent une teinte jaune: De plus, Henckel nous a appris que l'action d'un feu très-intense les réduisoit en une masse vitreuse, demi opaque, de couleur olivâtre. Or, le développement de ces couleurs ne peut dépendre que de l'expansion du phlogistique intimément fixé.

Mais pour rendre bien apparent ce phlogistique, il n'est pas besoin d'y employer l'action violente du feu; l'eau seule, même sans être échauffée va le développer & le rendre sensible.

Des fleurs de zinc nouvellement faites ont été mises dans un entonnoir de papier à filtrer. Je les ai soumises à des lotions répétées avec de l'eau distillée que j'y reversois, lorsqu'elle avoit passé à travers le papier: après ces lotions la surface des fleurs étoit d'une grande blancheur; mais en dérangeant cette première couche le reste paroissoit dans toute la profondeur coloré d'un beau bleu céleste; la teinte bleue prenoit un peu plus d'intensité, à mesure que l'on continuoit les lotions. Pour bien apercevoir cette couleur il faut l'examiner

dès que l'eau a cessé de passer par le filtre, & que les fleurs sont encore humectées; car en séchant ensuite sur un papier elles deviennent jaunâtres, comme après avoir été calcinées.

Quoique l'eau ne paroisse rien séparer des fleurs de zinc, cependant la teinte bleue qu'elles ont prise par l'effet des lotions prouve que le fluide aqueux agit ici en pénétrant les molécules de la chaux minérale.

L'exactitude de cette éthiologie me paroît confirmée par un fait analogue, tenant à une expérience exécutée dans la vue de préparer la chaux azurée de Respour, conformément au procédé de cet Auteur.

J'ai fait recalciner, en augmentant par gradation l'intensité du feu, deux parties de chaux vive ordinaire pulvérisée & mêlée avec une partie de soufre; il en est résulté une masse jaunâtre, qui, mise en poudre, & plusieurs fois lavée, en y reversant de l'eau distillée, s'est peu-à-peu colorée en bleue, en répandant une forte odeur d'*hepar;* & la couleur a paru se fortifier, lorsqu'après plusieurs lotions il n'est resté d'eau qu'autant qu'il en falloit pour humecter la matière : cette chaux en séchant est devenue, ainsi que les fleurs de zinc lavées, d'un blanc sale jaunâtre.

On aperçoit sans peine la parité entre ces deux faits; on sait que la chaux vive a la propriété de retenir & de fixer une portion de soufre, qu'elle garantit même en partie de l'action du feu. Voilà donc le phlogistique tenant d'un côté à l'acide, avec lequel il constitue le soufre; de l'autre à la terre calcaire, qui les lie & les arrête l'un & l'autre: or, ce phlogistique ainsi engagé produit ici, en se développant par la seule action de l'eau, la même teinte bleue qui colore les fleurs de zinc; ce qui indique dans les deux substances une mixtion à peu-près semblable dans les principes; & peut-être dans la chaux azurée une petite portion de fer, car il en existe un peu dans presque toutes les pierres calcaires.

Mais l'odeur d'*hepar* que répand la chaux azurée de Respour humectée, démontrant la présence de l'acide vitriolique, pour la mixtion du soufre, semble prouver aussi que dans

les fleurs de zinc, où cette odeur n'est nullement sensible, le phlogistique ne se trouve pas combiné avec le même acide; quoiqu'il y imprime la même couleur bleue, à la saveur de l'eau qui pénètre & qui s'insinue.

On doit donc présumer encore, en rappelant tout ce qui a été dit précédemment, que ce principe salin est celui du phosphore dépouillé sans doute d'une portion d'eau essentielle à la mixtion saline, & réduit ainsi par cette extrême concentration, peut-être aussi par son union avec quelqu'autre substance, à un état terreux, dont lui seul entre tous les autres acides paroît assez susceptible pour entrer par ce moyen, comme un des principes constituans, dans la mixtion métallique du zinc, & vraisemblablement d'autres matières du même genre *(g)*.

Pour éclaircir encore plus cette théorie importante, & pour ajouter ici le dernier trait au parallèle, je rappellerai deux belles expériences de M. Margraf *; ce célèbre Chimiste ayant mêlé avec l'étain d'une part, de l'autre avec le plomb le sel fusible d'urine, où réside le phosphore comme dans sa minière; les mélanges mis dans un vaisseau fermé furent exposés à l'action du feu, d'où il résulta deux substances métalliques ressemblant au zinc par les propriétés qui le distinguent. Donc les principes phosphoriques concourant ici à la production du nouveau mixte, paroissent avoir pris, en se combinant, en s'altérant, & en se concentrant, le caractère de la métalléité. Donc, on peut admettre, non-seulement avec Henckel, une similitude, mais encore une sorte d'identité entre le zinc & le phosphore.

* *Traduction françoise, tom. I, page 141.*

(g) Urbain Hierme, célèbre Chimiste Suédois, pensoit il y a long-temps, que la plupart des substances minérales & métalliques participent, dans leur composition intrinséque d'un principe acide. Il se fondoit sur des expériences & des remarques, dont on trouve les détails dans ses Ouvrages imprimés.

MÉMOIRE
SUR
LA PARALLAXE DU SOLEIL,
Déduite des meilleures Obſervations de la durée du paſſage de Vénus ſur ſon diſque le 3 Juin 1769.

Par M. PINGRÉ.

LES ſentimens ne paroiſſent pas encore bien réunis ſur la quantité de la parallaxe horizontale du Soleil: cet objet eſt important ſans doute, il a fait voyager bien des Aſtronomes, il occupe dans le cabinet d'habiles Géomètres. Le célèbre M. Euler a déterminé la parallaxe ſolaire moyenne de 8″,82; M. Hornſby, Profeſſeur d'Aſtronomie à Oxford, la croit de 8″,78; j'ai penſé qu'on pouvoit la porter à 8″,88; le P. Hell ne croit pas qu'elle puiſſe excéder de beaucoup 8″,7; enfin M. de la Lande eſt perſuadé qu'elle eſt *inconteſtablement* bornée à 8″,5. Je me crois en état de prouver, j'oſerois preſque dire de démontrer rigoureuſement, ou que cette parallaxe eſt à peu-près telle que M.rs Euler & Hornſby l'ont déterminée, ou qu'on ne peut rien conclure de la durée du dernier paſſage de Vénus. Je commencerai par apprécier les obſervations de la durée entière du paſſage entre les contacts intérieurs, ou même entre le premier intérieur & le ſecond extérieur, afin qu'on ſoit plus en état de juger du degré de confiance que chacune mérite. Je combinerai enſuite ces obſervations, pour en conclure la vraie parallaxe du Soleil; par ce terme je déſignerai toujours la parallaxe moyenne, c'eſt-à-dire, la parallaxe du Soleil dans ſes moyennes diſtances de la Terre.

J'emploierai dans cette recherche ſix obſervations principales, trois que j'appellerai *Américaines*, celles de Taïti, de Saint-Joſeph & du fort du Prince de Galles, ſur la baie

d'Hudſon; & trois *Européennes,* celles de Wardhus, de Kola & de Cajanebourg. Je ſuppoſerai, avec M. de la Lande, la ſomme des demi-diamètres de 972",31, & leur différence de 915",11. J'ai cru pareillement pouvoir me conformer à ſa déciſion ſur l'heure & le lieu de la conjonction des deux Aſtres, ſur la latitude géocentrique de Vénus, ſur ſon mouvement horaire tant en Longitude qu'en Latitude, & ſur celui du Soleil: ſi l'on découvre quelque défaut de préciſion dans ces élémens, au moins ce défaut doit être léger, & affectant également tous les réſultats, il laiſſera ſubſiſter en entier les conſéquences qu'on aura pu tirer de leurs comparaiſons réciproques.

J'ai ſuppoſé Taïti par $17^d\ 28'\ 55''$ de latitude Sud, & par $10^h\ 7'\ 13''$ de longitude à l'Oueſt du méridien de l'Obſervatoire. Les Obſervateurs étoient au nombre de trois, M. Green, le Capitaine Cook, & le Docteur Solander: voici leurs obſervations, telles qu'elles nous ont été communiquées d'abord, & telles que nous les avons tous ſuppoſées dans nos calculs; & c'eſt en effet ce que l'on peut conclure de plus raiſonnable des détails qui nous ſont enſuite parvenus.

	M. Green.	*M. Cook.*	*M. Solander.*
1.er contact extér.	$21^h\ 25'\ 40''$	$21^h\ 25'\ 45''$	
1.er contact inter.	21. 43. 55,5	21. 44. 15,5	$21^h\ 44'\ 02'',5$
2.e contact intér.	3. 14. 03	3. 14. 13	
2.e contact exter.	3. 32. 14	3. 32. 2	3. 32. 13

On auroit deſiré que les Obſervateurs ſe fuſſent mieux accordés, au moins ſur les contacts intérieurs; on attendoit le détail de leurs opérations, ce détail vient de paroître dans le LXI.e Volume des Tranſactions Philoſophiques, j'en rapporte fidèlement les principales circonſtances extraites des *pages 410, 411 & 412.*

A $21^h\ 25'\ 40''$, M. Green voit une lueur *(light)* ſur le bord du Soleil; à $21^h\ 25'\ 45''$, cette apparence eſt certaine. A $21^h\ 43'\ 15''$, premier contact intérieur des bords du Soleil & de Vénus; à $21^h\ 43'\ 55''$, contact de la pénombre

& du bord du Soleil. Pour la ſortie à $3^h\ 14'\ 3''$ premier contact de la pénombre par ondulation, le fil de lumière viſible & inviſible alternativement; à $3^h\ 14'\ 51''$, ſecond contact interne; à $3^h\ 31'\ 28''$, ſecond contact externe; à $3^h\ 32'\ 14''$, ſortie totale de la pénombre.

M. Solander fixe le premier contact extérieur à $21^h\ 26'\ 6''$; quelques ſecondes auparavant, il avoit vu ſur le Soleil une eſpèce de brume vacillante; à $21^h\ 43'\ 28''$, entrée, lueur naiſſante ſous Vénus; à $21^h\ 44'\ 2''$, le bord de Vénus eſt dégagé de celui du Soleil; à $3^h\ 31'\ 49''$ vrai bord de Vénus ſorti; à $3^h\ 32'\ 13''$, atmoſphère de Vénus ſortie.

Enfin M. Cook voit à $21^h\ 25'\ 45''$, la première trace de Vénus ſur le diſque du Soleil. A $21^h\ 43'\ 15''$, premier contact interne, ou coïncidence apparente des bords; à $21^h\ 44'\ 15''$, petit fil de lumière vu ſous la pénombre: à $3^h\ 14'\ 13''$ ſecond contact interne de la pénombre, ou fil de lumière abſolument rompu; à $3^h\ 14'\ 45''$, ſecond contact interne des corps; à $3^h\ 31'\ 22''$, ſecond contact externe des corps; à $3^h\ 32'\ 2''$, ſortie totale de la pénombre, douteuſe.

M. Cook raiſonne, *page 411*, ſur cette pénombre qu'ils ont vue ou cru voir; il dit, « qu'elle a rendu l'obſervation » de ce qu'il appelle *contacts intérieurs*, très-difficile, parce que » cette pénombre ſur le bord du Soleil, étoit preſque, pour » ne pas dire même abſolument, auſſi obſcure que le corps de Vénus. » Il ajoute, « qu'il y a auſſi pluſieurs ſecondes d'in- » certitude ſur le fil de lumière, parce qu'à l'entrée de Vénus, » il jugeoit que les bords de la pénombre & du Soleil ſe » touchoient, dix ſecondes avant l'inſtant marqué pour la for- » mation du fil, & qu'à la ſortie ce fil ne fut pas rompu en » un inſtant, mais par gradation, l'inſtant marqué étant celui où le fil de lumière fut totalement rompu. »

D'après cet extrait, on pourroit être tenté de regarder l'obſervation de Taïti comme très-incertaine, pour ne rien dire de plus. Cependant les raiſonnemens de M. Cook, de quelque

quelque manière qu'on veuille les envisager, n'empêcheront pas qu'il n'ait vu le fil de lumière se former & se rompre aux instans qu'il a déterminés : il seroit à souhaiter que M. Green se fût aussi plus occupé de ce fil de lumière, que de la pénombre imaginaire, au travers de laquelle il vouloit estimer les contacts intérieurs. Il est également triste pour sa mémoire, qu'il ait donné lieu à une remarque qui termine la *page 406;* les disparats que l'on trouve entre ses observations sur la latitude de Taïti, font dire que tout autre, avec des instrumens tels que les siens, auroit mieux observé, & qu'on ne peut imaginer d'autre cause de la diversité des résultats, que l'incurie ou la mal-adresse de l'Observateur. M. Green a aussi déterminé la moindre distance des centres de 10′ 25″,4; cette distance, comparée à celle qui a été observée à la baie d'Hudson, donneroit 10″,65 de parallaxe, & 10″,08 seulement, si on la comparoit avec l'observation de Norriton en Pensilvanie. Je ferai usage de l'observation de M. Cook, mais d'elle seule, parce que cet Observateur est le seul qui ait bien clairement spécifié la formation du fil de lumière à l'entrée de Vénus, indépendamment de la prétendue pénombre. Il a pareillement bien exprimé la rupture du même fil à la sortie, quoique ses expressions puissent faire douter s'il n'a pas marqué cette phase trop tard, mais de quelques secondes seulement. Taïti est tellement situé, qu'une erreur de 20 secondes dans l'observation de la durée, déterminée par M. Cook, & ce seroit beaucoup, n'en occasionneroit qu'une de 11 à 12 centièmes de seconde dans la parallaxe, en comparant cette durée avec celles qui ont été observées en Europe.

Le passage de Vénus a été observé en entier à Saint-Joseph en Californie, par M. l'abbé Chappe, Don Vincent Doz & Don Salvador de Médina. J'ai supposé la latitude du lieu de $23^d\ 3'\ 42''$ au Nord, & sa longitude de $7^h\ 27'\ 58''$ à l'Ouest.

	M. Chappe.	*D. Vincent.*	*D. Salvador.*
1.er contact extér.	$23^h\ 59'\ 16'',7$	$23^h\ 59'\ 13'',7$	$23^h\ 59'\ 17'',7$
1.er contact intér.	0. 17. 26,9	0. 17. 24,9	0. 17. 29,9
2.e contact intér.	5. 54. 50,3	5. 54. 47,5	5. 54. 47,5
2.e contact extér.	6. 13. 19,1	6. 12. 41	6. 12. 46

Je ne vois rien qu'on puiſſe objecter contre cette obſervation: feu M. l'Abbé Chappe étoit connu pour un bon Obſervateur; il avoit déjà obſervé le Paſſage de 1761, en entier: les deux autres Obſervateurs s'accordent avec lui à un très-petit nombre de ſecondes près, ſauf par rapport à la ſortie totale de Vénus, de laquelle je ne ferai pas grand uſage: la hauteur du Soleil ſur l'horizon n'étoit plus alors que de $5^d\ 20'$. Une erreur de 20 ſecondes dans l'obſervation de la Californie, comparée aux obſervations Européennes, en occaſionneroit une de 17 centièmes de ſeconde dans la parallaxe du Soleil; mais je ne penſe pas que ce ſoit dans l'obſervation de la Californie, qu'il y ait lieu de craindre une pareille erreur.

Le fort du prince de Galles, près la baie d'Hudſon, eſt par $58^d\ 47'\ 32''$ de latitude Nord; je l'ai ſuppoſé dans mes calculs de $6^h\ 26'\ 23''$ à l'Oueſt de Paris. M.rs Dymond & Wales y ont fait les obſervations ſuivantes.

	Premier contact extérieur.	*Premier contact intérieur.*	*Second contact intérieur.*	*Second contact extérieur.*
M. Wales...	$0^h\ 57'\ 07'',6$	$1^h\ 15'\ 21'',3$	$7^h\ 00'\ 45'',5$	$7^h\ 19'\ 01'',2$
M. Dymond.	0. 57. 00,6	1. 15. 25,3	7. 00. 48,5	7. 19. 20,2

Ces obſervations s'accordent ſuffiſamment, excepté celles de la ſortie totale. Il eſt ajouté, immédiatement après ces dernières obſervations, que les bords étoient mal terminés, & l'air très-brumeux, ce que M. de la Lande entend ſeulement de l'inſtant du ſecond contact extérieur. Je diſois dès 1770, dans un Mémoire imprimé parmi ceux de cette année, qu'il étoit bien à craindre que ces paroles ne s'appliquaſſent à tout le temps de la ſortie. En effet, on ajoute qu'au

Fort du prince de Galles, le ciel eſt toujours embrumé juſqu'à 10 à 12 degrés au-deſſus de l'horizon, & ſouvent même juſqu'à 16 & 18 degrés. Au dernier contact, à la ſortie de Vénus, le Soleil avoit 9 degrés un tiers de hauteur, il n'étoit élevé que de 11 degrés & demi au commencement de la ſortie; l'air *très-brumeux* à 9 degrés un tiers au-deſſus de l'horizon, n'étoit probablement pas fort clair 2 degrés plus haut: quoi qu'il en ſoit, ſi l'on compare la durée du paſſage obſervé à la baie d'Hudſon, avec les obſervations Européennes, ou avec celles de la Californie, une erreur de 20 ſecondes dans les obſervations en produit une de plus d'un tiers de ſeconde dans la parallaxe du Soleil; l'erreur eſt moitié moindre ſi l'on prend Taïti pour terme de la comparaiſon.

Wardhus en Lapponie eſt par $70^d\ 22'\ 36''$ de latitude boréale; je l'ai ſuppoſée de $1^h\ 55'\ 08''$ à l'Eſt de notre Obſervatoire royal. Le paſſage de Vénus y fut obſervé par les PP. Hell & Sajnovics & par M. Borgrewing. La partie du ciel où étoit le Soleil étoit très-pure, tant à l'entrée qu'à la ſortie de Vénus, cette Planète avoit $6^d\ 33'$ de hauteur à l'inſtant de ſon entrée totale, & $9^d\ 43'$ à celui du commencement de ſa ſortie. M. Borgrewing, habile Botaniſte, n'avoit encore fait aucune obſervation céleſte; les deux autres Obſervateurs ſont connus pour verſés dans le maniement des inſtrumens aſtronomiques; leurs obſervations de l'entrée & de la ſortie de Vénus ne diffèrent que d'un petit nombre de ſecondes; je ne vois donc aucun reproche légitime que l'on puiſſe faire contre cette obſervation. Mais le P. Hell a trop tardé, dit-on, à la communiquer. Il aſſure qu'il lui étoit défendu de le faire, avant qu'elle fût imprimée à Copenhague, & préſentée au roi de Danemarck en forme de Mémoire raiſonné. Mais, ajoute-t-on, on ne comprend point les raiſons d'une pareille défenſe, & le P. Hell pouvoit en prévoir les inconvéniens, & en obtenir la modification. J'avoue que je ne comprends pas moi-même quels pouvoient être les grands inconvéniens d'un pareil retard. Un honnête homme, qui n'a jamais été accuſé, qui n'a jamais

été ſoupçonné d'en avoir impoſé au public dans la grande quantité d'obſervations qu'il lui a communiquées, ne va pas s'imaginer qu'on le traduira comme ayant forgé dans ſon cabinet une obſervation auſſi précieuſe, auſſi intéreſſante que celle-ci. D'ailleurs, le P. Hell a des témoins dans ſes coobſervateurs, il offre de montrer l'original de ſes obſervations, écrit ſur le lieu ſans aucune rature; l'Académie de Copenhague ne révoque point en doute les faits qu'il avance dans ſa Diſſertation ſur le paſſage de Vénus; cette diſſertation fut lûe dans cette Académie dès le 24 Novembre, avant qu'on y eût connoiſſance d'aucune obſervation Américaine. Enfin, ou l'obſervation du P. Hell s'accorde avec celle de Cajanebourg, ou elle ne s'y accorde pas: dans le premier cas, le réſultat de l'une & l'autre obſervation ſera le même, pourquoi en rejeter une? Dans le ſecond cas, il eſt clair que l'obſervation de Wardhus n'a pas été remaniée ſur celle de Cajanebourg.

Ce que l'on pourroit objecter de plus ſpécieux contre l'obſervation du P. Hell, c'eſt que ſon obſervation des deux contacts intérieurs, & celle de la fin de l'éclipſe du Soleil, placent Wardhus par deux longitudes différentes. Mais, 1.° ces deux longitudes ne diffèrent que de 12 à 13 ſecondes, ce qui ne produiroit que 7 à 8 centièmes de ſeconde d'incertitude ſur la parallaxe du Soleil. 2.° Les deux contacts intérieurs donnent la même longitude, à 2 ſecondes près; donc, ou ils ſont exempts d'erreur, ou l'erreur eſt la même & à l'entrée & à la ſortie; dans l'un & l'autre cas la durée n'eſt affectée d'aucune erreur ſenſible; or c'eſt de la ſeule durée que nous prétendons conclure la parallaxe du Soleil.

Le fil de lumière, à l'entrée totale de Vénus, fut obſervé à $9^h\ 34'\ 10'',6$ par le P. Hell, 3 ſecondes plus tôt par le P. Sajnovics, & 2 ſecondes ſeulement plus tôt par M. Borgrewing.

A $15^h\ 27'\ 24'',6$ le P. Hell aperçoit à la ſortie une goutte ou protubérance noire entre les diſques de Vénus & du Soleil; ſix ſecondes après, cette goutte diminue, enſuite

elle ſe diſſipe & diſparoît en un moment, ou pour un moment, *momentaneè diſparet ac veluti diffluit;* les bords des deux aſtres ſe joignent, & le vrai contact optique arrive à 15^h $27' 35'',6$ ſelon le P. Hell, une ſeconde plus tard ſelon le P. Sajnowics, 7 ſecondes plus tôt ſelon M. Borgrewing. Le P. Sajnowics avoit auſſi aperçu la goutte noire; mais ſans déterminer le temps de ſon apparition.

Enfin, ſortie totale certaine à $15^h 45' 44'',4$ ſelon le P. Hell, une ſeconde plus tard ſelon le P. Sajnovics, 6 ſecondes plus tôt ſelon M. Borgrewing.

D'après cet expoſé, j'avois jugé qu'il falloit prendre pour véritable contact intérieur à la ſortie celui que le P. Hell appelle *contactus interior opticus, contactus interior certus:* mais M. de la Lande & le P. Hell lui-même veulent que la goutte noire ſoit priſe pour le vrai contact intérieur, & je penſe qu'ils ont raiſon. Je les imiterai, la parallaxe du Soleil en deviendra un peu moindre que je ne l'avois déterminée dans le précédent Mémoire.

J'avois cru pareillement devoir prendre un milieu entre les obſervations du P. Hell & celles du P. Sajnovics; heureuſement elles diffèrent très-peu. Je n'aurai égard dans ce Mémoire qu'à l'obſervation du P. Hell; celle du P. Sajnovics augmenteroit de bien peu la parallaxe horizontale du Soleil.

M. Étienne Rumowsky, déjà très-avantageuſement connu par beaucoup d'obſervations aſtronomiques, faites principalement à Selinginsk en Sibérie, à l'occaſion du paſſage de 1761, a obſervé celui de 1769 à Kola en Lapponie, par $68^d 52' 28''$ de latitude Nord; & ſelon M. de la Lande, $2^h 02' 52''$ à l'Eſt de notre Méridien. Le mauvais temps nuiſit beaucoup à la préciſion de l'obſervation. A $9^h 39' 52''$ de la pendule, ou ſelon M. de la Lande, à $9^h 42' 02''$ temps vrai, contact intérieur, par eſtime plus que par obſervation; 23 ſecondes plus tard, le nuage étant diſſipé, on voyoit un petit intervalle entre les bords des deux aſtres; leur hauteur ſur l'horizon étoit d'environ 4 degrés trois quarts.

A $13^h\ 33'\ 08''$ ou $12''$ de la pendule, & ſelon M. de la Lande à $15^h\ 35'\ 18'',6$, ou $22'',6$, contact intérieur à la ſortie, obſervation aſſez bonne ſelon M. Rumowsky; la hauteur du centre du Soleil étoit de 9 degrés un quart. En déterminant le ſecond contact intérieur à $15^h\ 35'\ 20'',6$, la durée du paſſage aura été de $5^h\ 53'\ 18'',6$. Je n'inſiſte point ſur une correction qu'on a cru devoir faire à Saint-Péterſbourg d'une inégalité légère qu'on a remarquée dans la pendule de M. Rumowsky; c'eſt d'après cette correction que les temps de la pendule ont été ci-deſſus réduits aux temps vrais. En ſuivant la marche de la pendule, telle qu'elle eſt donnée par les hauteurs correſpondantes, j'avois trouvé la durée d'une ſeconde & demie plus longue; l'objet eſt trop peu important pour fixer plus long-temps notre attention.

Dans le même temps, M.rs Ochtensky & Borodulin obſervoient le même phénomène. A $9^h\ 33'\ 49''$ de leur pendule ($9^h\ 42'\ 23''$ de temps vrai), les nuages ſe diſſipant, on voit déjà un filet très-délié de lumière entre les deux limbes. Contact intérieur à la ſortie, à $15^h\ 26'\ 02''$ ($15^h\ 35'\ 43''\frac{1}{2}$ temps vrai). Ainſi, ſelon eux, le paſſage auroit duré au moins $5^h\ 53'\ 20''\frac{1}{2}$.

J'avois négligé cette obſervation de Kola dans mon premier Mémoire; ce qui m'engage à l'employer aujourd'hui, eſt une remarque que j'ai faite depuis. La fin de l'Éclipſe du Soleil, obſervée le même jour, donne, à Kola, $2^h\ 2'\ 43''$ de longitude orientale; l'entrée totale de Vénus, obſervée ou, ſi l'on veut, devinée par M. Rumowsky, $2^h\ 02'\ 45''$, & la ſortie, $2^h\ 02'\ 41''$, ou même $43''$, ſi l'on fixe le ſecond contact intérieur à $15^h\ 35'\ 22'',6$: cet accord prouve, à mon avis, que le premier contact intérieur n'a point été mal déterminé, ni le ſecond mal obſervé par M. Rumowsky.

La latitude de Cajanebourg eſt de $64^d\ 13'\ 30''$ au Nord, & ſa longitude, de $1^h\ 41'\ 41''$ à l'eſt. M. André Planmann y avoit déjà obſervé avec ſuccès le paſſage de 1761. Le 3 Juin 1769, le Soleil fut couvert de nuages. A $9^h\ 8'\ 30''$,

le ciel s'étant éclairci du côté du Soleil, Vénus étoit entrée en partie. A 9^h 20′ 45″ $\frac{1}{2}$, immerſion totale; M. Planmann eſt ſatisfait de cette obſervation. Le Soleil n'avoit pas plus de deux degrés d'élévation ſur l'horizon; mais comme cette obſervation donne à Cajanebourg préciſément la même longitude que la fin des Éclipſes de 1761 & de 1769; il paroît qu'elle eſt bien faite, & hors de tout ſoupçon d'incertitude: elle fut ſuivie de nuages, de pluie, de tonnerre. A 15^h 20′ 46″, le Soleil reparoît, le tiers de Vénus étoit déjà ſorti. A 15^h 32′ 27″, émerſion totale; M. Planmann croit encore cette obſervation aſſez bonne, quoiqu'il reconnoiſſe que le bord du Soleil étoit ondulant; la hauteur de ſon centre étoit de 6 degrés.

Telles ſont les ſeules obſervations que nous ayons de la durée du paſſage de Vénus ſur le diſque du Soleil, le 3 Juin 1769. Celle de Taïti eſt complette; il ſeroit à deſirer que les Obſervateurs ſe fuſſent moins occupés d'une apparence d'optique, qui n'étoit pas le principal objet de leur miſſion; il paroît cependant qu'on peut faire uſage, avec quelque confiance, de l'obſervation de M. Cook. L'obſervation de Saint-Joſeph en Californie ne laiſſe, à mon avis, rien à deſirer. J'en dirois autant de celle de la baie d'Hudſon, s'il n'étoit à craindre que la brume eût porté quelque préjudice à l'obſervation du ſecond contact intérieur. Je ne balance pas à regarder l'obſervation de Wardhus comme à l'abri de tout reproche légitime; des faits ne ſe détruiſent point par des poſſibilités métaphyſiques. Le premier contact intérieur a été plutôt deviné qu'obſervé à Kola; mais il paroît par ce qui a été dit plus haut, qu'il a été aſſez heureuſement deviné. Enfin, le deuxième contact intérieur n'a pu être obſervé à Cajanebourg: on veut, il eſt vrai, ſuppléer à ce défaut, en ſubſtituant le ſecond contact extérieur au ſecond intérieur; mais ce ſecond contact extérieur eſt en général plus difficile à ſaiſir, vu la petiteſſe de Vénus & la lenteur de ſon mouvement. Que doit-ce donc être, ſi on y joint une ondulation

avouée des bords du Soleil? Malgré cela nous essayerons de faire usage de cette observation, elle peut au moins nous donner une parallaxe approchée; mais nous ne suivrons pas la méthode de M. de la Lande.

Avant que de rien conclure sur la parallaxe du Soleil, je joins ici une Table de l'effet de cette parallaxe sur les momens des principales phases du passage. J'y suppose la parallaxe horizontale moyenne de 8",5; une simple règle de proportion donnera l'effet de toute autre parallaxe. Le signe + signifie que la phase a dû arriver plus tard que si elle eût été vue du centre de la Terre; le signe — marque au contraire qu'elle a dû arriver plus tôt. Dans la dernière colonne, les longitudes marquées pour les différens lieux de l'Amérique, pour Orsk & pour Batavia, sont conclues de l'Observation même du passage de Vénus, dans la supposition de 8",8 de parallaxe solaire; les autres ou sont connues d'ailleurs, ou ont été rigoureusement calculées sur les observations de la fin de l'Éclipse de Soleil du 3 ou 4 Juin. Les lettres S. N. O. E. désignent le Sud, le Nord, l'Ouest & l'Est.

TABLE

TABLE des effets de la parallaxe de Vénus au Soleil sur les instans des principales phases du passage de Vénus, la parallaxe moyenne du Soleil étant supposée de 8″,5.

NOMS des LIEUX.	EFFET DE LA PARALLAXE SUR LE			LATITUDE des LIEUX.	LEUR LONGITUDE.
	2.e Contact.	3.e Contact.	4.e Contact.		
	M. S.	M. S.	M S	D. M. S.	H. M. S.
Taïti	+5. 30,3	−6. 12,6	−6. 7,7	17. 28. 55 S.	10. 7. 19 O.
Saint-Joseph	−0. 18,6	−4. 42,9	−4. 40,8	23. 3. 42 N.	7. 28. 10
Hudson	−4. 8,4	−0. 37,0	−0. 48,2	58. 47. 32	6. 26. 16
Isle Coudre	−4. 38,5	....	....	47. 31. 41	4. 50. 18
New Cambridge	−4. 17,5	....	....	42. 25. 0	4. 54. 0
Norriton	−3. 55,1	....	....	40. 9. 56	5. 11. 35
Philadelphie	−3. 54,2	....	....	39. 56. 55	5. 10. 24
Leweftown	−3. 50,1	....	....	38. 47. 27	5. 9. 45 ½
Mexico	−0. 38,5	....	....	19. 54. 0	6. 49. 43
Le Cap françois	−2. 34,9	....	....	19. 47. 4	4. 58. 32
La Martinique	−2. 55,9	....	....	14. 44. 0	4. 8. 58 ::
Cadiz	−6. 40,5	....	....	36. 31. 7	0. 34. 37
Greenwich	−6. 56,9	....	....	51. 28. 40	0. 9. 16
Hawkhill	−6. 55,6	....	....	55. 57. 37	0. 21. 56
Paris	−6. 57,7	....	....	48. 50. 14	0. 0. 0
Upfal	−6. 50,0	....	....	59. 51. 50	1. 1. 13 E.
Stockolm	−6. 50,5	....	....	59. 20. 31	1. 2. 53
Hernofand	−6. 48,5	....	....	60. 38. 0	1. 2. 12
Cajanebourg	−6. 38,0	+4. 50,0	+4. 30,8	64. 13. 30	1. 41. 41
Saint-Pétersbourg	....	+5. 10,5	+4. 51,7	59. 56. 23	1. 52. 0
Wardhus	−6. 24,2	+4. 28,1	+4. 6,8	70. 22. 36	1. 5 7 ::
Kola	−6. 26,0	+4. 36,9	+4. 15,9	68. 52. 55	2. 2. 43
Ponoi	−6. 21,8	....	....	67. 4. 30	2. 35. 11 ::
Gurief	....	+6. 19,7	+5. 58,1	47. 7. 8	3. 18. 28
Orembourg	....	+6. 5,7	+5. 42,7	51. 46. 0	3. 31. 0
Orsk	....	+6. 11,4	....	51. 12. 11	3. 44. 28 ::
Batavia	....	+3. 56,5	+3. 35,6	6. 12. 0 S.	6. 58. 15
Pékin	....	+4. 24,2	+3. 51,0	39. 55. 15 N	7. 36. 23
Manille	....	+3. 36,8	+3. 8,2	14. 36. 8	7. 54. 4 ½

Les effets de la parallaxe, déterminés par M. de la Lande ne diffèrent que d'un petit nombre de dixièmes de seconde de ceux-ci. J'ai recommencé jusqu'à trois fois le calcul de l'effet de la parallaxe sur le premier contact intérieur à la baie d'Hudson, parce que la différence entre le résultat de M. de la Lande & le mien est presque d'une seconde & demie. Au reste, cette différence même est de peu de conséquence.

Pour conclure plusieurs longitudes de l'observation même du passage de Vénus, j'ai comparé avec Paris les lieux où le premier contact intérieur avoit été observé, & avec Gurief ceux où l'on avoit observé le second contact intérieur. J'ai supposé le premier contact intérieur à Paris à $7^h\ 38'\ 44''$, une seconde seulement plus tôt que M. de la Lande; cette supposition m'a paru quadrer avec un plus grand nombre d'observations faites, tant en France qu'en Angleterre, & sur-tout avec celle d'Hawkhil en Écosse, où le Soleil étoit élevé de plus de 8 degrés sur l'horizon; c'est-à-dire, plus que par-tout ailleurs. Quant à Gurief, j'ai établi sa longitude de $3^{h.}\ 18'\ 28''$; la fin de l'éclipse du Soleil ne permet pas de lui en donner davantage, non plus qu'à Orenburg plus de $3^h\ 31'\ 00''$. M. Krafft, qui observoit à Orenburg, n'a vu la jonction prompte & instantanée des bords qu'à $17^h\ 05'\ 06''$; quoique l'ondulation des bords du Soleil & de Vénus eussent pensé le surprendre, & lui faire marquer cette phase 5 secondes & demie plus tôt. C'est ce qu'à mon avis, il dit fort clairement; en marquant l'instant du contact intérieur à $17^h\ 05'\ 06''$, la durée de la sortie est déjà assez longue, sans l'étendre encore inutilement au-delà des bornes légitimes; il y auroit plus de fondement de retarder que d'accélérer cet instant.

A Saint-Pétersbourg la sortie de Vénus a duré trop peu de temps, & il paroît qu'il y a erreur sur l'instant du premier contact, ou du contact intérieur. En comparant cette observation avec celles de Gurief, d'Orenburg & de Kola, il en résulte une longitude de Saint-Pétersbourg trop orientale;

en la combinant avec les autres obſervations Européennes, on trouve une parallaxe qui excède 9 ſecondes. M. de la Lande a raiſon de dire qu'une erreur de compte d'une minute eſt une mépriſe qui eſt arrivée pluſieurs fois dans des obſervations importantes; mais il eſt facile de ſe perſuader qu'une telle mépriſe arrivera bien plus facilement, lorſque dans une île Rodrigue *(a)*, un Obſervateur ſera obligé de ſe tenir loin de ſa pendule, & d'y faire compter par des Officiers-côtiers de la Compagnie des Indes, que non pas dans un Obſervatoire tel que celui de Saint-Péterſbourg. D'ailleurs, il ſuffit d'anticiper de 20 ſecondes ſeulement l'inſtant marqué par le P. Sthal, & de 30 ſecondes celui qui eſt déterminé par le P. Mayer, pour que la durée de la ſortie ſoit légitime, pour que la longitude conclue de cette obſervation ſoit la véritable longitude de Saint-Péterſbourg, pour qu'enfin il en réſulte une parallaxe ſolaire conforme à celle qu'on déduit des autres obſervations. Au temps de l'obſervation de Saint-Péterſbourg, le Soleil n'avoit que 2 degrés & un tiers d'élévation ſur l'horizon, & ſon bord étoit ondulant. Eſt-ce là la cauſe de l'erreur, ou les Obſervateurs auroient-ils négligé la rupture du filet de lumière, & marqué la coïncidence apparente des bords pour contact intérieur? Je ſerois fort tenté de le croire en peſant les termes même ſous leſquels on nous a tranſmis cette obſervation. On n'y trouve pas la plus légère mention du fil de lumière; le P. Stahl, qui juge le premier que les bords ſe touchent, ajoute que le bord du Soleil n'eſt point entamé. Je ſuis cependant bien éloigné de décider qu'on ait dû obſerver par-tout une formation ou une rupture du fil de lumière, ſéparée de la coïncidence

(*a*) M. de la Lande croit qu'il s'eſt gliſſé une erreur d'une minute ſur les Obſervations de Saint-Péterſbourg; il ne parle point de l'Obſervation de Rodrigue: ſi j'en parle ici, ce n'eſt que pour profiter de l'occaſion; je rends volontiers hommage à la vérité, en reconnoiſſant qu'il y a une erreur d'une minute dans mon obſervation de Rodrigue; je n'en puis conjecturer d'autre cauſe que le peu d'habitude que nos Officiers avoient de compter à la pendule.

apparente des bords, par un intervalle de plusieurs secondes.

A Ponoi en Lapponie, l'entrée totale de Vénus & la fin de l'éclipse du Soleil, donnant deux longitudes de Ponoi, différentes entre elles de plus d'une demi-minute, & ne pouvant décider laquelle de ces deux longitudes est la véritable, je ne puis faire usage de l'observation faite en cette Ville.

Le P. Christophe, à la Martinique, m'a paru fort en état de faire une bonne observation; il ne manquoit ni de zèle ni d'intelligence. Il faut qu'il se soit trompé en réduisant le temps de sa pendule en temps vrai. Il observoit, non pas au fort Royal, mais deux lieues environ à l'Est du fort Saint-Pierre, par $14^d\ 44'$ de latitude. Son observation donne une longitude trop orientale d'environ cinq minutes de temps.

A Pékin, le P. Dollières à $21^h\ 08'\ 24''$ ne voyoit plus de lumière entre le Soleil & Vénus; il estima la sortie totale à $21^h\ 27'\ 00''$; cependant il crut voir encore durant une seconde le bord de Vénus plus éclairé qu'auparavant, & mordant pour ainsi dire un peu sur le disque du Soleil. Ainsi, selon le P. Dollières, la durée de la sortie a été plus longue à Pékin que par-tout ailleurs, & selon le calcul elle devoit être par-tout ailleurs plus longue qu'à Pékin. Tous les autres Observateurs ont trouvé la sortie ou à peu-près aussi longue, ou même plus courte que ne la donnoit le calcul; le Père Dollières seul a observé une durée qui excède de 28 ou même de 32 secondes la durée calculée; cette raison seule est bien suffisante pour m'autoriser à récuser l'observation du Père Dollières, & à lui préférer celle du P. Collas, qui a jugé le contact intérieur à $21^h\ 08'\ 49''$, l'extérieur à $21^h\ 26'\ 54''$.

La durée du passage entre les deux contacts intérieurs a été à Wardhus de $5^h\ 53'\ 14''$ selon le P. Hell, & selon M. l'abbé Chappe de $5^h\ 37'\ 23'',4$ à S.[t] Joseph en Californie; la différence est de $15'\ 50'',6$, & selon la table précédente cette différence devroit être seulement de $15'\ 16'',7$, si la parallaxe horizontale du Soleil n'étoit que de $8'',5$. Je dis, $15'\ 16'',7 : 15'\ 50'',6 :: 8'',5 : 8'',81$ vraie parallaxe moyenne

du Soleil, résultante des deux observations les plus complètes que nous ayons.

Le même passage, selon M. Cook, à Taïti, a duré 5^h $29' 57'' \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $23' 16'' \frac{1}{2}$ moins qu'à Wardhus; & la différence ne seroit que de $22' 35'',2$, dans la supposition de $8'',5$ de parallaxe, $22' 35'',2 : 23' 16'',5 :: 8'',5 : 8'',76$. Ce résultat ne diffère que d'un demi-dixième de seconde du précédent; pour qu'ils s'accordassent parfaitement, il ne faudroit que retrancher 8 à 9 secondes de la durée observée à Taïti, ce que les circonstances même de l'observation paroissent nous permettre.

En combinant de même l'observation de Taïti avec celle de Saint-Joseph, on ne trouveroit que $8'',64$ de parallaxe; mais c'est déjà beaucoup plus de $8'',5$, & d'ailleurs les 8 à 9 secondes de diminution sur la durée de Taïti suffiroient pour trouver $8'',8$.

Nous avons vu ci-devant qu'il étoit à craindre que le ciel brumeux n'eut nui à l'observation de la sortie de Vénus, faite à la baie d'Hudson; si cela est en effet, il est clair que le fil de lumière aura dû trop tôt disparoître. En prenant un milieu entre les durées observées par M.rs Wales & Dymond, on aura $9'',06$ de parallaxe, si l'on compare ce milieu avec la durée observée à Wardhus; $8'',59$ seulement, si l'on prend Saint-Joseph pour terme de comparaison; ou $8'',61$, si l'on prend Taïti. En supposant, comme auparavant, 8 à 9 secondes d'erreur sur la durée observée à Taïti, le premier contact intérieur à la baie d'Hudson à $1^h 15' 21'',3$, comme M. Wales l'a observé; & le second, à $7^h 00' 58''$, 9 secondes & demie plus tard que M. Dymond ne l'a déterminé, on trouvera par-tout $8'',8$ ou $8'',81$ de parallaxe.

On nous objecte l'accord des observations Américaines; cet accord forme en effet un préjugé, & ce préjugé pourroit paroître décisif, s'il n'étoit contredit par aucune autre observation, si les observations étoient en plus grand nombre, & si leur accord ne pouvoit être attribué qu'à leur précision. Ces observations, au nombre de trois, ne souffrent que trois

combinaiſons ; & les réſultats s'accorderont néceſſairement ; non-ſeulement ſi elles ſont parfaites toutes les trois, mais encore, ſi celle du milieu étant véritablement bonne (c'eſt celle de la Californie), les deux autres ont une erreur à peu-près égale, mais en ſens contraire. Or, c'eſt ce qui a pu arriver ici. M. Green ne fait aucune mention du fil de lumière à l'entrée de Vénus; mais à ſa ſortie, il paroît avoir ſoupçonné la rupture de ce fil 10 ſecondes avant l'inſtant marqué par M. Cook, quoique ſelon lui il parut & diſparut alternativement & par ondulations, ce que M. Cook donne auſſi aſſez clairement à entendre. A la baie d'Hudſon, au contraire, ſi la brume a nui à l'obſervation, ce n'a pu être qu'en faiſant trop tôt diſparoître le fil de lumière. Il y a donc une cauſe poſſible de l'accord des obſervations Américaines, autre que leur perfection intrinſéque. J'ai ajouté que cet accord étoit contredit par d'autres obſervations que celle de Wardhus.

La durée obſervée à Kola, eſt de $5^h\ 53'\ 18'',6$; cette obſervation comparée avec celle de M. l'abbé Chappe, donne 8",76 de parallaxe ſolaire, & 8",72, ſi on la compare avec celle de Taïti. Pour trouver 8",8 ou 8",81, il ſuffiroit d'augmenter ſeulement de 4 à 5 ſecondes, la durée obſervée par M. Rumowski, & de diminuer, comme auparavant, celle de Taïti de 8 à 9 ſecondes.

Toutes les comparaiſons que l'on peut faire de la durée obſervée à Saint-Joſeph, avec celle qui s'eſt écoulée entre le premier contact intérieur, obſervé à Paris, Greenwich, Stockolm, Hernoſand, Upſal, Hawkhill, Cajanebourg, &c. d'une part, & le ſecond contact intérieur, obſervé de l'autre à Kola, Orenburg, Gurief, Pékin & Manille, concourent à établir la parallaxe du Soleil à très-peu-près de 8",8. L'obſervation de Taïti donnera le même réſultat, à cinq ou ſix centièmes de ſeconde près cependant, à moins qu'on n'y faſſe la correction indiquée ci-devant. Ce concert, qu'on ne peut détruire ſans altérer des longitudes de villes, dont je me crois abſolument aſſuré, vaut bien celui des trois obſervations Américaines.

Venons à celle de Cajanebourg. Je n'analyserai point ici la méthode dont M. de la Lande s'est servi pour anéantir l'observation de Wardhus; elle est sûre & précise, sans doute, mais non pas exclusivement, ni peut-être même supérieurement à toute autre. M. de la Lande nous assure qu'*elle est aussi indépendante de tous les autres élémens que la nature de la chose le peut comporter.* J'en conviens volontiers, pourvu que tout soit d'ailleurs égal dans les observations que l'on compare, c'est-à-dire, pourvu que les durées comparées soient toutes entre les mêmes contacts: mais si l'on compare une durée bornée par les contacts intérieurs avec une autre durée déterminée par un contact intérieur & un extérieur; alors je ne connois rien de plus incertain que la méthode de M. de la Lande, parce qu'alors elle dépend d'élémens qui ne sont point donnés avec une certitude suffisante; telle est entr'autres la grandeur du demi-diamètre de Vénus; une seconde de plus ou de moins suffit pour altérer la parallaxe de près d'un quart de seconde; je m'en suis assuré par le calcul. Est-on pareillement bien certain de la quantité précise de l'inflexion des rayons du Soleil? Cet élément est-il le même, quant à la Lune & à Vénus? Agit-il absolument de même sur les contacts intérieurs & sur les extérieurs? Tout cela devroit être décidé avec la plus grande certitude, avant que de tenter seulement d'employer l'observation de Cajanebourg par la méthode de M. de la Lande. Il y avoit une manière si simple, si naturelle de faire usage de cette observation, que je m'étonne qu'elle ait échappé à la pénétration de M. de la Lande; la conclusion seroit décisive, si l'on pouvoit en général répondre avec quelque confiance de l'instant des contacts extérieurs, & si en particulier l'ondulation des bords du Soleil ne paroissoit pas devoir ajouter un nouveau degré d'incertitude à l'observation de M. Planmann. Ne comparons pas ici nos calculs avec les observations, mais les seules observations entr'elles. Du premier contact intérieur au second extérieur, il s'est écoulé à Cajanebourg $6^h\ 11'\ 31''\frac{1}{2}$; à Taïti, $5^h\ 48'\ 18'',5$, selon M. Green; $5^h\ 47'$

46",5, ſelon M. Cook; & 5^h 48' 10" $\frac{1}{2}$, ſelon M. Solander; ce qui donne 8",725, 8",92, & 8",785; & par un milieu, 8",81 de parallaxe ſolaire. Quelque légère incertitude ſur le demi-diamètre de Vénus, ſur la quantité de l'inflexion des rayons ſolaires, &c. agiſſant ici dans le même ſens, tant à Taïti qu'à Cajanebourg, le réſultat final n'en peut être que bien légèrement affecté. Si l'on compare de même l'obſervation de Cajanebourg avec celle de M. l'abbé Chappe à Saint-Joſeph, on ne trouvera que 8",67, mais on trouvera juſqu'à 9",0, ſi l'on ſubſtitue les obſervations des deux Officiers Eſpagnols à celle de l'abbé Chappe; ce qui ne prouve rien autre choſe, ſinon que l'abbé Chappe, avec une excellente lunette achromatique de 12 pieds, a moins mal ſaiſi le dernier contact que M. Planmann avec une lunette ordinaire de 21 pieds, mais que celui-ci, nonobſtant l'ondulation des bords du Soleil, a ſuivi plus long-temps que les Officiers Eſpagnols la marche de Vénus prête à quitter le Soleil. En ajoutant environ 15 ſecondes au temps déterminé par M. Planmann pour la ſortie totale de Vénus, la durée obſervée à Cajanebourg, comparée à celles qui ont été obſervées à Taïti par M. Green, à Saint-Joſeph, par M. l'Abbé Chappe, & à la baie d'Hudſon, par M. Dymond, donnera par-tout, à très-peu-près, 8",81 de parallaxe ſolaire. Je ne prétends cependant pas affirmer que ces trois dernières durées ſoient exactes, ni borner à 15 ſecondes l'erreur de celle de Cajanebourg; la conſtante & prodigieuſe différence reſpective des durées de l'entrée & de la ſortie de Vénus, obſervées, tant en 1761 qu'en 1769, m'a trop appris à me méfier des contacts extérieurs, ſur-tout quand le bord du Soleil eſt ondulant.

Qu'il me ſoit permis maintenant de m'écarter un peu des élémens déterminés par M. de la Lande. J'établis le milieu du paſſage à 10^h 36' 55" temps vrai, méridien de Paris, conſéquence que je tire de l'obſervation de Saint-Joſeph, & je ſuppoſe la parallaxe du Soleil de 8",81. Il ſuit de-là que la demi-durée du paſſage entre les deux contacts intérieurs,

intérieurs, réduite au centre de la Terre, eſt telle que dans la Table ſuivante.

		h	′	″
1.	Par la durée entière, obſervée à Saint-Joſeph....	2^h	$50'$	$58''\frac{1}{4}$
2.	Par la même, obſervée à Taïti...............	2.	51.	$03\frac{1}{4}$
3.	Par la même, obſervée à la baie d'Hudſon......	2.	50.	$52\frac{1}{4}$
4.	Par la même, obſervée à Wardhus............	2.	50.	59
5.	Par la même, obſervée à Kola...............	2.	50.	56
6.	Par le premier contact intérieur, obſervé à Paris...	2.	50.	58
	Et à très-peu-près de même, par preſque toutes les obſervations de France.			
7.	Par le même, obſervé à Greenwich à 7^h $29'$ $26''$..	2.	51.	01
	Et à très-peu-près de même, par preſque toutes les obſervations d'Angleterre.			
8.	Par le même, obſervé à Hawkhill.............	2.	50.	58
9.	Par le même, obſervé à Hernoſand............	2.	50.	57
10.	Par le même, obſervé à Stockolm	2.	50.	56
11.	Par le même, obſervé à Upſal, par M. Bergman...	2.	50.	54
12.	Par le même, obſervé à Cajanebourg	2.	50.	58
13.	Par le ſecond contact intérieur, obſervé à Kola...	2.	50.	56
14.	Par le même, obſervé à Gurief................	2.	50.	$58\frac{1}{2}$
15.	Par le même, obſervé à Orenburg..............	2.	50.	52
16.	Par le même, obſervé à Pékin................	2.	50.	$57\frac{1}{4}$
17.	Par le même, obſervé à Manille..............	2.	51.	$0\frac{3}{4}$

De ces dix-ſept réſultats, treize ſont entre 2^h $50'$ $56''$ & 2^h $51'$ $01''$; celui d'Upſal ne s'éloigne pas beaucoup de ces termes, non plus que celui de Taïti. Nous avons vu d'ailleurs que rien n'empêche de diminuer la durée de Taïti, ni d'augmenter celle de la baie d'Hudſon de quelques ſecondes. Quant à Orenburg, M. Krafft dit expreſſément que les bords du Soleil & de Vénus étoient ondulans; il paroît qu'il ne fut bien aſſuré du contact qu'à 19^h $5'$ $8''\frac{1}{2}$, ce qui donneroit 2^h $50'$ $54''\frac{1}{2}$ pour la demi-durée; il ajoute que ſon obſervation du contact extérieur eſt auſſi & même plus certaine que celle du contact intérieur, vu que le ciel étoit beaucoup plus ſerein. Au reſte, ſon obſervation telle

qu'elle eſt, donne une parallaxe qui ne diffère que de quelques centièmes de ſeconde de la parallaxe déterminée par les autres obſervations. En général, qu'on compare ſucceſſivement chacune des demi-durées concluës des obſervations de Paris, Greenwich, Hawkhill, Hernoſand, Stockolm, Upſal & Cajanebourg, avec les demi-durées concluës des obſervations de Kola, Gurief, Orenburg, Pékin & Manille, ſi la ſomme donne préciſément $5^h\ 41'\ 57''\frac{1}{2}$, durée concluë pour Saint-Joſeph, la parallaxe déduite de la durée obſervée à Saint-Joſeph, & combinée avec la durée entre le premier contact intérieur obſervé à Paris, Greenwich, &c. & le ſecond contact intérieur à Kola, Gurief, &c. ſera bien préciſément de 8",81; elle ſera d'un dixième de ſeconde plus forte ou plus foible, ſi la ſomme excède de 11 ſecondes, ou ſi elle eſt de 11 ſecondes au-deſſous de $5^h\ 51'\ 57''\frac{1}{2}$. Par exemple, la demi-durée concluë pour Paris eſt $2^h\ 50'\ 58''$; pour Kola $2^h\ 50'\ 56''$; la ſomme, $5^h\ 41'\ 54''$ eſt de $3''\frac{1}{2}$ moindre que $5^h\ 41'\ 57''\frac{1}{2}$; donc, la durée obſervée à Saint-Joſeph, combinée avec celle qui s'eſt écoulée entre le premier contact intérieur obſervé à Paris, & le ſecond obſervé à Kola, donne 8",78 de parallaxe ſolaire: c'eſt par une marche ſemblable, qu'on a conſtruit la Table ſuivante.

TABLE des Parallaxes concluës de la combinaiſon de l'obſervation de Saint-Joſeph, avec diverſes obſervations Européennes & Aſiatiques.

	Kola.	Gurief.	Orenburg.	Pékin.	Manille.
Paris.	8",78.	8",80.	8",74.	8",79.	8",82.
Greenwich . . .	8,81.	8,83.	8,77.	8,82.	8,85.
Hawkhill.	8,78.	8,80.	8,74.	8,79.	8,82.
Hernoſand . . .	8,77.	8,79.	8,73.	8,78.	8,81.
Stockolm	8,76.	8,78.	8,72.	8,77.	8,80.
Upſal.	8,74.	8,76.	8,71.	8,75.	8,78.
Cajanebourg. . .	8,78.	8,80.	8,74.	8,79.	8,82.

Si l'on tentoit de faire une opération semblable, relative aux autres observations Américaines, celle de Taïti donneroit une parallaxe moindre de cinq centièmes de seconde seulement; celle de la baie d'Hudson, donneroit au contraire une parallaxe plus forte d'un quart de seconde: ce n'est pas que celle-ci soit si prodigieusement défectueuse; mais la baie d'Hudson n'est pas assez avantageusement située pour faire un bon terme de comparaison avec les observations de notre continent.

Je conclus que si l'on met de côté les observations qui portent avec elles quelque caractère décidé d'inexactitude, telles, par exemple, que celle de M. Green à Taïti; celle du dernier contact extérieur à Cajanebourg, & même en général, toute observation de contact extérieur, celle d'Yakoutsk en son entier, & celle du P. Dollières, à Pékin; toutes les autres concourent à prouver l'exactitude de celle du P. Hell, à Wardhus. Donc, de deux choses l'une, ou il faut renoncer à tirer aucune induction du passage de Vénus, arrivé le 3 Juin 1769, ou il faut convenir que *la parallaxe horizontale du Soleil dans ses moyennes distances, est,* à très-peu-près, *de huit secondes huit dixièmes.*

P. S. J'ai dit plus haut, que la prodigieuse différence respective des durées observées de la sortie de Vénus m'apprenoit à me défier de la précision des observations du dernier contact extérieur, sur-tout quand le Soleil est bas & ses bords ondulans. Pour le prouver, je joins ici une Table de la durée calculée & de la durée observée de la sortie de Vénus. Les deux premières colonnes contiennent les noms des Observateurs & des lieux où ils ont observé; la dernière montre l'erreur de la durée observée trop courte si l'erreur est affectée du signe —, trop longue si l'erreur est précédée du signe +. On voit, par cette Table, que si quelques Observateurs ont observé une durée moindre que la durée calculée d'un petit nombre de secondes seulement, ce n'a été que dans des lieux où la hauteur de Vénus étoit au moins de 10 degrés. Quant à ceux qui ont trouvé à la

ſortie plus de durée qu'elle ne devoit en avoir, il eſt probable qu'ils ſe ſont trompés dans l'obſervation du ſecond contact intérieur. Dans le calcul de la durée, on a ſuppoſé la parallaxe du Soleil, de 8″,5 ; ſi on eût ſuppoſé 8″,8, la durée calculée auroit été un peu plus longue à Taïti ; preſque la même à Saint-Joſeph, plus courte par-tout ailleurs. On peut encore conclure, ſi l'on veut, de cette Table, que la méthode de déterminer le diamètre de Vénus par la durée de ſa ſortie, quoiqu'excellente dans la théorie, eſt incertaine dans la pratique, & que par conſéquent des combinaiſons fondées ſur la connoiſſance préciſe de ce diamètre ne peuvent donner un réſultat bien certain.

TABLE des durées calculées & obſervées de la ſortie de Vénus.

NOMS des OBSERVATEURS.	LIEUX des OBSERVATIONS.	DURÉE calculée.	DURÉE obſervée.	ERREUR de l'Obſervat.
Le P. Hell. . . .	Wardhus.	18′ 20″,4	18′ 18″,8	— 1″,6
M. Mohr	Batavia.	18. 20,8	18. 18,0	— 2,8
Le P. Collas . . .	Pékin.	18. 8,5	18. 5,0	— 3,5
M. Lowitz	Gurief	18. 20,1	18. 11,0	— 9,1
M. Borgrewing. .	Wardhus.	18. 20,4	18. 9,8	— 10,6
Le P. Sajnovics..	Wardhus.	18. 20,4	18. 8,8	— 11,6
L'Abbé Chappe..	Saint-Joſeph . . .	18. 43,8	18. 28,8	— 15,0
M. Wales.	Baie d'Hudſon. .	18. 30,5	18. 15,7	— 15,0
Le P. Mayer. . .	Péterſbourg. . . .	18. 22,9	17. 56,3	— 26,6
M. de Ronas. . .	Manille.	18. 13,1	17. 41,0	— 32,1
M. Green.	Taïti	18. 46,6	18. 11,0	— 35,6
M. Euler . . . . . M. Lexell.	Péterſbourg. . . .	18. 22,9	17. 43,0	— 39,9
Le P. Stahl. . . .	Péterſbourg. . . .	18. 22,9	17. 40,0	— 42,9
M. Médina. . . .	Saint-Joſeph . . .	18. 43,8	17. 58,5	— 45,3
M. Doz.	Saint-Joſeph . . .	18. 43,8	17. 53,5	— 50,3
M. Cook	Taïti	18. 46,6	17. 49,0	— 57,6
M. Dymond. . .	Baie d'Hudſon. .	18. 30,5	18. 31,7	+ 1,2
M. Krafft	Orenburg	18. 18,7	18. 28,0	+ 9,3
M. Ch. Euler . .	Orsk	18. 19,0	18. 31,0	+ 12,0
Le P. Dollieres .	Pékin.	18. 8,5	18. 36,0	+ 27,5

MÉMOIRE
CONTENANT LES OBSERVATIONS DE LA SECONDE COMÈTE
Qui a paru en 1760, & qui est la cinquantième dont l'orbite ait été calculée;
Faites à l'Observatoire de la Marine à Paris, depuis le 26 Janvier au matin jusqu'au 18 Mars au soir.

Par M. MESSIER.

23 & 30 Mai 1772.

CE n'a été que par hasard que l'on a découvert la plupart des Comètes qui ont été observées jusqu'à présent, lorsqu'elles n'étoient point attendues; mais pour les découvrir à la vue simple, il falloit qu'elles se distinguassent des Étoiles ou par la différence de leur lumière, ou par les circonstances qui accompagnent ordinairement les Comètes, comme sont leurs queues ou leurs chevelures. C'est aussi par un pareil hasard, quoique plus rarement, que l'on a pu découvrir des Comètes dans le commencement de leur apparition, avec des lunettes, lorsque l'on ne pouvoit pas encore les apercevoir à la vue simple: ce fut ainsi que M. Kirch le père découvrit le premier la Comète de 1680, qui fut ensuite une des plus célèbres que l'on ait observées jusqu'à présent, & dont Newton & Halley se sont servis si avantageusement pour s'assurer de la vraie théorie des Comètes: ce fut le 14 Novembre 1680, à 4 heures & demie du matin que M. Kirch découvrit cette Comète à Cobourg en Franconie, en parcourant avec une lunette de deux pieds, qui découvroit un espace d'environ 3 degrés, l'endroit du Ciel où se trouvoit alors la planète de Mars & le cœur du Lion; il aperçut avec cette lunette un petit nuage blanchâtre, qu'il jugea d'abord

être une Comète, & qu'il put enſuite voir à la vue ſimple, comme une fort petite Étoile ſituée entre la planète de Mars & *Regulus*, ſans aucune apparence de queue.

C'eſt à peu-près ce qui m'arriva le 26 Janvier 1760, en me ſervant d'une lunette d'un pied pour examiner la ſituation de pluſieurs petites Étoiles, dont quelques-unes m'avoient ſervi de terme de comparaiſon pour la célèbre Comète de 1759, le 1.er de Mai; mon deſſein étoit de déterminer enſuite la poſition de ces Étoiles par obſervation, pour mieux conſlater le lieu du noyau de la Comète pour ce même jour: je n'avois été engagé à ce travail que parce que ma détermination du lieu de cette Comète pour le 1.er Mai, n'étoit pas d'accord avec les déterminations des autres Aſtronomes. Ce fut donc en examinant cette partie du ciel, le 26 Janvier 1760, que je découvris, à 1 heure du matin, une nouvelle Comète qui paroiſſoit à la lunette d'un pied comme une Étoile nébuleuſe d'une étendue aſſez conſidérable: je reconnus que ce ne pouvoit être qu'une Comète qui commençoit à paroître, parce que je ſavois qu'il n'exiſtoit pas de nébuleuſe de cette grandeur dans cette partie du ciel que je connoiſſois parfaitement, y ayant obſervé la Comète de 1759, pendant pluſieurs jours. La nouvelle Comète paroiſſoit près de la baſe de la Coupe, entre α de cette conſtellation & ν de l'Hydre: je la conſidérai enſuite avec un téleſcope Newtonien de 4 pieds & demi de longueur, je vis au milieu de la nébuloſité, une lumière plus forte qui formoit un noyau aſſez bien terminé; j'eſtimai que ſon diamètre devoit avoir environ 30 ſecondes de degré; l'ayant comparé à l'épaiſſeur apparente de l'un des fils du micromètre qui étoit adapté à cet inſtrument, la chevelure en étoit peu ſenſible; mais vue à la lunette d'un pied, qui étoit fort claire, & qui ne groſſiſſoit pas beaucoup, on la voyoit beaucoup mieux; il y avoit une traînée de lumière de 3 degrés environ de longueur, dirigée vers l'Occident, qui paſſoit au-deſſus d'une Étoile de ſeptième grandeur, dont le lieu n'étoit pas encore connu, j'en déterminai la poſition; ſon aſcenſion

droite étoit de $158^d\ 56'\ 27''$, & sa déclinaison de $14^d\ 0'\ 23''$ australe; c'est l'Étoile n.° 21 de la seconde Table des Étoiles qui est à la suite de ce Mémoire. On ne pouvoit voir la Comète à la vue simple au moment où je la découvris; vers son passage au Méridien on l'apercevoit, mais ce n'étoit pas sans difficulté.

Comme la Comète étoit voisine du Méridien qu'elle n'avoit pas encore passé, je me préparai à l'y observer avec les petites Étoiles voisines & avec ν de l'Hydre, à un télescope newtonien de trois pieds environ de longueur, solidement posé dans le plan du méridien, & garni d'un micromètre à fils, avec lequel on pouvoit observer avec exactitude les différences d'ascension droite & des déclinaisons des plus petites Étoiles. La Comète passa au Méridien, à cet instrument, à $2^h\ 11'\ 29''$ du matin, temps vrai, ou le 25 Janvier à $14^h\ 11'\ 29''$, temps astronomique: la Comète étoit à l'orient de l'étoile ν de l'Hydre, de $1^d\ 29'\ 34''$, & plus septentrionale de $32'\ 52''$. En supposant l'ascension droite de l'étoile ν pour le temps de l'observation, de $159^d\ 27'\ 7''$, & sa déclinaison, de $14^d\ 56'\ 38''$, on a la position de la Comète à son passage au Méridien; savoir, $160^d\ 56'\ 41''$ pour l'ascension droite, & $14^d\ 25'\ 46''$ pour sa déclinaison australe. Je comparai ensuite le noyau de la Comète hors du Méridien à une Étoile que j'estimai être de septième grandeur, dont le lieu n'étoit pas encore déterminé: les jours suivans, j'observai cette Étoile au Méridien, & de son passage, j'ai déduit l'ascension droite & la déclinaison; c'est l'Étoile n.° 22 de la seconde Table de ce Mémoire.

On trouvera, à la suite de ce Mémoire, deux Tables avec leur explication; la première contiendra les positions de la Comète observées; & la seconde Table, celle des Étoiles qui auront servi à sa détermination: ainsi, je ne rapporterai d'abord que l'historique de mes observations.

Ciel couvert la nuit du 26 au 27 Janvier, & les nuits suivantes jusqu'à celle du 28 au 29: le 29, vers les 4 heures

du matin, je vis la Comète dans les intervalles des nuages, elle paroiſſoit dans le voiſinage des étoiles trente-neuvième & quarante-unième du Sextant, ſuivant Flamſteed; tandis que je préparois l'inſtrument pour comparer la Comète à ces Étoiles, le ciel ſe couvrit, bientôt après, il tomba une grande quantité de pluie, & il ne fut pas poſſible de déterminer ſa poſition.

La nuit du 29 au 30, le ciel en grande partie couvert; vers les 4 heures du matin, il devint paſſablement ſerein; je vis la Comète & je comparai le noyau à pluſieurs Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore connus, je les obſervai au Méridien les jours ſuivans; de leurs paſſages, j'ai déduit leurs aſcenſions droites & déclinaiſons, ce ſont les Étoiles n.os 19 & 20 de la ſeconde Table, l'une & l'autre de ſeptième grandeur.

Depuis le 30 Janvier matin juſqu'au 4 Février, le ciel fut continuellement couvert, mais la nuit du 4 au 5, le ciel étant devenu ſerein vers les 9 heures du ſoir, je recherchai la Comète que je trouvai ſans peine près du cœur du Lion, quoique la Lune fût levée & dans le voiſinage de la Comète; ſon noyau étoit conſidérable ſans être terminé, environné d'une nébuloſité qui avoit peu d'étendue & d'une lumière très-foible. Je comparai le noyau de la Comète à l'étoile vingt-deuxième du Lion, qui ſe trouvoit dans la première édition du Catalogue de Flamſteed, & qu'il marque de ſeptième grandeur; j'obſervai enſuite cette Étoile au Méridien, pour en conclure avec plus de ſoin ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon, on trouvera ſa poſition dans la ſeconde Table; de cette poſition, j'ai déduit celle du noyau de la Comète. Je reconnus, par ces obſervations, que la Comète avoit paſſé l'Équateur depuis pluſieurs jours.

La nuit du 5 au 6, le ciel couvert juſqu'à minuit, il devint ſerein enſuite, on voyoit la Comète à la vue ſimple, elle paroiſſoit comme une Étoile de quatrième grandeur; le noyau vu à la lunette étoit conſidérable ſans être terminé, environné d'une foible nébuloſité. Je comparai le noyau de la Comète

à une

à une Étoile de sixième grandeur dont le lieu n'étoit pas encore déterminé, c'est l'Étoile n.° 17 de la seconde Table; je déterminai son lieu par plusieurs passages au Méridien, en la comparant avec *Regulus*, qui étoit peu éloigné de cette Étoile: je comparai aussi la Comète directement à *Regulus*, l'observation fut faite dans un grand crépuscule qui éclairoit favorablement les fils du micromètre.

La nuit du 6 au 7, le ciel passablement serein; vers les 7 heures du soir, je vis la Comète près de l'horizon, l'on ne pouvoit la voir que difficilement à cause des vapeurs, mais ensuite à une plus grande hauteur, on la vit très-bien. Dès les 8 heures je comparai le noyau à l'étoile *ν* du Lion, que Flamsteed, dans son Catalogue, marque de cinquième grandeur, la Comète étoit sur le parallèle de cette Étoile. Après minuit, je répétai ces mêmes observations, & avec l'étoile vingt-troisième de la même constellation; les comparaisons de la Comète avec cette dernière Étoile furent douteuses, à cause d'un léger nuage qui ne laissoit voir que difficilement le noyau de la Comète: ces deux Étoiles furent ensuite observées au Méridien, & leur position calculée pour le temps de ces observations. La Comète fut aussi comparée la même nuit à une Étoile de septième grandeur, dont le lieu n'étoit pas encore connu; je déterminai sa position en l'observant au Méridien avec *Regulus:* c'est l'étoile n.° 13 de la seconde Table.

Beau temps la nuit du 7 au 8, & sans Lune jusqu'à minuit; on voyoit distinctement la Comète à la vue simple, sa lumière paroissoit égale à celle de l'étoile *η* du Lion, de troisième grandeur; son noyau, vu au télescope, n'étoit pas terminé, & il paroissoit moins grand que les jours précédens, environné d'une foible nébulosité; à la lunette d'un pied, la queue paroissoit distinctement, longue de plusieurs degrés, dirigée vers l'étoile O, qui est placée dans une des pattes du Lion. Je comparai le noyau de la Comète vers les 9 heures du soir à une Étoile de septième grandeur que j'observai ensuite au Méridien: c'est l'étoile n.° 11 de la seconde Table.

Après minuit, la Comète passa au Méridien avec *Regulus*.

La nuit du 8 au 9 Février, ciel serein, la queue de la Comète paroissoit distinctement à la lunette d'un pied; elle étoit dirigée à l'étoile ψ du Lion, qui est placée près de l'Écliptique; sa longueur étoit de 4 degrés. Je comparai le noyau de la Comète à la huitième étoile du Lion, que Flamsteed, dans son Catalogue, estime de sixième grandeur. La Comète passa au Méridien, ainsi que *Regulus*, après minuit.

Ciel serein la nuit du 9 au 10; la Comète paroissoit avec la même lumière que les jours précédens, sa queue parut augmentée, je l'estimai de 5 degrés de longueur; elle étoit dirigée aux deux Étoiles qui sont près d'une des pattes du Lion, la septième & la onzième de cette constellation, suivant l'ordre qu'elles ont dans le Catalogue de Flamsteed. Je comparai le noyau de la Comète à une Étoile de sixième grandeur, dont le lieu n'étoit pas encore déterminé, je la déterminai par son passage au Méridien: c'est l'Étoile n.° 10 de la seconde Table. J'observai ensuite le passage de la Comète au Méridien avec celui de *Regulus*.

Par les précédentes observations, j'ai trouvé que l'opposition de la Comète au Soleil s'étoit faite le 8 de ce mois (Février) vers $15^h 37'$ de temps moyen, dans $19^d 55'$ du Lion: la Comète ayant $3^d 47'$ de latitude boréale apparente, vue de la Terre.

Le ciel fut couvert la plus grande partie de la nuit du 10 au 11 Février; entre 5 & 6 heures du matin le ciel étant devenu en grande partie serein, je vis la Comète que je comparai à l'étoile qui est la vingtième du Lion, suivant le Catalogue de Flamsteed, & de sixième grandeur; pour être certain de la position de cette Étoile, je l'observai au Méridien.

Le 11, ciel serein jusque vers les 11 heures du soir; pendant ce temps je ne fis aucune observation pour déterminer le lieu du noyau de la Comète, espérant d'observer son passage au Méridien, & de la comparer avec l'étoile λ

qui eſt dans la gueule du Lion; mais le ciel ſe couvrit après 11 heures & reſta couvert le reſte de la nuit, ce qui empècha de faire les obſervations que je m'étois propoſées.

La nuit du 12 au 13, ciel ſerein une partie de la nuit; la Comète ſe voyoit encore à la vue ſimple, mais ſa lumière étoit extrêmement affoiblie, ſa queue étoit moins apparente que les jours précédens; le noyau égaloit encore en lumière l'étoile λ du Lion, près de laquelle la Comète étoit placée: je comparai le noyau à cette Étoile, de même qu'à l'étoile ε de la même conſtellation: j'obſervai auſſi le paſſage de la Comète au Méridien avec κ du Lion & les Étoiles précédentes; on ne pouvoit voir la Comète au Méridien qu'avec peine, ſa lumière étant extrêmement affoiblie, & la détermination en eſt un peu douteuſe.

Ciel couvert, la nuit du 13 au 14 Février; le 14 en partie ſerein juſqu'à 10 heures du ſoir, je comparai la Comète à l'étoile κ du Lion. En obſervant la Comète ce ſoir-là, j'aperçus vers les 8 heures le commencement d'une Aurore boréale, qui ſe forma au nord-oueſt, & qui s'étendit vers le nord; elle devint aſſez conſidérable pour répandre une grande lumière à l'horizon; elle s'élevoit en diminuant juſqu'à la hauteur de 45 degrés; elle paroiſſoit à l'horizon d'une lumière très-claire, comme ſi la Lune, dans ſon plein, venoit de s'y coucher: à 10 heures le ciel ſe couvrit, ce qui empêcha d'obſerver plus long-temps ce phénomène.

Ciel couvert, la nuit du 15 au 16, de même que du 16 au 17; cependant le 16, entre 9 & 10 heures du ſoir, je vis la Comète à travers un nuage rare qui en diminuoit ſenſiblement les apparences, je remarquai qu'elle étoit en ligne droite avec les étoiles λ & κ de la tête du Lion, & qu'elle formoit en même temps un triangle iſoſcèle avec les étoiles κ du Lion & τ de l'Écreviſſe.

Ciel aſſez beau la nuit du 17 au 18; la Comète vue à la lunette ſe voyoit encore très-bien; mais elle ne pouvoit plus être aperçue à la vue ſimple: la queue n'étoit plus apparente à la lunette, & le noyau ne paroiſſoit que comme un point

lumineux environné d'une légère nébulosité. Je comparai la Comète à τ de l'Écreviſſe, & j'obſervai dans la ſuite pluſieurs fois cette Étoile au Méridien pour en déduire exactement l'aſcenſion droite & la déclinaiſon.

Depuis le 17 Février juſqu'au 20 du même mois, le ciel fut couvert; la nuit du 20 au 21 vers les dix heures du ſoir, il fut en partie ſerein; je comparai le noyau de la Comète à une Étoile de ſeptième grandeur qui n'étoit pas encore connue, & j'en déterminai la poſition en l'obſervant au Méridien, c'eſt l'Étoile n.° 7 de la ſeconde Table: vers les onze heures la Comète fut encore comparée à la même Étoile, en aſcenſion droite ſeulement.

La nuit du 22 au 23, je comparai le noyau de la Comète à la quarantième étoile du Lynx, qui eſt placée à l'extrémité de la queue, & que Flamſteed dans ſon Catalogue marque de quatrième grandeur. La poſition de cette Étoile fut conſtatée par pluſieurs de ſes paſſages au Méridien les jours ſuivans.

Les mauvais temps qui ſurvinrent enſuite, & la lumière de la Lune ne permirent plus de revoir la Comète avant le 4 de Mars; je la recherchai ce même jour avant le lever de la Lune dans l'endroit du ciel où elle devoit ſe trouver, ſuivant mes précédentes obſervations; après bien des recherches je la trouvai environnée de pluſieurs Étoiles; mais il ne fut pas poſſible de la comparer à aucune; je pris la configuration de la Comète, avec les Étoiles qui l'environnoient & je remis au jour ſuivant l'obſervation que j'en devois faire pour reconnoître ſon lieu.

Le ciel fut entièrement ſerein & ſans Lune la nuit du 5 au 6 de Mars, j'obſervai la Comète au Méridien aſſez imparfaitement à cauſe de la foibleſſe de ſa lumière, elle y paſſa après neuf heures un quart du ſoir; j'obſervai auſſi au Méridien le paſſage de l'Etoile η de la grande Ourſe: de ces obſervations j'ai déduit la poſition de la Comète; cette détermination eſt un peu douteuſe: vers minuit je comparai de nouveau le noyau de la Comète à une Étoile de ſixième

grandeur dont le lieu n'étoit pas encore connu : je déterminai ſa poſition en l'obſervant pluſieurs fois au Méridien avec κ du Lion & n de la grande Ourſe, c'eſt l'Étoile n.° 6 de la ſeconde Table.

La nuit du 6 au 7, je comparai le noyau de la Comète à une Étoile de ſeptième grandeur qui n'étoit pas encore connue, j'en déterminai la poſition en l'obſervant au Méridien avec κ du Lion, c'eſt l'Étoile n.° 2 de la ſeconde Table de ce Mémoire.

Le ciel entièrement ſerein la nuit du 7 au 8 de Mars, la Comète fut comparée à la même Étoile que dans l'article précédent.

La nuit du 8 au 9, j'obſervai la Comète au Méridien avec l'Étoile n de la grande Ourſe, vers onze heures & demie, je comparai le noyau de la Comète hors du Méridien à la même Étoile que les deux jours précédens, n.° 2 de la ſeconde Table.

Ciel couvert la nuit du 9 au 10 de Mars, celle du 10 au 11 le ciel en partie ſerein : j'obſervai la Comète au Méridien avec une Étoile de ſixième grandeur, dont le lieu n'étoit pas encore déterminé, c'eſt l'Étoile n.° 6 de la ſeconde Table.

Je revis la Comète la nuit du 11 au 12, mais il ne fut pas poſſible d'en déterminer le lieu par obſervation à cauſe d'un brouillard qui effaçoit preſque toute ſa lumière.

La nuit du 12 au 13, j'obſervai le paſſage de la Comète au Méridien avec celui de l'Étoile trente-unième du Lynx, que Flamſteed, dans ſon Catalogue marque de cinquième grandeur : j'ai déduit la poſition de cette Étoile priſe de ce Catalogue pour le temps de cette obſervation ; les déterminations de la Comète déduites de ſon paſſage au Méridien ſont bonnes.

Ciel couvert la nuit du 13 au 14 de Mars, & en partie couvert pendant celle du 15 au 16 ; cependant vers les neuf heures du ſoir, je vis la Comète, & je comparai le noyau à une Étoile de huitième grandeur que j'obſervai enſuite au Méridien, avec la trente-unième étoile du Lynx : de ces

obſervations j'en ai déduit la poſition en aſcenſion droite & en déclinaiſon, c'eſt l'Étoile n.° 1 de la ſeconde Table.

Ciel ſerein la nuit du 16 au 17, je revis la Comète qui n'avoit pas fait beaucoup de mouvement depuis la veille, on ne pouvoit plus l'apercevoir au téleſcope qu'avec beaucoup de difficulté, & ce ne fut pas ſans peine que je pus la comparer à la même Étoile de l'article précédent n.° 1.er de la Table.

Ciel couvert la nuit du 17 au 18, mais pendant celle du 18 au 19 de Mars le ciel fut aſſez ſerein, je recherchai la Comète avec le téleſcope, & ce ne fut pas ſans peine que je pus la revoir : ſa lumière étoit conſidérablement affoiblie & preſqu'éteinte, je comparai encore le noyau à la même Étoile que dans les deux obſervations précédentes, n.° 1.er, & ce fut ma dernière obſervation de cette Comète. Depuis la nuit du 18 au 19 juſqu'à celle du 23 au 24 de Mars le ciel fut continuellement couvert; les jours ſuivans la Lune parut en même-temps que la Comète ſur l'horizon, ce qui empêcha de la revoir: après que la Lune n'y apporta plus d'obſtacle, je la recherchai dans l'endroit du ciel où elle devoit être ſuivant mes dernières obſervations, mais il ne fut pas poſſible de l'apercevoir: ainſi c'eſt au 18 de Mars que ſe ſont terminées mes obſervations ſur cette Comète.

Les deux Tables qui accompagnent ce Mémoire, repréſentent toutes les obſervations de cette Comète, & en même-temps comprennent les Étoiles qui ont ſervi à ſa détermination. La première de ces Tables eſt deſtinée pour la Comète, en voici l'explication : la première colonne contient les jours du mois; la ſeconde les temps vrais de chaque obſervation; la troiſième les aſcenſions droites de la Comète, obſervées; la quatrième les déclinaiſons de la Comète ; la cinquième les différences de paſſages ou d'aſcenſions droites entre la Comète & les Étoiles; elles ſont marquées du ſigne — ſi la Comète précédoit, ou ſi elle étoit à l'occident de l'Étoile, & du ſigne + ſi elle ſuivoit l'Étoile ou ſi elle étoit orientale; cette différence étant ajoutée à l'aſcenſion droite de l'Étoile

à laquelle la Comète aura été comparée & qu'on trouvera dans la ſeconde Table, ou en étant ſouſtraite ſuivant le ſigne qui l'affecte, on en déduit l'aſcenſion droite de la Comète. La ſixième colonne contient les différences en déclinaiſon entre la Comète & les Étoiles; ces différences ſont, de même que les précédentes, affectées des ſignes + & — pour qu'en les ajoutant ou les ſouſtrayant ſuivant le ſigne de la déclinaiſon de l'Étoile, avec laquelle la Comète a été comparée, on ait ſa déclinaiſon. La ſeptième colonne détermine la grandeur des Étoiles. La huitième contient les lettres de Bayer & les numéros qui diſtinguent, tant les Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore déterminés, que celles du Catalogue de Flamſteed. La dernière colonne fait connoître les conſtellations auxquelles appartiennent ces différentes Étoiles.

La ſeconde Table contient les aſcenſions droites & les déclinaiſons des Étoiles pour le temps des obſervations, leurs poſitions ont été tirées du Catalogue de Flamſteed, & je les ai vérifiées pour la plupart en obſervant ces Étoiles au Méridien. Je n'ai fait d'autre réduction à l'aſcenſion droite & à la déclinaiſon de ces Étoiles, que celles qu'on trouve dans les Catalogues ſous le titre de *Variation annuelle.*

On verra par cette ſeconde Table, que le cours de la Comète m'a donné occaſion de déterminer les poſitions de vingt-deux Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore connus dans nos Catalogues, & dont pluſieurs ont ſervi à déterminer les poſitions du noyau de la Comète.

Je joins à ce Mémoire une Carte céleſte que j'ai conſtruite, & qui repréſente la route apparente que la Comète a tenue parmi les Étoiles fixes ſuivant mes obſervations : cette Carte eſt diviſée en degrés d'aſcenſion droite & de déclinaiſon, de manière qu'il ſera aiſé de juger, à l'inſpection de cette Carte, des poſitions de la Comète & des Étoiles auprès deſquelles elle a paſſé : on pourra juger non-ſeulement de la poſition de ces Étoiles, mais encore de leur grandeur, en conſultant le modèle qui eſt au bas de la Carte. J'ai rapporté ſur cette Carte les Étoiles qui appartiennent aux conſtellations de la grande

Ourſe, du Lion, de l'Écreviſſe, de l'Hydre & de la Coupe, & celles qui compoſent les nouvelles conſtellations du Lynx, du petit Lion & du Sextant, tirées du Catalogue Britannique & réduites au temps de l'apparition de cette Comète.

Je rapporterai, en finiſſant ce Mémoire, les élémens de l'orbite de cette Comète, de trois manières différentes; la première colonne a été calculée par M. l'abbé de la Caille, d'après ſes obſervations; la ſeconde par M. Pingré, ſur une partie de mes obſervations que je lui avois communiquées, & ſur celles qu'avoit faites M. le Monnier; la troiſième par M. l'abbé Chappe, a été calculée ſur deux de ſes obſervations & ſur une des miennes, qui eſt celle du 25 Janvier.

ÉLÉMENS.	*Selon M. de la Caille.*	*Selon M. Pingré.*	*Selon M. l'abbé Chappe*
Lieu du nœud aſcendant...........	$4^s\ 19^d\ 39'\ 24''$	$4^s\ 19^d\ 39'\ 41''$	$4^s\ 19^d\ 40'\ 15''$
Inclinaiſon de l'orbite..................	78. 59. 22	79. 6. 38	79. 3. 19
Lieu du périhélie....................	1. 23. 24. 20	1. 23. 34. 19	1. 23. 38. 4
Logarithme de la diſtance périhélie.........	9,902280	9,903844	9,904218
Paſſage au périhélie le 27 Novembre 1759, à...	$2^h\ 28'\ 20''$	$0^h\ 11'\ 57''$	$0^h\ 43'\ 19''$

Temps moyen au Méridien de Paris.

Son mouvement direct, c'eſt-à-dire, ſuivant l'ordre des ſignes.

TABLE

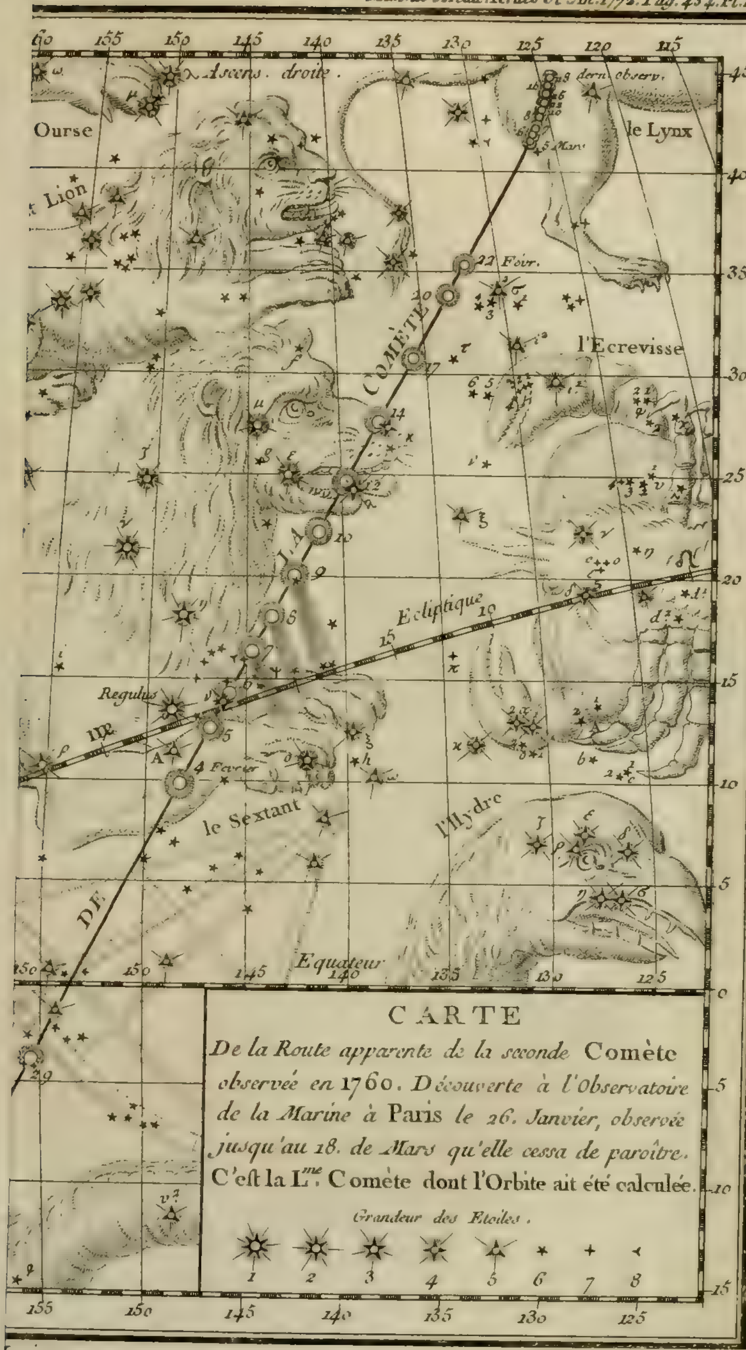
TABLE I.

TABLE des positions apparentes de la seconde Comète observée en 1760, comparée avec les Étoiles fixes depuis le 25 Janvier, jour où elle fut découverte, jusqu'au 18 Mars qu'elle cessa d'être visible aux instrumens.

Là où il y a des astérisques, la Comète a été observée au Méridien avec l'Étoile.

1760.	TEMPS vrai.	ASCENS. droite observée.	DÉCLIN. observée.	DIFFÉRENCE en Ascens. droite par les Étoiles.	DIFFÉRENCE en Déclinaison par les Étoiles.	Grand. des Étoiles.	Lettres de Bayer & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.			
			Australe.					
Janv. 25	14. 11. 29	160. 56. 41	14. 25. 46	1. 29. 34 +	0. 30. 52 —	4	ν	de l'Hydre. *
	15. 27. 40	160. 52. 27	14. 18. 5	0. 27. 10 +	0. 7. 34 +	7	22	déterminée.
29	16. 59. 1	155. 27. 54	3. 55. 41	0. 11. 51 +	0. 11. 18 —	7	19	
	17. 23. 12	155. 26. 36	3. 52. 59	0. 22. 27 —	0. 14. 21 —	7	20	
	17. 38. 36	155. 25. 41	....	0. 23. 22 —	....	7	20	la même.
	17. 41. 41	155. 25. 22	3. 50. 49	0. 23. 41 —	0. 16. 31 —	7	20	
			Boréale.					
Févr. 4	10. 2. 37	148. 21. 10	9. 55. 19	2. 25. 30 +	0. 7. 57 —	7	22	du Lion. 1.re éd. de Flam.
	10. 15. 15	148. 20. 40	9. 56. 9	2. 25. 0 +	0. 7. 7 —	7	22	la même.
	10. 27. 20	148. 19. 55	9. 57. 16	2. 24. 15 +	0. 6. 0 —	7	22	
	11. 55. 7	148. 15. 40	10. 4. 49	2. 20. 0 +	0. 1. 33 +	7	22	
	12. 39. 54	148. 12. 22	10. 9. 43	0. 41. 11 —	2. 58. 15 —	1	α	Régulus. *
5	13. 12. 24	147. 2. 36	12. 22. 50	0. 46. 37 —	0. 24. 44 —	6	17	déterminée.
	13. 16. 10	147. 2. 28	12. 22. 58	0. 46. 45 —	0. 24. 36 —	6	17	la même.
	13. 20. 59	147. 2. 13	12. 23. 8	0. 47. 0 —	0. 24. 26 —	6	17	
	13. 53. 29	146. 59. 51	12. 27. 55	0. 49. 22 —	0. 19. 39 —	6	17	
	13. 59. 44	146. 59. 33	12. 28. 12	0. 49. 40 —	0. 19. 22 —	6	17	
	18. 10. 5	146. 46. 53	12. 49. 31	2. 6. 40 —	0. 18. 27 —	1	α	Régulus.
6	8. 37. 5	146. 5. 31	14. 2. 46	0. 13. 52 —	0. 28. 4 +	5	ν	du Lion.
	8. 39. 41	146. 5. 23	14. 3. 11	0. 14. 0 —	0. 28. 29 +	5	ν	la même.
	8. 41. 59	146. 4. 53	14. 3. 28	0. 14. 30 —	0. 28. 46 +	5	ν	
	14. 5. 6	145. 50. 26	14. 32. 15	0. 23. 0 —	0. 12. 18 —	7	13	déterminée.
	14. 14. 30	145. 50. 11	14. 32. 30	0. 23. 15 —	0. 12. 3 —	7	13	la même.
	14. 36. 28	145. 48. 28	14. 34. 40	1. 17. 45 +	0. 23. 51 +	6	23	du Lion.

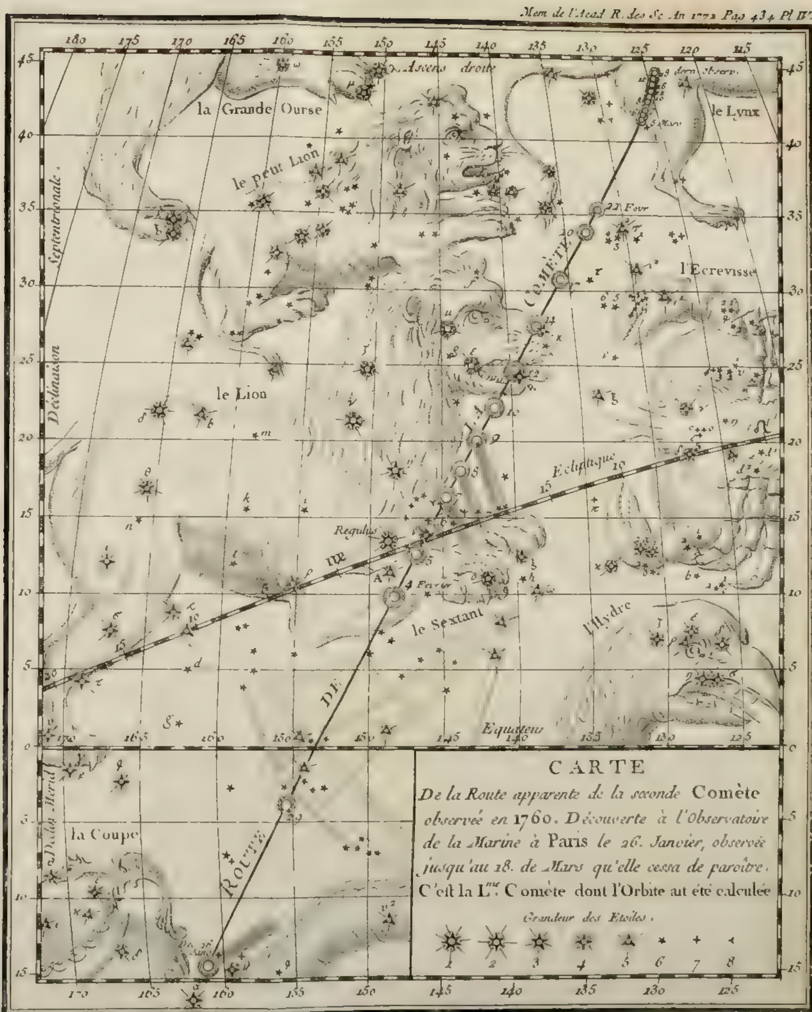
1760.	TEMPS vrai.	ASCENS. droite observée.	DÉCLIN. observée,	DIFFÉRENCE en Ascens. droite par les Étoiles.	DIFFÉRENCE en Déclinaison par les Étoiles.	Grand. des Étoiles.	Lettres de Bayer & N.° des Étoiles	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.			
			Boréale.					
Févr. 7	9. 46. 30	144. 54. 56	16. 8. 28	0. 15. 45 —	0. 16. 55 +	7	11	déterminée.
	12. 14. 22	144. 48. 18	16. 20. 20	4. 5. 15 —	3. 12. 22 +	1	α	Régulus.*
8	8. 49. 27	143. 52. 57	17. 57. 5	2. 56. 0 +	0. 26. 57 +	6	8	du Lion.
	9. 3. 36	143. 52. 12	17. 58. 12	2. 55. 15 +	0. 28. 4 +	6	8	la même.
	12. 6. 8	143. 44. 18	18. 13. 16	5. 9. 15 —	5. 5. 18 +	1	α	Régulus.*
9	8. 38. 52	142. 49. 22	19. 45. 7	0. 3. 5 +	0. 12. 9 —	6	10	déterminée.
	11. 58. 1	142. 41. 26	19. 59. 3	6. 12. 7 —	6. 51. 5 +	1	α	Régulus.*
	12. 41. 13	142. 38. 27	20. 1. 20	0. 7. 50 —	0. 4. 4 +	6	10	la même que ci-dessus.
10	17. 37. 32	141. 24. 31	22. 2. 3	2. 40. 0 —	0. 15. 2 —	6	20	du Lion.
	17. 50. 14	141. 23. 38	22. 3. 29	2. 40. 53 —	0. 13. 36 —	6	20	la même.
12	9. 17. 2	139. 49. 34	24. 33. 3	0. 19. 34 +	0. 32. 8 +	4	λ	du Lion.
	9. 19. 19	139. 49. 26	24. 33. 23	0. 19. 26 +	0. 32. 28 +	4	λ	la même.
	9. 56. 55	139. 47. 55	24. 34. 28	3. 14. 52 —	0. 17. 27 —	3	ε	du Lion.
	11. 34. 21	139. 44. 35	24. 43. 52	2. 5. 0 +	2. 28. 8 —	4	κ	du Lion.*
	12. 34. 52	139. 41. 55	24. 46. 30	3. 20. 52 —	0. 5. 25 —	3	ε	du Lion.
14	9. 46. 23	137. 59. 12	27. 19. 52	0. 19. 37 +	0. 7. 52 +	4	κ	
17	9. 34. 6	135. 30. 18	30. 47. 35	2. 7. 15 +	0. 11. 33 +	6	τ	de l'Écrevisse.
	9. 57. 57	135. 30. 10	30. 48. 39	2. 7. 7 +	0. 12. 37 +	6	τ	la même.
20	10. 10. 39	133. 19. 18	33. 39. 31	0. 1. 25 —	0. 10. 3 +	7	7	déterminée.
	11. 7. 57	133. 18. 21	....	0. 2. 22 —	....	7	7	la même.
22	9. 30. 58	132. 3. 16	35. 15. 6	4. 32. 22 —	0. 8. 36 —	4	40	du Lynx.
Mars 5	9. 17. 9	126. 41. 18	41. 23. 26	4. 33. 15 —	1. 19. 42 —	4	n	de la grande Ourse.*
	11. 55. 2	126. 40. 43	41. 24. 41	3. 32. 19 —	0. 18. 16 +	6	6	déterminée.
6	11. 24. 6	126. 24. 31	41. 45. 38	0. 27. 0 +	0. 26. 23 —	7	2	
7	10. 50. 26	126. 9. 16	42. 2. 39	0. 11. 45 +	0. 9. 22 —	7	2	la même.
	11. 42. 25	126. 8. 53	42. 3. 19	0. 11. 22 +	0. 8. 42 —	7	2	
8	9. 4. 58	125. 54. 11	42. 17. 0	5. 20. 22 —	0. 26. 8 —	4	n	de la Grande Ourse.*
	11. 29. 50	125. 54. 39	42. 18. 33	0. 2. 52 —	0. 6. 32 +	7	2	la même que ci-dessus.
10	8. 56. 0	125. 29. 32	42. 47. 45	4. 43. 30 —	1. 41. 20 +	6	6	la même que ci-dessus.*
12	8. 47. 20	125. 9. 1	43. 13. 9	3. 33. 52 +	0. 43. 21 —	5	31	du Lynx.*
15	10. 14. 58	124. 44. 58	43. 51. 23	0. 12. 41 —	0. 1. 24 —	8	ι	déterminée.
16	10. 4. 26	124. 38. 39	44. 1. 15	0. 19. 0 —	0. 8. 28 +	8	ι	la même.
18	10. 41. 15	124. 29. 39	44. 19. 16	0. 28. 0 —	0. 26. 29 +	8	ι	



CARTE

De la Route apparente de la seconde Comète *observée en* 1760. *Découverte à l'Observatoire de la Marine à* Paris *le 26. Janvier, observée jusqu'au 18. de Mars qu'elle cessa de paroître.* C'est la I.re Comète dont l'Orbite ait été calculée.

Messier.



Gravé par Y. le Gouaz, d'après le dessin de M. Messier.

TABLE II.

Table des Ascensions droites & Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la 2.e Comète observée en 1760, a été comparée; depuis le jour où elle fut découverte le 25 Janvier, jusqu'au 18 Mars qu'elle cessa de paroître; leurs positions sont réduites au temps des Observations.

ASCENS. droite. D. M. S.	DÉCLIN. boréale. D. M. S.	Grand. des Étoiles	Lettres de Bayer & N.os des Étoiles.	ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
121. 35. 9	43. 56. 30	5.	31.	du Lynx, obs. au mérid. avec *n* de l'Ourse & χ du Lion, Com. comp. 12 Mars.
124. 57. 39	43. 52. 47	8.	1.	déterm. obs. au mérid. avec la 31.e du Lynx. Com. comp. les 15, 16 & 18 Mars.
125. 57. 31	42. 12. 1	7.	2.	déterm. obs. au mérid. avec χ du Lion. Com. comp. les 6, 7 & 8 Mars.
126. 14. 41	40. 50. 48	7.	3.	déterminée par son passage au méridien avec *n* de la grande Ourse.
129. 20. 5	42. 11. 5	7.	4.	déterminée de la même manière avec χ du Lion.
129. 42. 15	41. 2. 32	8.	5.	déterminée de même.
130. 13. 2	41. 6. 25	6.	6.	déterm. obs. au mér. avec χ du Lion & *n* de l'Ourse. Com. comp. 5 & 10 Mars.
131. 14. 33	42. 43. 8	4.	n	de la gr. Ourse détermin. par M. de la Caille. Com. comp. les 5 & 8 Mars.
133. 20. 43	33. 29. 28	7.	7.	déterm. obs. au mérid. avec χ du Lion. Com. comp. le 20 Février.
133. 23. 3	30. 36. 2	6.	τ	de l'Écrevisse, prise du catal. de M. de la Caille. Com. comp. le 19 Février.
135. 7. 50	35. 36. 50	6.	8.	déterminée par son passage au méridien avec χ du Lion.
136. 35. 38	35. 23. 42	4.	40.	du Lynx, catal. de M. de la Caille. Com. comp. le 22 Février.
137. 39. 35	27. 12. 0	4.	χ	du Lion, catal. de M. de la Caille. Com. comp. les 12 & 14 Février.
139. 30. 0	24. 0. 55	4.	λ	du Lion, déterminée par M. de la Caille. Com. comp. le 12 Février.
140. 4. 18	24. 31. 20	6.	9.	déterminée par son passage au méridien avec Régulus.
140. 56. 57	17. 30. 8	6.	8.	du Lion, catal. de Flamsteed. Com. comp. le 8 Février.
142. 46. 17	19. 57. 16	6.	10.	détermin. obs. au mérid. avec Régulus. Com. comp. le 9 Février.
143. 2. 47	24. 51. 55	3.	ε	du Lion, catal. de M. de la Caille. Com. comp. le 12 Février.
144. 4. 31	22. 17. 5	6.	20.	du Lion, catal. de Flamsteed. Com. comp. le 10 Février.
144. 30. 43	14. 10. 49	6.	23.	du Lion, même catal. Com. comp. le 6 Février.
145. 10. 41	15. 51. 33	7.	11.	déterm. obs. au mérid. avec Régulus. Com. comp. le 7 Février.
145. 53. 18	15. 51. 47	8.	12.	déterminée obs. au mérid. avec Régulus.
145. 55. 40	10. 3. 16	7.	22.	du Lion, cat. de Flamst. 1.re édit. obs. au mérid. avec Régulus. Com. comp. 4 Févr.
146. 13. 26	14. 44. 33	7.	13.	déterminée obs. au mérid. avec Régulus. Com. comp. le 6 Février.
146. 19. 23	13. 34. 42	5.	ν	du Lion, catal. de M. de la Caille. Com. comp. le 6 Février.
146. 43. 3	16. 1. 16	6.	14.	déterminée par son passage au méridien avec Régulus.
146. 50. 22	16. 1. 0	8.	15.	déterminée de la même manière.
147. 21. 26	15. 43. 14	8.	16.	déterminée de même.
147. 49. 13	12. 47. 34	6.	17.	déterminée de la même manière. Com. comparée le 5 Février.
147. 52. 11	14. 48. 45	7.	18.	déterminée de même.
148. 53. 33	13. 7. 58	1.	α	de Régulus. Comète comparée le 4 Février.
	Australe.			
155. 16. 3	4. 6. 59	7.	19.	déterm. obs. au mérid. avec Régulus. Com. comp. le 29 Janvier.
155. 49. 3	4. 7. 20	7.	20.	déterminée de la même manière. Com. comparée le 29 Janv.
158. 56. 27	14. 0. 23	7.	21.	déterm. qui a servi à mesurer la longueur de la queue le 26 Janvier matin.
159. 27. 7	14. 56. 38	4.	ν	de l'Hydre, catal. de M. de la Caille. Com. comp. le 25 Janvier.
160. 25. 17	14. 10. 31	7.	22.	déterm. obs. au mérid. avec ν de l'Hydre. Com. comp. le 25 Janvier.

OBSERVATIONS SUR DES BÊTES À LAINE PARQUÉES PENDANT TOUTE L'ANNÉE.

Par M. DAUBENTON.

15 Novemb. 1769.

LE parcage des Bêtes à laine, eſt un objet très-important pour l'Agriculture, pour les Manufactures, & pour plusieurs branches de commerce, tant au dehors qu'au dedans du royaume. En faiſant parquer les troupeaux pendant toute l'année, non-ſeulement on augmente le produit des pâturages & des terres en tout genre d'herbes, de grains & de légumes, mais en même temps on rend les bêtes à laine plus robuſtes; & par conſéquent leur laine doit être plus abondante & de meilleure qualité, & leur chair de meilleur goût. On épargne les frais de la conſtruction & de l'entretien des étables, dont la dépenſe, loin d'être utile aux bêtes à laine, leur eſt très-nuiſible, parce qu'en les renfermant dans des étables, on les rend ſujettes à pluſieurs maladies, cauſées par un air échauffé, & chargé de vapeurs alkalines & de l'infection des fumiers, ce mauvais air gâte la laine & altère la chair de ces animaux, au point d'empêcher qu'elle n'ait, ſur nos tables, toutes les bonnes qualités dont elle eſt ſuſceptible.

Pour faire parquer les bêtes à laine pendant toute l'année, il faut avoir deux ſortes de parcs, l'un eſt déjà uſité dans pluſieurs provinces du royaume, où l'on fait parquer les terres pendant la bonne ſaiſon; alors les bêtes à laine paſſent le jour au pâturage & la nuit au parc; mais dans la mauvaiſe ſaiſon on les renferme dans les étables pendant la nuit & même pendant la journée entière, dans les temps de neige, où elles ne peuvent pas aller au pâturage. C'eſt-alors qu'il faut ſubſtituer aux étables un parc domeſtique, c'eſt-à-dire, un parc établi dans le coin d'une cour fermée de murs, pour mettre le troupeau en ſûreté contre les loups, ſans que le

Berger reſte auprès pour les garder, comme dans le parc des champs.

C'eſt du parc domeſtique dont il s'agit principalement dans ce Mémoire. Ordinairement les deux côtés de ce parc peuvent être fermés par les murs de la cour d'une ferme & les deux autres côtés par des claies; les rateliers ſont attachés contre les murs & même contre les claies, s'il eſt néceſſaire pour le nombre des bêtes du troupeau : le terrein du parc doit être diſpoſé en pente pour faciliter l'écoulement des eaux; on le ſable, ſi le ſol eſt de nature à faire de la boue; on balaie le parc tous les jours pour enlever la fiente, que l'on jette dans une foſſe à fumier. Tel eſt le gîte que j'ai trouvé plus convenable aux bêtes à laine, que les étables, par l'épreuve de deux hivers, dont l'un a été remarquable par de fortes gelées & l'autre par des pluies preſque continuelles.

J'ai déjà donné à l'Académie en 1768, le détail d'une première épreuve du parc domeſtique, commencé le 4 de Novembre 1767, ſur un petit troupeau de douze bêtes, qui paſſa tout l'hiver abſolument expoſé à l'air jour & nuit, ſans aucun abri, dans la bergerie que j'ai établie en Bourgogne, près la ville de Montbard; il réſiſta parfaitement aux pluies, aux neiges & à des gelées de 14 degrés & demi ſuivant le thermomètre de M. de Reaumur. Ce troupeau fut plus vigoureux que ceux qui étoient renfermés dans des étables, & il s'eſt maintenu juſqu'à préſent en auſſi bon état & toujours dans le même gîte en plein air.

Il y avoit dans ce petit troupeau deux brebis, elles mirent bas à la fin de Février 1768, par des temps de pluies froides & de gelées; cependant ni les mères ni les agneaux n'en furent malades, au contraire ces agneaux ont ſurpaſſé, à tous égards, ceux qui étoient nés & qui furent élevés dans des étables. Je mis dans ce troupeau, au mois de Décembre, un mouton qui m'arriva de Perpignan avec d'autres bêtes à laine, il étoit alors âgé de cinq ans, & il avoit toujours été logé dans des étables bien chaudes, comme les troupeaux du Rouſſillon, cependant un ſi grand changement de climat & de gîte ne lui fit aucun mal.

Ces circonſtances, jointes aux ſuccès de ma première épreuve ſur le parc domeſtique, ſubſtitué aux étables, me convainquirent qu'il étoit plus convenable aux bêtes à laine, & me déterminèrent à laiſſer en plein air, l'hiver ſuivant, non-ſeulement les bêtes que j'avois des races de l'Auxois & du Rouſſillon, mais encore d'autres, des races de Flandre, d'Angleterre & de Maroc.

De quatre-vingts bêtes à laine, des races d'Auxois & de Rouſſillon, & de races mêlées, aucune ne fut malade pendant l'hiver: il y avoit auſſi dans le parc en plein air, trente-cinq bêtes à laine de Maroc, de Flandre & de race angloiſe, dont la plupart étoient foibles, languiſſantes, maigres, fatiguées du voyage qu'elles venoient de faire, ou malades de galle, de vers à la poitrine, de pourriture, &c. & dans l'état de dépériſſement qui les auroit fait rejeter, avant l'hiver, des troupeaux ordinaires, que l'on tient dans des étables: cependant il n'en a péri qu'une ſeule durant l'hiver, tandis qu'il mouroit un très-grand nombre de bêtes à laine dans le canton de Bourgogne, où ma bergerie eſt ſituée. Ces bêtes avoient dans la trachée-artère & dans les bronches, une multitude de vers qui n'étoient pas plus gros que des fils, mais qui avoient juſqu'à trois & quatre pouces de longueur: je les ai vus dans l'animal dont je viens de faire mention, qui étoit mort de cette maladie, & dans un très-grand nombre d'autres bêtes à laine, mortes de la même maladie dans la ville de Montbard & dans les villages circonvoiſins: il a péri plus de la moitié d'un troupeau de cinq cents bêtes, dans le village de Villiers, qui n'eſt diſtant de ma bergerie que d'un tiers de lieue.

Cependant au milieu de cette mortalité, parmi les bêtes à laine de l'Auxois, celles de la même race, qui étoient parquées jour & nuit en plein air dans ma bergerie, ſe ſont toutes maintenues en très-bon état; un troupeau, importé du Rouſſillon, s'eſt conſervé pendant tout l'hiver. Parmi les bêtes qui étoient venues de Normandie, de Flandre & de Maroc, preſque toutes celles qui n'étoient pas tout-à-fait

exténuées, ou assez gravement malades pour être gardées dans une infirmerie, ont résisté à toutes les injures de l'air, & se sont peut-être mieux soutenues en plein air, qu'elles n'auroient fait dans des étables: le plein air ne leur ayant point fait de mal, leur aura vraisemblablement fait du bien en les fortifiant.

Il faut que l'air ait tout son ressort, pour maintenir l'élasticité qui fait la force des fibres du corps des animaux; ceux qui sont assez bien vêtus, pour résister en tout temps aux injures de l'air, ont toujours plus de force & de vigueur que les animaux renfermés dans des étables, où l'air perd son ressort par la chaleur & par les exalaisons de leurs corps & de leurs excrémens. Cette force que mes troupeaux ont reçue du plein air, les a mis en état de résister aux brouillards, aux pluies & aux neiges, qui se sont succédés les uns aux autres, presque continuellement, pendant l'hiver dernier. Les pluies ont été si longues & si abondantes que j'ai souvent trouvé les bêtes à laine, mouillées jusqu'à la peau sur le dos.

Cependant il faut aussi observer que les bêtes exténuées par la fatigue, du long voyage qu'elles venoient de faire par mer & par terre, ont été mieux nourries que les troupeaux de bêtes à laine ne le sont ordinairement; mais toutes celles que j'ai eues de l'Auxois & du Roussillon, n'ont eu pour nourriture que de la paille & seulement une livre de foin chaque jour, dans les temps où la rigueur de la saison les empêchoit de trouver de la pâture à la campagne.

On sera plus disposé à croire que les troupeaux de bêtes à laine peuvent rester en France, pendant l'hiver, jour & nuit, en plein air, sans aucun abri, lorsqu'on saura ce que je vais rapporter des agneaux de ma bergerie, qui sont nés & qui ont été élevés dans le même parc où leurs mères ont passé l'hiver.

J'ai déjà fait mention, dans le Mémoire que j'ai lû à l'Académie en 1768, de deux agneaux qui étoient nés à la fin du mois de Février de la même année, & qui furent élevés en plein air avec leur mère, dans un parc domestique. L'un de ces agneaux fut exposé à des pluies froides

pendant les premiers jours de ſa vie; l'autre éprouva des gelées quelques jours après ſa naiſſance. Ces agneaux étoient les ſeuls que j'euſſe mis à cette épreuve dans l'hiver de l'année 1768; ils ont toujours été plus vigoureux que ceux qui avoient été renfermés dans des étables, & ils le ſont encore à préſent, de même que leurs mères & les autres bêtes du petit troupeau qui eſt reſté continuellement en plein air depuis le 4 de Novembre 1767.

Dans l'hiver dernier, les agneaux de ma bergerie ont commencé à naître en plein air dès le 14 de Janvier. Douze brebis du pays agnelèrent ſucceſſivement depuis ce jour juſqu'au 4 de Mars; la plupart de leurs agneaux ont été expoſés à des épreuves ſi rudes que j'aurois eu peine à les croire capables d'y réſiſter, ſi je n'en avois moi-même été témoin. Les brebis agnelèrent au milieu du parc pendant les pluies froides de l'hiver; d'autres mirent bas tandis qu'il neigeoit, ou qu'il faiſoit de grands vents de nord ou de nord-eſt très-froids & très-piquans, ou tandis qu'il geloit. Les agneaux nouveaux-nés étoient mouillés de la pluie, ou couverts de floccons de neige en ſortant du ventre de la mère; ils ſe trouvoient gîſans ſur la neige, ou ſur un terrein glacé, ou détrempé par l'eau du dégel qui eſt peut-être pire que la glace. Cependant les injures de l'air n'ont jamais fait aucun mal aux mères, ni aux agneaux; il n'en eſt mort aucun, tandis que dans les étables du voiſinage, à une lieue à la ronde, il eſt mort beaucoup de brebis & près de la moitié des agneaux qui y ſont nés: je m'en ſuis aſſuré par un état que j'ai fait faire des agneaux qui ſont nés cette année, & de tous ceux qui ſont morts dans treize paroiſſes & cinq fermes autour de ma bergerie: il y eſt né 3045 agneaux, & il en eſt mort 1480 avant le mois d'Avril, & certainement il en eſt mort pluſieurs depuis. Ceux de ma bergerie ſont tous vivans & très-vigoureux, de même que les mères.

Il faut obſerver que ces brebis qui ont agnelé ſi heureuſement, & dont les agneaux ſe ſont maintenus en ſi bon état, avoient toutes été alliées à des béliers de race étrangère

&

& ſupérieure à la leur par la grandeur de la taille. Or, il eſt certain qu'une brebis fécondée par un bélier beaucoup plus grand qu'elle, a un fœtus auſſi plus grand que ſi elle avoit eu un bélier de ſa taille. Ce fœtus conſomme plus de nourriture dans la matrice; la brebis eſt plus ſujette à l'avortement; elle met bas plus difficilement, & l'agneau tire plus de lait que s'il avoit été produit par un petit bélier. Cette différence de grandeur des béliers étoit conſidérable, car ceux qui ont été alliés avec les brebis de ma bergerie avoient vingt-quatre à vingt-huit pouces de hauteur, priſe au garrot, tandis que les béliers du pays n'ont que vingt à vingt-deux pouces.

Malgré ces obſtacles tout a parfaitement réuſſi par rapport aux brebis de la race du pays & à leurs agneaux. On ne peut pas attribuer ce ſuccès à la nourriture qui a été donnée aux mères, car les brebis étrangères qui ſont dans ma bergerie ont été auſſi bien nourries & même mieux que celles du pays; cependant de vingt-huit agneaux qu'elles ont produits il en eſt mort ſept avant le mois d'Avril, ce qui fait un quart; mais en ajoutant à ces vingt-huit agneaux de brebis étrangères les douze qui ſont nés de brebis du pays, c'eſt en tout quarante agneaux dont il n'eſt mort que ſept : ce n'eſt donc qu'un peu plus de la ſixième partie des agneaux nés & élevés en plein air dans ma bergerie qui a péri avant le mois d'Avril, tandis qu'il eſt mort près de la moitié des agneaux nés dans les étables aux environs de ma bergerie, à une lieue à la ronde.

Cette différence étoit déjà une preuve que les injures de l'air n'avoient pas fait périr les agneaux morts dans ma bergerie; mais pour en être plus ſûr, je les diſſéquai afin de reconnoître la cauſe de leur mort. Je diſſéquai auſſi trente-ſix agneaux morts dans les étables des environs de ma bergerie : de ces trente-ſix agneaux, dix-huit étoient morts de faim; il n'y avoit point d'alimens dans les eſtomacs, ni de matières dans les inteſtins, ou il ne s'y trouvoit qu'une liqueur gluante, bleuâtre ou jaunâtre. Onze étoient morts, parce que des égagropiles avoient fermé le pylore, ces égagropiles ſont formées

par des filets de laine que les agneaux avalent & qui se pelotonnent dans leur dernier estomac. Lorsqu'une de ces pelotes s'engage dans l'orifice qui communique de cet estomac dans les intestins, les alimens n'y peuvent plus passer. Un des dix-huit agneaux dont il s'agit étoit mort d'une suppuration à la poitrine; un autre avoit dans la trachée-artère du lait qu'on lui avoit fait avaler & qui l'avoit suffoqué. Je n'ai pas pu connoître la cause de la mort des cinq autres.

Des sept agneaux qui ont péri dans ma bergerie, trois étoient morts de faim, un autre de suppuration à la poitrine, un autre avoit été suffoqué par du lait qu'on lui avoit fait avaler; je n'ai pas pu connoître la cause de la mort de l'un de ces sept agneaux, & un autre n'a pas été disséqué.

L'objet de ce Mémoire, & le temps prescrit pour la durée de sa lecture, ne m'ont pas permis de rapporter ici ce que je crois que l'on peut faire pour empêcher qu'il ne meure tant d'agneaux dans les bergeries. Il me suffit de faire voir, par des preuves tirées des observations anatomiques, que les injures de l'air n'ont pas plus contribué à la mort des agneaux qui ont péri dans ma bergerie qu'à celle des agneaux qui sont morts dans des étables. D'ailleurs ces agneaux qui ont péri en plein air, ne sont pas morts dans les jours les plus froids; ils ne sont pas morts plusieurs à la fois, comme cela seroit arrivé pour les plus jeunes ou les plus foibles, si le froid avoit causé leur mort.

Au reste, je ne sais pas jusqu'à quel degré les agneaux ou les bêtes à laine plus âgées peuvent supporter le froid. J'ai seulement eu l'occasion d'observer en 1768, que des gelées de 14 degrés $\frac{1}{2}$ n'avoient point fait de mal à des troupeaux où il y avoit des agneaux de neuf & de dix mois, & des bêtes de différens âges au-dessus. J'ai vu, dans l'hiver dernier, qu'un agneau né le 20 Janvier fut exposé à 5 degrés $\frac{1}{8}$ de froid le second jour de sa vie, à 3 degrés $\frac{1}{2}$ le troisième jour, & à 5 degrés $\frac{3}{4}$ le quatrième jour: cet agneau s'est toujours maintenu jusqu'à présent en très-bon état. Peut-être que l'hiver prochain donnera lieu à des épreuves plus fortes;

mais cela ne me paroît pas néceſſaire par rapport aux agneaux, parce que je crois que dans les pays où l'hiver eſt rigoureux, il ne convient pas qu'il naiſſe des agneaux guère avant le mois de Mars. En Flandre on ne donne le bélier aux brebis qu'au 15 Septembre; en Angleterre, le temps de la naiſſance des agneaux eſt communément depuis la fin de Février juſqu'à celle du mois d'avril, & l'on remarque qu'ils ſont beaucoup plus robuſtes & plus aiſés à élever lorſqu'ils naiſſent en Avril; l'uſage de ne permettre l'accouplement que dans le mois d'Octobre, s'introduit en Suède. On fait cependant pluſieurs objections contre cet uſage; elles me paroiſſent mal fondées: je me propoſe de les diſcuter ailleurs, comme un ſujet important pour le bien des troupeaux.

En Angleterre on laiſſe les agneaux dans les champs avec leur mère en quelque temps qu'ils naiſſent; mais lorſqu'ils ſont malades, on les tranſporte dans les maiſons. Ellis, dans ſon Livre qui a pour titre: *le Guide des Bergers*, rapporte que les agneaux qui naiſſent dans les champs lorſque la ſaiſon eſt bien rigoureuſe & qu'il y a beaucoup de neige, en ſouffrent quelquefois à un tel point, qu'à peine donnent-ils quelque ſigne de vie. Alors on les enveloppe; on les réchauffe à un feu doux; on leur donne une petite cuillerée d'eau de genièvre. Quelquefois on les met dans un four qui a été un peu chauffé avec de la paille, on les y laiſſe juſqu'à ce qu'ils ſoient ranimés; enſuite on leur donne une cuillerée de lait chaud. On continue de les nourrir ainſi pendant quelques jours près du feu, juſqu'à ce qu'ils aient aſſez de force pour être rendus à leur mère & pour les téter dans une grange ou ſous un appenti, &c.

Ce petit récit peut faire juger du ſoin que l'on a des bêtes à laine en Angleterre. Nous ne ſavons que trop combien elles ſont négligées en France. Auſſi nous ſentons de plus en plus la néceſſité de multiplier ces animaux & de relever leurs races dégénérées. On commence à revenir du faux préjugé qui a fait croire que le ſol & le climat de la France n'étoient pas auſſi favorables pour les bonnes qualités des laines, que le ſol

& le climat des Royaumes voiſins, dont les laines ſont ſi recherchées pour les manufactures. Cette erreur ne s'eſt ſoutenue qu'autant que l'on a négligé en France de faire des tentatives pour perfectionner les laines. Pourquoi n'auroit-on pas d'auſſi bonnes laines en France qu'en Eſpagne & en Angleterre? Le climat de la France eſt moins chaud que celui de l'Eſpagne, & l'on ſait que la grande chaleur eſt nuiſible aux bêtes à laine. Le climat de la France eſt moins humide que celui de l'Angleterre, & l'on ſait auſſi que l'humidité eſt encore plus nuiſible aux bêtes à laine que la grande chaleur. On peut donc eſpérer de faire en France des laines auſſi bonnes & peut-être meilleures qu'en Eſpagne & en Angleterre; je me le perſuade de plus en plus depuis deux ans que je fais des expériences dans cette vue ſur des troupeaux parqués en plein air pendant toute l'année. J'ai allié des brebis du pays avec des béliers de race ſupérieure, & dès la première génération j'ai vu ſur des bêtes de quatorze à quinze mois des progrès plus ſenſibles que je ne l'eſpérois pour la quantité & la qualité de la laine. Ces progrès devant augmenter avec l'âge des bêtes à laine, il n'eſt pas encore temps de juger du plein effet de ces expériences; mais j'en ſuis déjà aſſez ſatisfait pour exhorter les bons citoyens qui s'occupent de l'économie ruſtique, à faire des tentatives pour l'amélioration des troupeaux: ils feront leur propre bien en faiſant celui de la Patrie.

PASSAGE DE MERCURE SUR LE SOLEIL,

*Obſervé dans l'*ÎLE DE JAVA *&* en PENSILVANIE *le 9 Novembre 1769.*

Par M. DE LA LANDE.

8 Avril 1772.

LE Paſſage de Mercure ſur le Soleil, arrivé en 1769, eſt le treizième que l'on ait obſervé juſqu'à préſent; il n'a pu être vu en Europe, mais il l'a été en quatre endroits à l'Orient & à l'Occident, c'eſt-à-dire dans l'Amérique & dans les Indes; & il étoit utile de joindre le réſultat de ces obſervations combinées, avec celui des douze autres paſſages de Mercure. Il n'y a pas long-temps que les Tables de cette Planète ſont devenues aſſez parfaites pour que ces phénomènes puiſſent être prédits avec exactitude; les paſſages de Mercure ſur le Soleil, nous ont ſervi à corriger les Tables; ils nous ſervent maintenant à en vérifier la perfection.

La première obſervation que j'ai reçue de ce treizième paſſage, m'a été envoyée par M. Hennert, Profeſſeur de Mathématiques à l'Univerſité d'Utrecht, elle avoit été faite à Batavia dans l'île de Java par M. Mohr, Miniſtre de la Religion proteſtante; on l'a publiée depuis en Hollandois, dans le *Tome XI* des Mémoires de l'Académie de Harlem, & enſuite en Anglois dans les Tranſactions philoſophiques de 1771.

Le contact intérieur de la ſortie arriva le 9 Novembre 1769, à $19^h\ 33'\ 32''$ temps vrai, & la ſortie totale ou le contact extérieur à $19^h\ 35'\ 11''$, la durée de la ſortie étant de $1'\ 39''$, cette obſervation fut faite avec un téleſcope grégorien de 3 pieds $\frac{1}{2}$; le temps vrai avoit été déterminé avec une pendule de Shelton & un quart-de-cercle de 2 pieds $\frac{1}{2}$

fait en Angleterre, que M. Mohr a fait venir pour sa curiosité & son usage.

La Latitude australe de Batavia est, suivant M. Mohr, de 6^d 12′ ou à peu-près, car il n'a pas encore donné le détail de ses observations à ce sujet; mais la Latitude n'influe pas sensiblement sur l'objet de ce Mémoire. Quant à la Longitude elle nous étoit presque totalement inconnue, mais le passage de Vénus observé par M. Mohr, avec les mêmes instrumens, m'a mis à portée de la trouver de la manière suivante.

Le commencement de la sortie de Vénus ou le second contact intérieur, est arrivé le 3 Juin 1769, à 20^h 30′ 13″, & le second contact extérieur à 20^h 48′ 31″, la durée de la sortie 18′ 18″ est un peu plus petite que celle qu'on m'a envoyée de Pékin, ce qui peut faire soupçonner quelques secondes d'erreur dans une des deux phases, mais je présume que M. Mohr aura pris pour contact intérieur le moment où les bords de Vénus & du Soleil auront été confondus & réunis circulairement, au lieu de prendre la formation du ligament ou point noir que j'ai décrit & expliqué dans un autre Mémoire, & qu'on ne prévoit pas, à moins qu'on n'ait une certaine habitude dans les observations Astronomiques.

Pour déduire de cette observation du passage de Vénus, la Longitude de Batavia, j'ai calculé l'effet de la parallaxe, en supposant celle du Soleil de 8″$\frac{1}{2}$ dans les moyennes distances, comme je l'avois déterminée par beaucoup d'autres observations combinées; j'ai trouvé qu'il falloit ôter 4′ 51″ du contact intérieur observé, pour le réduire au centre de la Terre; en sorte qu'il faut le supposer à 20^h 25′ 22″. J'en ôte la demi-durée géocentrique du passage entre les deux contacts intérieurs, que j'ai trouvée par un grand nombre d'observations, 2^h 50′ 54″, & il me reste pour le milieu du passage à Batavia 17^h 34′ 28″. Suivant les observations faites à Paris & réduites au centre de la Terre dans les mêmes hypothèses; le milieu est arrivé à 10^h 36′ 35″: donc il y a 6^h 57′ 53″ entre le méridien de Batavia & celui de Paris, ce qui donne la Longitude de Batavia 124^d 28′ 15″,

en supposant 20 degrés pour la Longitude de Paris, suivant l'usage de nos Géographes françois.

L'observation de Mercure étant réduite par ce moyen au méridien de Paris, donne $12^h 35' 39''$; j'ai calculé pour ce temps-là, par mes Tables, la Longitude de Mercure vue du Soleil $1^f 18^d 24' 25''$, la latitude héliocentrique $20' 39''$, l'anomalie vraie $5^f 13^d 21' 47''$, l'anomalie excentrique $159^d 10' 52''$, le mouvement horaire héliocentrique vrai sur l'orbite de Mercure $15' 21'',4$ & $1' 51'',9$ en Latitude, par la méthode que j'ai expliquée dans les Mémoires de 1762, & qui est aussi détaillée dans mon Astronomie, *art. 2057.*

Le mouvement horaire du Soleil étant de $2' 31'',0$, j'en ai conclu le mouvement relatif $12' 51'',7$, sur une orbite relative inclinée de $8^d 19' 2''$; le mouvement vu de la Terre devient $5' 56'',7$ sur l'orbite, & $51'',7$ en Latitude croissante; l'inclinaison relative étant toujours de $8^d 19' 2''$.

Le lieu du Soleil pour le même instant étoit $7^f 17^d 56' 23''$, sa distance 98922, celle de Mercure au Soleil 31270, & à la Terre 67652; ainsi la parallaxe de Mercure étoit de $12'',56$; celle du Soleil de $8'',59$: il faut en trouver l'effet pour l'observation de Mercure que je viens de rapporter.

J'ai trouvé l'inclinaison de l'orbite relative de Mercure sur le parallèle à l'Équateur de $24^d 31'$, la hauteur du Soleil $23^d 16'$, l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison $90^d 35'$ du côté du pôle méridional, qui est à Batavia le pôle élevé; de-là il suit que Mercure parut sortir à Batavia $3^d 25'$ seulement au-dessus du diamètre horizontal du Soleil, & que l'accourcissement produit sur la distance par une différence de parallaxes horizontales $3'',97$ n'est que $0'',22$ sur la ligne tirée du centre de Mercure au centre du Soleil; cela ne fait que 3 secondes de temps, en sorte que le contact, vu du centre, a dû arriver à $12^h 35' 36''$, temps vrai compté au méridien de Paris.

Il faut encore y ajouter la demi-durée de la sortie, pour avoir celle du centre; je suppose pour cela le diamètre du

Soleil, de 32′ 19″, & non pas de 32′ 23″,8 comme dans mes Tables; j'ai expliqué ailleurs la cause de cette diminution, qui me paroît avoir lieu dans les Éclipses de Soleil, comme dans les passages de Vénus & de Mercure, & qui est un effet de l'irradiation de la lumière.

Je suppose le diamètre de Mercure de 8″,22, comme il a été mesuré immédiatement ce jour-là dans la Pensylvanie, & la plus courte distance 7′ 34″, & je trouve les demi-durées du passage pour la somme & pour la différence des demi-diamètres 2^h 24′ 55″, & 2^h 23′ 22″; en sorte que le diamètre de 8″,22 employoit 1′ 33″ à entrer ou à sortir; cela ne diffère que de 6 secondes de la durée observée par M. Mohr. Ajoutant donc 46 secondes à la sortie du premier bord, on a 12^h 36′ 22″, pour la sortie du centre de Mercure vue du centre de la Terre, au méridien de Paris; c'est 2 secondes plus tôt que suivant l'annonce que j'en avois donnée dans la Connoissance des Temps de 1769, d'après mes Tables de Mercure.

Ce passage de Mercure fut encore observé à Manille, 7^h 54′ 5″ à l'orient de Paris, & à 14^d 36′ 8″ de latitude, par M. Veron, Astronome intelligent & laborieux, & l'un de mes Élèves, dont j'avois sollicité l'embarquement à bord du Vaisseau de M. de Bougainville, qui a fait le tour du monde avec lui, & qui est mort aux Indes, en retournant pour faire de nouvelles observations; *voyez le Nécrologe de 1774.* Il observa le premier contact intérieur de la sortie à 8^h 29′ 54″; le dernier contact ou sortie totale, à 8^h 31′ 24″, en sorte que la durée de la sortie fut de 1′ 30″; d'où il conclud le diamètre de 8″,9, & la conjonction à 6^h 16′ 49″, avec 7′ 26″ de latitude, par un milieu entre trois observations des passages par le champ d'une lunette. M. le Gentil se propose de publier le détail de ces observations de M. Veron, qu'il a rapportées des Indes en 1771.

On ne pouvoit observer dans les Indes que la sortie de Mercure, mais l'entrée a été vue en Amérique, & l'observation est rapportée dans les *Transf. Philos. de 1770, page 504.*

La

La Société Philoſophique Américaine, établie à Philadelphie pour l'avancement des Connoiſſances utiles, & dont M. Franklin eſt Préſident, avoit chargé pluſieurs perſonnes d'obſerver ſpécialement le paſſage de Mercure, il y en eut quatre qui ſe raſſemblèrent à Norriton; ſavoir, M. Smith, Prevôt du Collége de Philadelphie; M. Lukens, Arpenteur général de la province de Penſylvanie; M. Rittenhouſe & M. Biddle. Le premier ſe ſervoit d'un téleſcope de 2 pieds $\frac{1}{2}$, qui groſſiſſoit deux cents fois; le ſecond, d'une lunette de 42 pieds, qui groſſiſſoit cent quarante fois; le troiſième, d'une lunette de 36 pieds, qui avoit à peu-près la même force *(Philoſ. Tranſ. 1769, page 289)*; le quatrième aidoit aux autres Obſervateurs.

La première apparence de l'entrée de Mercure ou du contact extérieur parut à $2^h\ 35'\ 17''$ pour tous les trois Obſervateurs, ſans qu'ils ſe communiquaſſent rien; le contact intérieur, à $2^h\ 36'\ 35''$ pour M. Smith & M. Rittenhouſe, & $2^h\ 36'\ 33''$ pour M. Lukens.

Le diamètre du Soleil, meſuré avec le micromètre objectif achromatique monté ſur le téleſcope, parut de $32'\ 20'',2$; & le diamètre de Mercure, de $8'',22$, en employant le mouvement du micromètre en deſſous & en deſſus, ce qui donnoit le double du diamètre de Mercure dans ce paſſage.

Il fut auſſi obſervé à Philadelphie, $4^h\ 51'\ 19''$ à l'oueſt de Paris, à $39^d\ 56'\ 54''$ de latitude.

	Contact extérieur.	*Contact intérieur.*
M. le Docteur Williamſon.......	$2^h\ 36'\ 5''$	$2^h\ 37'\ 30''$
M. Shippen..................	2. 36. 12	2. 37. 40
M. Evans....................	2. 36. 9	2. 37. 38
M. Ewing....................	2. 36. 9	2. 37. 30

Tranſactions of the American Philoſophical Society held at Philadelphia, T. I, p. 83.

On meſura pluſieurs fois à Norriton la diſtance de Mercure au bord du Soleil, & les paſſages au fil horizontal & au fil vertical *(Philoſ. Tranſ. 1770, page 506)*; mais il me ſuffit

d'employer le contact intérieur pour le comparer avec la ſortie à Batavia, que j'ai rapportée ci-deſſus.

La diſtance du Méridien de Norriton à celui de Paris, déduite de neuf obſervations des ſatellites de Jupiter, eſt de 5h 10′ 50″ *(Philoſ. Tranſ. 1769, p. 304)* ou 5h 10′ 47″ *(Tranſ. of the Americal Philoſophical Society)*; ainſi le contact intérieur eſt arrivé à 3h 47′ 25″ au Méridien de Paris. Le Soleil avoit alors 22d 3′ de hauteur, ſous une latitude de 40d 10′; l'effet de la parallaxe étoit de 3″,45 ſur la diſtance de Mercure au centre du Soleil, ce qui répond à 39 ſecondes de temps; ajoutant donc ces 39 ſecondes de temps à l'obſervation, & ôtant 46″ pour la demi-durée de l'entrée, ou à l'entrée du centre de Mercure, vu du centre de la Terre, temps vrai au Méridien de Paris, 7h 47′ 18″, plus tard de 30 ſecondes que ſuivant les calculs de la Connoiſſance des Temps de 1769. Le milieu du paſſage, conclu des deux obſervations, ſe trouve à 10h 11′ 50″, temps vrai, & diffère ſeulement de 14 ſecondes de mon calcul; il n'en différeroit que de 4 ſecondes, ſi l'on ſuppoſoit que le contact intérieur à Batavia a dû être obſervé 20 ſecondes plus tôt, comme cela eſt vraiſemblable. Quoi qu'il en ſoit, ces 14 ſecondes de temps ne font pas 1″ ½ ſur la Longitude de Mercure, à raiſon de 5′ 57″ par heure; en ſorte qu'il ne peut rien y avoir à changer dans la conjonction de Mercure, que j'avois annoncée pour le 9 Novembre 10h 22′ 50″ du ſoir à 7ſ 17d 50′ 49″ de longitude, avec 7′ 39″ de latitude géocentrique boréale.

La durée du paſſage n'ayant point été obſervée dans le même endroit, il ne ſeroit pas naturel de l'employer à trouver rigoureuſement la plus courte diſtance des centres & la latitude de Mercure; cependant la demi-durée du paſſage du centre de Mercure, 2h 23′ 46″, étant réduite en arc de l'orbite, donne 14′ 14″,7, ce qui ſuppoſe 7′ 29″ pour la plus courte diſtance, en employant 16′ 5″6, pour la différence des demi-diamètres. Le diamètre du Soleil étant plus petit que je ne l'avois ſuppoſé dans la Connoiſſance des

Temps, doit donner une perpendiculaire plus petite, & cependant elle ne diffère que de 5 secondes de celle que j'avois annoncée dans la Connoissance des Temps, de 7′ 34″.

Je n'ai pas eu égard, dans ce calcul, à l'inégalité des distances & du mouvement de Mercure dans l'espace de $4^h 48'$ qu'a duré le passage, parce qu'il est évident que des observations faites en Amérique & aux Indes, & employées ainsi concurremment, ne peuvent donner une si grande précision. D'ailleurs la seule conséquence que j'aie voulu tirer de ce Mémoire, est que l'accord de mes nouvelles Tables de Mercure avec cette observation, est tel qu'on ne sauroit y faire aucune correction; quand on trouveroit quelques secondes de plus ou de moins, la conséquence seroit encore la même, puisque les observations, non plus que les calculs, ne comportent pas encore une semblable précision.

On voit, par l'exactitude de mes Tables de Mercure, combien on peut compter sur le calcul que j'ai donné dans mon *Astronomie*, de tous les passages de Mercure qui doivent arriver jusqu'en 1894, & qui ont été faits sur mes Tables, par M. Trébuchet. Ceux de 1776 & 1782 se trouveront calculés plus en détail & sur les mêmes Tables, dans le *VII.e volume des Éphémérides*, que je publierai incessamment; ils ont été faits par M. Libour, Professeur de Mathématiques à l'École royale Militaire.

MÉMOIRE

Dans lequel on fait voir que de France à Canton, par le Nord-eſt, les voyages ſeroient preſqu'auſſi longs qu'ils le ſont par le Cap de Bonne-eſpérance.

Par M. LE GENTIL.

On ne ſe propoſe pas d'examiner dans ce Mémoire, ſi ce qu'on a dit juſqu'ici de la réalité du paſſage par le Nord-eſt, pour aller en Chine, eſt bien ou mal fondé: je ſuppoſe que ce paſſage exiſte pendant un mois ou cinq ſemaines au plus dans l'année ; c'eſt-à-dire , pendant une partie des mois de Juillet & d'Août; avec cette reſtriction, qu'il doit y avoir des années dans leſquelles ce paſſage s'ouvre & ſe ferme un peu plus tôt ou un peu plus tard.

Cela poſé, je dis qu'un Vaiſſeau qui feroit le voyage à Canton en Chine par ce paſſage , & en reviendroit par le même paſſage, ſeroit dix - ſept à dix - huit mois dans ce voyage.

Or les voyages en Chine par le cap de Bonne-eſpérance ne ſont, en y comprenant les relâches, que de dix-ſept à dix-huit mois; on ne gagneroit donc rien d'aller en Chine par le Nord; eſſayons de développer cette idée.

De quelque côté qu'on entre dans les mers de Chine, on ne le peut faire qu'à la faveur des vents de mouſſon.

Ces vents y ſont réglés comme ils le ſont dans les mers de l'Inde; c'eſt-à-dire, qu'ils ſoufflent de l'Oueſt au Sud-oueſt, & au Sud depuis la mi-Mai juſqu'à la mi-Octobre; & le reſte de l'année ils ſoufflent du Nord au Nord-eſt & à l'Eſt. Ils règlent le temps auquel les Vaiſſeaux doivent arriver à Canton, & en ſortir.

Les Vaiſſeaux arrivent en Chine en Août & Septembre; & en repartent au plus tard dans les premiers jours de Février.

Cette mousson, dont je parle, n'est pas uniquement renfermée dans les mers de Chine; elle s'étend encore au-delà de l'île Formose, jusqu'aux mers du Japon.

Les Hollandois, à Batavia, les seuls Européens qui envoient au Japon un Vaisseau, & qui consentent d'être insultés une fois tous les ans par les Japonnois, pour jouir sur nous de l'avantage d'avoir des ouvrages du Japon, observent avec une très-grande exactitude, de faire partir ce Vaisseau dans la force de la mousson de l'Ouest, pour qu'il puisse doubler le cap Bajador des Philippines, & sortir du canal que forment ces Isles & les côtes de Chine. Ce Vaisseau revient du Japon à Batavia à la faveur de la mousson du Nord-est.

Les *Sommes chinoises,* ces bâtimens si peu faits pour tenir le vent, qui de tous les Vaisseaux des mers Orientales ont le plus besoin des moussons, prennent bien garde de ne pas entreprendre de voyages contre mousson. Il va tous les ans d'Émouy à Manille plusieurs de ces *Sommes;* elles arrivent toutes au plus tard en Avril, & repartent toujours de Manille à la fin d'Août ou dans les premiers jours de Septembre. Sans cette précaution, elles ne gagneroient jamais Émouy, dont la position à l'entrée du canal, en défend l'approche à tout Vaisseau venant des mers de Chine ou de celle de Manille, pendant la saison des vents de Nord-est.

D'après ces règles, qui sont sûres & invariables, je suppose qu'un Vaisseau ait débouché du passage du Nord à la mi-Août, il ne peut pas entrer dans les mers de Chine, par le cap Bajador, avant le mois de Septembre, que la mousson de l'Ouest n'ait tout-à-fait changé, & que celle de l'Est souffle en sa place. Ce Vaisseau arrivé à Canton, sera obligé d'y rester jusqu'à la mi-Mai de l'année suivante, à se consommer en frais; car il ne peut sortir pour regagner les mers du Japon, qu'au retour de la mousson de l'Ouest. Il ne restera donc à ce Vaisseau que deux mois au plus pour se rendre à l'entrée du passage du Nord; & si malheureusement il est contrarié pendant ces deux mois, il court le plus grand risque de ne pouvoir arriver à temps au passage, & de le trouver fermé.

Or, je dis qu'il peut être contrarié; parce qu'au-delà du 40.e degré de latitude, ſoit boréale, ſoit auſtrale, les vents ſont variables, comme l'on ſait, & ſoufflent même plus ſouvent du Nord-oueſt au Sud-oueſt que de tout autre point de l'horizon; or, les vents d'Oueſt & de Nord-oueſt, très-bons pour aller, ſeroient ſouvent contraires dans le retour; mais en ſuppoſant que le Vaiſſeau ſoit favoriſé, il ne peut ſe débarraſſer du paſſage, & être rendu en France avant la fin de Septembre; il doit en être parti, au plus tard, dans les premiers jours de Mai de l'année précédente; ce qui fait dix-ſept mois complets, abſtraction faite des évènemens.

Les vaiſſeaux François qui vont à Canton par le cap de Bonne-eſpérance, partent dans les premiers jours de Janvier, & ſont de retour à la fin de Juin de l'année ſuivante; ce qui fait dix-huit mois; mais il en faut rabattre près de deux mois que la relâche de l'Iſle de France fait perdre à ces Vaiſſeaux.

Si la néceſſité d'approviſionner les Iſles de France & de Bourbon n'avoit décidé la Compagnie des Indes à faire paſſer ſes Vaiſſeaux de Chine par ces Iſles; ces Vaiſſeaux auroient une relâche plus à leur portée; celle du cap de Bonne-eſpérance, qu'on rencontre ſur la route, ſans être obligé de ſe détourner, où l'on trouve toutes ſortes de bons rafraîchiſſemens, & où il ſuffiroit de reſter quinze jours en relâche.

Ils pourroient encore, au lieu de relâcher au Cap, tirer leurs rafraîchiſſemens du détroit de la Sonde. De ces deux façons, il ſuffiroit que ces Vaiſſeaux partiſſent de France dans le mois de Février ou de Mars; le voyage, en ce cas, ne ſeroit plus que de quinze ou ſeize mois, abſtraction faite des évènemens; alors les voyages par le Nord-eſt ſeroient plus longs d'environ un mois ou un mois & demi.

Si on m'objecte que ce Vaiſſeau que je ſuppoſe être allé en Chine par le Nord, reviendroit en France par le cap de Bonne-eſpérance, & que par conſéquent la longueur du voyage ne ſeroit plus que de quatorze mois ou un peu plus, & que loin de perdre un mois ou un mois & demi, comme je le ſuppoſois il n'y a qu'un moment, on le gagneroit au

contraire; je répondrai qu'il n'est pas bien sûr que ce Vaisseau, arrivant en Chine dans le mois de Novembre, peut-être même vers la fin de ce mois, pût y terminer ses affaires avant la mi-Janvier, temps auquel il faut qu'il parte de Chine (s'il veut relâcher quelque part) pour doubler le cap de Bonne-espérance; mais je suppose qu'il fût effectivement en état de faire voile de Canton du 15 au 20 de Janvier, & qu'il abrégeât par ce moyen le voyage d'un mois, ou de 40 jours; je demande si ce mois peut être mis en balance avec les dangers & les risques inévitables dans la navigation par le Nord; & s'il seroit prudent d'y faire passer deux Vaisseaux riches de plus de trois millions, comme le sont nos Vaisseaux de Chine.

La navigation par le cap de Bonne-espérance est si sûre, que le Marin le plus médiocre en sait assez pour conduire un Vaisseau en Chine, & pour ramener ce Vaisseau en France en bon état.

Par le Nord, le Marin le plus habile & le plus expérimenté sur mer, ne seroit pas trop bon pour conduire un Vaisseau en Chine; mais quand on réussiroit à faire ce voyage, il est toujours certain qu'il seroit presqu'aussi long que si l'on continuoit l'ancienne route, en allant par le cap de Bonne-espérance; & c'est ce que je m'étois proposé de prouver.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES FAITES À SENONES,

Chef-lieu de la Principauté de S. A. S. le Prince Louis régnant de Salm-Salm.

Pendant les mois de Septembre, Octobre & Novembre 1772,

Par M. MESSIER.

LES vacances de notre Académie me déterminèrent à faire un voyage dans ma patrie: je partis de Paris le 22 du mois d'Août, portant avec moi plusieurs instrumens pour m'occuper d'Observations astronomiques; savoir, une lunette achromatique à double objectif de cinq pieds de foyer, faite à Paris par M. de Lestang, appartenante à M. le Président de S* *; une lunette ordinaire de trois pieds & demi, garnie d'un micromètre, & qui me servoit aux observations des Comètes; une lunette de nuit de deux pieds, un valet qui sonnoit les secondes, un baromètre portatif, un thermomètre à esprit-de-vin, suivant les principes de M. de Reaumur, & une excellente montre à secondes. J'espérois de trouver à Senones un demi-cercle à lunettes de quinze pouces de diamètre, que j'avois procuré au Prince il y avoit deux ans, pour lever la carte de sa Principauté. A mon arrivée je trouvai le Prince absent, & le demi-cercle l'avoit suivi dans son voyage. Sans quart-de-cercle, mes instrumens devenoient inutiles. Je m'informai si je n'en trouverois pas dans la province; je m'adressai à l'abbaye de Senones, & à celle de Moyenmoutier; enfin ayant été informé que l'Éclipse de Soleil de 1764 avoit été observée à Nanci, j'écrivis en cette ville, & j'y fis même un voyage pour apprendre si l'Académie établie dans cette ville n'auroit pas en sa possession un de ces instrumens: je m'adressai à M. le Chevalier de Solignac, Secrétaire

Secrétaire perpétuel de l'Académie, homme aimable, instruit & de la meilleure société, connu depuis long-temps dans la République des Lettres, aimé & chéri de ses confrères, ainsi que de ceux qui avoient l'avantage de le connoître; j'étois autant flatté de faire sa connoissance, que de profiter de ses lumières: quoiqu'âgé alors de quatre-vingt-huit ans, sa mémoire & ses connoissances se ressentoient peu de ce grand âge; il s'occupoit encore avec zèle & assiduité aux exercices de son Académie, prononçant des Discours de rentrées publiques, & y rendant compte de ses ouvrages. Je devois à cet illustre Académicien ce tribut de louange si bien mérité par son travail, la candeur de son caractère & le fruit que l'Académie de Nanci recueilloit encore de ses travaux académiques *.

Le Chevalier de Solignac me donna un ordre adressé à M. l'Abbé Marquet, Bibliothécaire de l'Académie. Ce Corps possède environ quatre mille volumes, distribués dans plusieurs chambres qui tiennent à la Salle d'Assemblée, & qui est rendue publique. M. l'Abbé Marquet me fit voir un demi-cercle; après l'avoir monté & examiné, je reconnus qu'il étoit très-propre pour l'objet de mes observations; je le transportai avec moi à Senones : ce demi-cercle étoit fait avec soin, construit à Paris, par Canivet, ayant un pied de diamètre, les lunettes seize pouces de longueur, le limbe divisé de demi-degré en demi-degré, & le nonius attaché à la lunette mobile divisoit le demi-degré, de deux minutes en deux minutes

Pour la vérification de ce demi-cercle, je plaçai l'instrument dans le plan vertical, la lunette mobile mise horizontalement, répondoit à 90 degrés; j'avois tracé dans cette direction à un mur qui étoit en face, à cent pieds de distance, une ligne horizontale, par le moyen d'un niveau : par le renversement de l'instrument dirigé sur la même ligne, la lunette répondoit où le fil horizontal se confondoit avec la ligne tracée, marquant également 90 degrés; ainsi l'erreur de l'instrument étoit nulle.

* M. de Solignac est mort à Nanci le 28 Février 1773. *Gazette de France du 19 Mars.*

Cette ligne horizontale ſervit auſſi à y mettre celui de la lunette.

J'ai cru devoir m'étendre ſur la nature & la perfection de cet inſtrument, parce qu'il ſert de baſe à mes travaux aſtronomiques.

Le lieu de mes obſervations fut établi dans un Jardin appartenant à mon frère, ſitué derrière ſa maiſon, & tenant au Château du Prince, où il y avoit une excellente pendule à ſecondes, de Julien le Roi, qui marquoit le temps vrai & le temps moyen : pour connoître ſa marche, j'avois ſoin de prendre l'heure & la ſeconde, avant & après mes obſervations, par le moyen de ma montre à ſecondes; ſa marche me fut connue par un grand nombre de hauteurs correſpondantes du Soleil, priſes preſque chaque jour que le ciel le permettoit.

Le 2 Octobre, j'obſervai la diſtance apparente au zénith du bord ſupérieur du Soleil, dans le temps de ſon paſſage au méridien, de	51d 58′ 30″
Réfraction 1′ 25″ moins 7″ pour la parallaxe, reſte	+ 1. 18
Diſtance vraie du bord ſupérieur du Soleil au zénith	51. 59. 48
Demi-diamètre du Soleil à ajouter	+ 16. 2
Diſtance vraie du centre du Soleil au zénith	52. 15. 50
Déclinaiſon méridionale du Soleil	− 3. 52. 47
Hauteur du pôle de Senones	48. 23. 3
Le même ſoir, l'Étoile polaire au-deſſus du pôle	50. 18. 0
Réfraction à ſouſtraire	− 0. 55
Hauteur vraie de l'Étoile	50. 17. 5
Diſtance de l'Étoile polaire au pôle à ôter	− 1. 54. 28
Hauteur du pôle de Senones	48. 22. 37

TABLE des distances apparentes du bord supérieur du Soleil au zénith, prises dans le temps du passage de cet Astre au méridien, pour la détermination de la hauteur du pôle de Senones.

1772.	Distance appar. du bord supérieur du Soleil au zénith.	Demi-diamètre, Réfraction —la parallaxe.	Déclinaison apparente du Soleil, méridionale.	Hauteur apparente du pôle de Senones.
	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.
Octobre. 2	51. 58. 30	+17. 20	3. 52. 47	48. 23. 3
Étoile polaire	. . . .	. . . .	. . . .	48. 22. 37
10	55. 3. 0	17. 32	6. 56. 59½	48. 23. 32½
11	55. 24. 30	17. 33	7. 19. 40½	48. 22. 22½
22	59. 26. 40	17. 53½	11. 21. 5½	48. 23. 28
30	62. 9. 0	18. 6½	14. 4. 8	48. 22. 58½
31	62. 28. 0	18. 7½	14. 23. 34	48. 22. 33½
Nov..... 2	63. 6. 40	18. 12	15. 1. 43½	48. 23. 8½
3	63. 25. 20	18. 14	15. 20. 26½	48. 23. 7½
5	64. 1. 40	18. 18	15. 57. 7	48. 22. 51
21	68. 12. 0	18. 47	20. 7. 38	48. 23. 9
22	68. 25. 0	18. 49	20. 20. 23½	48. 23. 25½
23	68. 36. 30	18. 49½	20. 32. 48½	48. 22. 31
26	69. 13. 0	18. 55	21. 7. 41½	48. 24. 13½
28	69. 33. 45	18. 58	21. 28. 59	48. 23. 44
29	69. 43. 20	18. 59	21. 39. 1½	48. 23. 17½
30	69. 53. 0	19. 1½	21. 48. 38	48. 23. 23½
Décemb.. 1	70. 1. 20	+19. 2¾	21. 57. 50	48. 22. 32¾

Milieu, hauteur du pôle de Senones. . . . . $48^d\ 23'\ 6''\ 36'''$

Hauteur de l'Équateur. 41. 36. 53. 24

OBSERVATIONS d'Éclipses des Satellites de Jupiter, faites avec la lunette achromatique de cinq pieds qui grossissoit d'environ 60 fois le diamètre de l'objet.

1772.	*Temps vrai.*	
Septembre 27	11h 20′ 30″	Le premier Satellite paroissoit déjà; mais sa lumière étoit encore extrêmement foible, il n'étoit sorti que depuis quelques secondes; observation douteuse.
Octobre... 6	7. 47. 40	Émersion du I.er le ciel parfaitement serein. Jupiter terminé; on voyoit très-bien les bandes; le Satellite sortit à un demi-diamètre de Jupiter. Bonne observation.
19	8. 12. 8	Émersion du II.e ciel serein, il y avoit des vapeurs; Jupiter n'étoit pas des mieux terminé. En regardant à la lunette le Satellite paroissoit déjà, mais très-petit: j'ai estimé qu'il pouvoit y avoir une demi-minute que l'Émersion s'étoit faite: j'ai tenu compte de cette demi-minute dans la réduction de cette observation au temps vrai.
	8. 40. 55	Conjonct. du II.me Satellite avec le premier.
	8. 49. 15	Immersion du IV.e le ciel parfaitem. serein; le Satellite fut d'une petitesse extrême pendant 4 à 5′ & il entra dans l'ombre, à un diamètre & un quart, du bord de Jupiter. Bonne observation.
20	11. 42. 4	Émersion du I.er le ciel entièrement serein, mais Jupiter étoit bas & dans les vapeurs de l'horizon, mal terminé & ondoyant.
22	6. 11. 37	Émersion du I.er ciel parfaitement serein; Jupiter bien terminé; le Satellite employa plus d'une minute à récupérer sa lumière & il sortit aux deux tiers du bord de la Planète. Bonne observation.
Novembre 14	6. 27. 7	Émersion du I.er beau temps; une heure avant l'observation, le ciel étoit totalement couvert; Jupiter bien terminé; les bandes distinctes; le Satellite sortit à un bon diamètre du bord de la Planète & employa plus d'une minute à reprendre sa lumière. Bonne observation.

Depuis mon retour, j'ai reçu de M. Wargentin toutes les obſervations que cet Aſtronome avoit faites à Stockolm, des Satellites de Jupiter, en 1772, avec celles qu'il avoit pu recueillir d'ailleurs. J'ai trouvé dans cette liſte pluſieurs obſervations correſpondantes aux miennes, ſavoir :

Celle du 27 Septembre; émerſion du I.er à Stockolm, avec une lunette achromatique de 10 pieds; la même à Tyrnaw en Hongrie, par le P. Weiſſ, avec une lunette Newtonienne, de quatre pieds $\frac{1}{2}$.

Celle du 6 Octobre; émerſion du premier à Tyrnaw; la même à Paris à l'Obſervatoire Royal, par M. Caſſini le fils, avec une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$ à triple objectif; & de M. Dagelet, Élève de M. de la Lande, avec une lunette ordinaire de 18 pieds.

Celle du 19 Octobre; émerſion du ſecond à Stockolm & à Tyrnaw, & l'immerſion du quatrième, le même ſoir à Tyrnaw.

Celle du 22 du même mois, émerſion du I.er à Tyrnaw.

Et celle du 7 Novembre, émerſion du I.er au même endroit.

Je n'ai pu avoir les obſervations correſpondantes de celles du premier Satellite faites à Senones, les 20 Octobre & 14 Novembre. J'ai employé l'obſervation du 22 Octobre, faite à Tyrnaw; en ôtant une révolution du premier Satellite, ſelon les Tables de $1^j\ 18^h\ 29'\ 9''$, ce qui m'a donné l'obſervation à Tyrnaw, le 20 Octobre, à $12^h\ 24'\ 19''$; correſpondante à celles de Senones. J'ai de même ajouté quatre révolutions du premier Satellite, de $7^j\ 1^h\ 54'\ 59''$, à l'obſervation faite à Tyrnaw, le 7 du même mois; ce qui l'a donnée pour le 14, à $6^h\ 9'\ 11''$, qui répond à celle faite le même jour à Senones.

Je rapporte en Table ces obſervations, & la différence des méridiens que j'ai employée, pour réduire ces obſervations au méridien de Paris, & celle qui réſulte entre Senones & l'Obſervatoire Royal.

1772.	*Obſervations des différens lieux, Temps vrai.* H. M. S.	*Différence orient. des mérid. employés à l'égard de* PARIS. H. M. S.	*Obſervations réduites au méridien de Paris.* H. M. S.	*Obſervations faites à Senones.* H. M. S.	*Différenc des méridiens entre Senones & Paris.* M. S.	
Sept... 27	12. 4. 45	1. 2. 50	11. 1. 55	11. 20. 30	18. 35	Emerſ. du I. à Stockolm.
	12. 2. 52	1. 1. 10	11. 0. 42		18. 48	à Upſal, *bonne.*
Octobre 6	8. 30. 12	1. 0. 55	7. 29. 17		18. 23	à Tirnaw, *bonne.*
	7. 28. 53	0. 0. 0	7. 28. 53	7. 47. 40	18. 47	à Paris, Obſerv. Royal, *bonne.*
	7. 29. 24	0. 0. 0	7. 29. 24		18. 16	à Paris, ſelon M. Dagelet.
19	8. 56. 34	1. 2. 50	7. 53. 44	8. 12. 8	18. 24	E. du II.e à Stockolm, *un peu douteuſe.*
	8. 54. 47	1. 0. 55	7. 53. 52		18. 16	à Tyrnaw, *bonne.*
	9. 31. 25	1. 0. 55	8. 30. 30	8. 49. 15	18. 45	Imm. du IV. à Tyrnaw.
20	12. 24. 19	1. 0. 55	11. 23. 24	11. 42. 4	18. 40	É. du I. réduite à Tyrnaw par l'obſervation du 22.
22	6. 53. 28	1. 0. 55	5. 52. 33	6. 11. 37	19. 4	à Tyrnaw, *bonne.*
Nov.... 7	5. 15. 7	1. 0. 55	4. 14. 12	....	......	à Tyrnaw, *douteuſe.*
14	6. 9. 11	1. 0. 55	5. 8. 16	6. 27. 7	18. 51	réd. à Tyrnaw, par l'obſ. du 7.
					18. 37	par un milieu, différence des méridiens.

Il étoit annoncé dans la Connoiſſance des Temps une éclipſe totale de Lune pour le 11 Octobre 1772. Le commencement & l'immerſion totale de la Lune dans l'ombre, n'étoit viſible, ni à Paris, ni à Senones; la Lune ſe trouvoit alors ſous l'horizon.

Mais l'émerſion & la fin de l'éclipſe y étoient viſibles; l'émerſion à Paris devoit y arriver à $6^h\ 29'\ 29''$, & la fin à $7^h\ 35'\ 6''$ du ſoir.

Le ciel parfaitement ſerein à Senones la veille, le jour & le lendemain de l'Éclipſe, je pris pendant ces trois jours des hauteurs correſpondantes du Soleil, pour bien connoître la marche de la pendule.

Comme la Lune devoit ſe lever entièrement éclipſée, & que la poſition de Senones eſt dans une eſpèce de colline

environnée de montagnes, & craignant de ne pouvoir y obſerver le commencement de l'émerſion, je cherchai dans les environs de la Ville un lieu plus élevé & plus commode, d'où je puſſe découvrir l'horizon; je choiſis le ſommet d'une montagne très-élevée, eſcarpée & iſolée, que l'on nomme dans le pays, la montagne d'*Ortomont*, placée au milieu du val de Senones, & au Sud-eſt du méridien du lieu de mes obſervations faites à Senones, dans le jardin de mon frère. Comme il étoit eſſentiel de connoître la poſition du ſommet de cette montagne par rapport au lieu de mes obſervations, je meſurai une baſe de 1560 pieds, dans le Breuil de l'abbaye de Senones, le long du canal, ayant pris les angles des deux extrémités de la baſe, au ſommet de la montagne & au château du Prince. Je trouvai qu'en ligne directe, le ſommet de la montagne étoit éloigné du Château, de 1442 toiſes, & environ 1000 toiſes de la ligne méridienne qui paſſoit par le lieu de mes obſervations faites à Senones; que la hauteur perpendiculaire de la montagne, priſe du niveau de Senones, étoit élevée de 1065 pieds.

La veille de l'obſervation, par un beau temps, je montai au ſommet de la montagne, & j'y attendis le lever de la Lune, pour reconnoître le lendemain à quel point de l'horizon je devois diriger mes inſtrumens, afin de l'apercevoir à l'inſtant de ſon lever; le ſecond bord quitta l'horizon à $5^h\ 10'$ à ma montre; le lendemain 11, jour de l'Éclipſe, elle devoit par conſéquent commencer à paroître à $5^h\ 35'$.

Le jour de l'Éclipſe après midi, je fis tranſporter au ſommet de la montagne, le demi-cercle, la lunette achromatique de cinq pieds, & celle de trois pieds & demi ordinaire, garnie de ſon micromètre. J'avois eu ſoin de mettre ma montre exactement à l'heure & à la ſeconde de la pendule. Le lendemain de l'Éclipſe, je vérifiai de nouveau ma montre, & je trouvai qu'en 19 heures, elle avoit retardé ſur le temps vrai, de 28 ſecondes. J'ai tenu compte de cette variation, dans la réduction de mes obſervations. Cette variation de

la montre étoit aſſez conſtante, comme je l'avois reconnu les jours précédens & dans la ſuite, de manière qu'il ne peut y avoir qu'une légère incertitude ſur ſa marche. J'ai auſſi réduit mes obſervations de l'Éclipſe au méridien de Senones, en ôtant ſix ſecondes pour la différence des méridiens.

Les inſtrumens montés au ſommet de la montagne, & dirigés du côté de l'horizon, où la Lune devoit commencer à paroître, le demi-cercle me fit connoître qu'il y avoit encore d'autres montagnes plus éloignées de Senones, derrière leſquelles la Lune devoit ſe lever, leſquelles ſe trouvoient plus élevées d'un degré quelques minutes, que celle d'où j'obſervois.

J'attendis le lever de la Lune, qui ſuivant mes obſervations de la veille, devoit commencer à paroître à $5^h\ 35'$; il ne me fut pas poſſible de l'apercevoir à ſon lever, ni à la vue ſimple, ni avec les inſtrumens. Cette abnégation abſolue du diſque de la Planète, étoit dûe à ſon immerſion totale dans l'ombre & aux vapeurs qui s'élevoient à quelques degrés au-deſſus de l'horizon; je ne pus apercevoir le diſque qu'à pluſieurs degrés d'élevation, à $6^h\ 8'$ & il étoit entièrement éclipſé.

Quoique la Lune ſoit dans l'ombre, on voyoit diſtinctement tout le diſque, les taches étoient confuſes, cependant plus ſenſibles & plus diſtinctes vers la partie où l'émerſion devoit ſe faire. La Lune fut plus apparente dans ſon immerſion totale, que quand l'émerſion fut une fois commencée; alors la partie éclipſée de la Lune oppoſée à l'émerſion, devint plus obſcure, & les taches dans l'ombre ſe laiſſoient apercevoir avec beaucoup plus de difficulté.

L'ombre me parut bien terminée, mieux que je ne l'avois encore vue dans les Éclipſes de Lune précédentes; la pénombre très-claire & d'une nuance preſque égale; elle étoit ſéparée de l'ombre ſans confuſion, & ne laiſſoit qu'une légère incertitude ſur les obſervations. Vers la fin de l'Éclipſe, l'ombre parut moins terminée, & le mélange de l'ombre & de la pénombre étoit plus ſenſible.

L'ombre dans l'immerſion totale paroiſſoit d'un gris foncé ſemblable

ſemblable à une légère teinte d'encre de la Chine. Voici mes obſervations faites avec la lunette achromatique de cinq pieds, qui ne groſſiſſoit le diamètre de l'objet que d'environ trente à trente-cinq fois.

1772.	TEMPS VRAI *à Senones.*	
Octobre 11	6h 8′ 0″	La Lune commence à paroître, quoiqu'entièrement éclipſée.
	6. 47. 8	Émerſion: vis-à-vis *Grimaldus*, douteuſe à quelques ſecondes.
	6. 49. 55	L'ombre à *Grimaldus.*
	6. 56. 13	*Ariſtarchus* ſort de l'ombre.
	7. 0. 38	*Harpalus* à moitié hors de l'ombre.
	7. 1. 32	*Mare humorum* à moitié ſortie.
	7. 2. 38	*Keplerus* quitte l'ombre.
	7. 4. 38	*Mare humorum* ſort de l'ombre.
	7. 8. 44	*Helicon* quitte l'ombre.
	7. 9. 43	*Copernicus* à moitié hors de l'ombre.
	7. 10. 11	*Copernicus* quitte l'ombre.
	7. 13. 12	*Tycho* à moitié ſorti.
	7. 14. 9	*Plato* quitte l'ombre.
	7. 14. 47	*Tycho* hors de l'ombre.
	7. 24. 39	*Mare ſerenitatis* ſort de l'ombre.
	7. 26. 7	*Manilius* à moitié hors de l'ombre.
	7. 28. 41	*Menelaüs* ſort de l'ombre.
	7. 29. 9	*Mare ſerenitatis* à moitié hors de l'ombre.
	7. 29. 39	*Menelaüs* quitte l'ombre.
	7. 31. 24	*Dionyſius* quitte l'ombre.
	7. 31. 39	*Mare tranquillitatis* quitte l'ombre.
	7. 33. 39	*Poſſidonius* & *Plinius* ſortent de l'ombre.
	7. 34. 39	Les mêmes taches quittent l'ombre.
	7. 35. 44	*Mare ſerenitatis* quitte l'ombre.
	7. 36. 29	*Mare tranquillitatis* à moitié ſortie.
	7. 37. 39	*Mare nectaris* à moitié ſortie.
	7. 39. 24	*Promontorium acutum* à moitié ſorti.
	7. 40. 39	*Mare nectaris* quitte l'ombre.

1772.	TEMPS VRAI à Senones.	
Octobre 11	7. 41. 39	*Promontorium Somnii* à moitié sorti.
	7. 43. 39	*Mare tranquillitatis* quitte l'ombre.
	7. 44. 44	*Taruntius* sort de l'ombre.
	7. 46. 39	*Mare crisium* à moitié sorti.
	7. 49. 19	*Mare crisium* quitte l'ombre.
	7. 51. 34	*Mare excunditatis* quitte l'ombre.
	7. 52. 29	Fin de l'Éclipse, vis-à-vis *Langrenus*.
	7. 52. 59	Fin plus certaine.
	7. 55. 39	Pénombre, mais foible.
	8. 0. 39	La pénombre se soupçonne encore.
	8. 2. 40	Il n'en reste plus qu'un léger soupçon.

Il m'est parvenu plusieurs Observations de cette Éclipse.

Celle de M. le Monnier, faite aux Capucins avec une lunette de 6 à 9 pieds.

De M. Cassini le fils, à l'Observatoire Royal, avec une lunette achromatique à triple objectif de 3 pieds $\frac{1}{2}$; de M. du Séjour & de M. du Vaucel.

De M. Dagelet, Élève de M. de la Lande, avec une lunette ordinaire de 18 pieds.

De son Éminence le Cardinal de Luynes, à Fontainebleau.

Et du P. Weiss, à Tyrnaw en Hongrie.

J'employerai l'émersion, la fin de l'éclipse & les observations des taches, avec les correspondantes, pour déduire la différence des méridiens entre Senones & l'Observatoire Royal de Paris. En voici la Table.

Observations & Résultats de l'Éclipse de Lune du 11 Octobre 1772.

Observations de différens lieux. Temps vrai.	*Observations réduites à l'Observat. Royal.* Temps vrai.	*Observations faites à Senones.* Temps vrai.	*Différ. des mérid.*	*Observateurs.*	*Phases.*
H. M. S.	*H. M. S.*	*H. M. S.*	*M. S.*		
6. 29. 19	6. 29. 17	6. 47. 8	17. 51	M.rs le Monnier	Émersion.
7. 29. 47	6. 28. 52		18. 16	à Tyrnaw. . . .	
	7. 35. 46	7. 52. 59	17. 13	Cassini. . . .	Fin de l'Éclipse.
	7. 35. 8		17. 51	du Vaucel. .	
	7. 35. 29		17. 30	du Séjour. .	
7. 33. 7	7. 33. 5		19. 54	le Monnier.	
	7. 34. 54		18. 5	Dagelet. . .	
7. 34. 55	7. 33. 31		19. 28	à Fontainebleau	
8. 36. 16	7. 35. 21		17. 38	à Tyrnaw. . . .	
	6. 31. 21	6. 49. 55	18. 34	Cassini. . . .	l'ombre à *Grimaldus.*
6. 31. 20	6. 31. 18		18. 37	le Monnier.	
	6. 38. 2	6. 56. 13	18. 11	Cassini. . . .	*Aristarchus* sort de l'ombre.
	6. 44. 6	7. 2. 38	18. 32	Cassini. . . .	*Keplerus* sort.
6. 41. 50	6. 41. 48		19. 10	le Monnier.	
	6. 31. 54	7. 10. 11	18. 17	Cassini. . . .	*Copernicus* quitte l'ombre.
	6. 55. 56	7. 14. 47	18. 51	Cassini. . . .	*Tycho* hors de l'ombre.
6. 55. 15	6. 55. 13		19. 34	le Monnier.	
	6. 56. 21		18. 26	Dagelet. . .	
	7. 7. 25	7. 26. 7	18. 51	Cassini. . . .	*Menelaüs* sort.
	7. 7. 28		18. 39	Dagelet. . .	
	7. 10. 34	7. 29. 9	18. 35	Cassini. . . .	milieu de *mare serenitatis.*
	7. 10. 57	7. 28. 41	17. 44	Cassini. . . .	*Menelaüs* sort de l'ombre.
7. 11. 10	7. 11. 8		17. 33	le Monnier	
	7. 11. 2		17. 39	Dagelet. . .	
	7. 17. 23	7. 35. 44	18. 21	Cassini. . . .	*Mare serenit.* quitte l'ombr.
	7. 20. 47	7. 39. 24	18. 37	Cassini. . . .	*Promontorium acutum.*

Différ. des méridiens par un milieu. 18. 23
Par les satellites de Jupiter. . . 18. 37

Par un milieu entre l'Éclipse de Lune & les Satellites. 18. 30

D'après ces résultats, j'ai examiné la position de Senones, prise sur les cartes de la France. J'ai trouvé que la distance à la méridienne, étoit de 176,300 toises, qui vallent 3^{d} 5′ 20″, & la distance à la perpendiculaire 19,800, qui répondent à 20′ 49″. Ayant fait les calculs nécessaires dans l'hypothèse de la Terre sphérique, j'ai trouvé pour la Longitude de Senones à l'égard de l'Observatoire Royal; Senones à l'Orient 18′ 37″, & pour la hauteur du pôle de Senones 48^{d} 23′ 45″.

La Longitude que j'ai trouvée par les Éclipses des Satellites de Jupiter, s'accorde à la seconde; par l'Éclipse de Lune à 14, & par un milieu, entre ce que donnent les Satellites & l'Éclipse, 7 secondes avec la position de Senones, prise des cartes, & à 38 secondes pour la Latitude.

Avant mon voyage, j'avois fait faire un baromètre portatif que j'avois comparé avec celui qui me sert à Paris aux Observations météorologiques; j'avois tenu compte de ses variations, pour avoir une correspondance exacte pour les observations; mais quoique ce baromètre fût suspendu avec soin dans la voiture, le tube s'en trouva fêlé à mon arrivée, une partie du mercure s'étoit échappée, ce qui restoit étoit séparé, de manière qu'il ne put me servir. J'en trouvai deux à Senones nouvellement construits par M. l'abbé de Chaligny, Aumônier du Prince; ces baromètres purifiés au feu, donnoient des hauteurs différentes d'une ligne, quelquefois deux lignes, suivant la variation de la colonne; cependant le mercure étoit le même, les tubes, les cuvettes; & l'un & l'autre avoient été purifiés au feu; ce qui fait voir qu'il est absolument nécessaire que deux baromètres soient comparés ensemble, pour connoître leurs marches, si l'on veut tirer parti des observations faites dans des lieux différens; sans cette précaution, il restera toujours beaucoup d'incertitude sur les résultats. Il peut y avoir encore des erreurs dans les divisions qui séparent la colonne de mercure; on se sert bien de la même échelle qui est le pied de Roi, mais tous ceux qui font des baromètres, sont-ils toujours sûrs d'employer

la même mésure? Le niveau du mercure dans le réservoir qui n'est pas toujours de même capacité, occasionne encore des variations; le mercure plus ou moins purifié, la colonne de mercure ayant plus ou moins de diamètre, peuvent donner encore des résultats différens, ainsi que les différentes variations de l'atmosphère.

Pendant les mois d'Octobre & de Novembre 1772, j'observai à Senones trois fois par jour, le matin à 7 heures, à midi, & le soir à 10 heures, la hauteur de la colonne de mercure aux deux baromètres déjà cités; pour les distinguer, le premier, je le nommerai n.° I; & le second, n.° II. Le baromètre n.° I se soutenoit à une plus grande hauteur que le n.° II, comme je l'ai déjà dit dans ce Mémoire.

Pour avoir les observations correspondantes aux miennes, j'avois prié une personne qui demeure à Corbeil, à sept lieues de Paris, de vouloir les faire trois fois par jour aux mêmes heures qu'à Senones, à un bon baromètre que je connoissois déjà, construit par le sieur Capy; le niveau du mercure de la cuvette ayant 18 lignes de diamètre, & celui de la colonne de mercure, 2 lignes; cette personne y a donné tous ses soins. Je ne rapporterai pas ici ses observations ni celles de Senones qui seroient trop étendues pour être insérées à la suite de ce Mémoire: je me contenterai seulement d'en donner un résultat, au moyen duquel on pourra juger de la différence de hauteur du mercure dans le baromètre à Senones, avec celui de Corbeil.

Du résultat de ces observations comparées, j'en déduirai la hauteur du terrein de Senones à l'égard de celui de Corbeil; celui de Corbeil à celui de Paris, & celui de Paris à celui du niveau de la mer à Brest.

TABLE du Résultat des Observations du Baromètre, faites à Senones en Octobre & Novembre 1772, avec le Résultat des correspondantes faites à Corbeil.

1772.	Numéros des Baromètres à Senones.	Plus grande élévation à Senones.	Moindre élévation à Senones.	Plus gr. élévation à Corbeil.	Moindre élévation à Corbeil.	Nombre des Observat.	Élévation moyenne, Bar. I.	Élévation moyenne, Bar. II.	Élévation moyenne à Corbeil.
		P. L.	P. L.	P. L.	P. L.		P. L.	P. L.	P. L.
Octobre.	Bar. n.° I.	27. 6	26. 11	28. 5	27. 8	57	27. 3	27. $1\frac{1}{2}$	28. $1\frac{1}{4}$
	Bar. n.° II.	27. $4\frac{1}{2}$	26. $9\frac{1}{2}$						
Nov.....	Bar. n.° I.	27. $5\frac{1}{2}$	26. $7\frac{3}{4}$	28. 4	27. $4\frac{1}{4}$	76	27. $1\frac{1}{2}$	27. 0	28. $0\frac{1}{4}$
	Bar. n.° II.	27. 4	26. 6						
Élévation moyenne des deux mois d'observations.						133	29. $2\frac{1}{4}$	27. $0\frac{3}{4}$	28. $0\frac{3}{4}$

Le résultat de cette Table fait voir qu'à Senones, la hauteur moyenne du mercure dans le baromètre n.° I se soutenoit à 27 pouces 2 lignes $\frac{1}{4}$, plus bas de 10 lignes $\frac{1}{2}$ qu'à Corbeil: que le baromètre n.° II se soutenoit à 27 pouces 0 lignes $\frac{3}{4}$, un pouce de moins qu'à Corbeil.

En employant la différence 10 lignes $\frac{1}{2}$, produite par le baromètre n.° I avec celui de Corbeil, l'on trouvera de combien le sol de Senones est plus élevé que celui de Corbeil; l'on connoîtra aussi de combien le sol de Corbeil est plus élevé que le niveau de la Seine au Pont-royal, & la Seine au Pont-royal, au-dessus du niveau de la mer à Brest.

En donnant 12 toises $\frac{1}{2}$ pour chaque ligne de diminution de la colonne de mercure dans le baromètre, l'on aura pour 10 lignes $\frac{1}{2}$, 131 toises dont Senones seroit plus élevé que Corbeil; & par la règle des différentes pesanteurs de l'air à différentes hauteurs, employée par M. Bouguer * l'on trouve 132 toises $\frac{1}{2}$, une toise & demie de différence.

* *Mém. Acad. année 1753.*

Le baromètre à Senones étoit élevé de 21 pieds au-dessus

du rez-de-chauſſée. A Corbeil il étoit au-deſſus du niveau de la Seine, de 33 pieds.

La pente de la rivière, ſuivant le nivellement de M. Picard, depuis Corbeil juſqu'à Paris, eſt de 18 pieds. [a]

Au Pont-royal, la rivière étant à 4 pieds, le pavé de la ſalle de l'Obſervatoire, où eſt la méridienne, eſt élevé de 145 pieds 2 pouces; & le pavé de la même ſalle l'eſt au-deſſus du niveau de la mer à Breſt, de 270 pieds 5 pouces. [b] D'après ces données, il eſt aiſé de connoître combien le ſol de Senones eſt élevé au-deſſus du pavé de la ſalle de l'Obſervatoire royal de Paris, & du niveau de la mer à Breſt.

[a] *Traité du Nivellement, de M. Picard, publié par M. de la Hire, page 152.*

[b] *Voyage de M. l'abbé Chappe en Sibérie, vol. II.*

RÉSULTAT des différentes hauteurs rapportées ci-deſſus pour connoître de combien le ſol de Senones eſt élevé au-deſſus du niveau de la mer.

pieds.	pouces.	
795.	0	Élévation du ſol de Senones au-deſſus de celui de Corbeil, d'après les obſervations correſpondantes du baromètre, & ſuivant la règle des différentes peſanteurs de l'air.
21.	0	A ſouſtraire pour la hauteur du baromètre à Senones au-deſſus du ſol.
774.	0	Hauteur du ſol de Senones au-deſſus de Corbeil, où étoit placé le baromètre.
33.	0	A ajouter pour la hauteur du baromètre de Corbeil, au-deſſus de la Seine.
18.	0	A ajouter pour la pente de la rivière juſqu'à Paris, ſuivant M. Picard.
825.	0	Hauteur du ſol de Senones au-deſſus de la Seine à Paris.
145.	2	A ſouſtraire pour l'élévation du pavé de la ſalle de l'Obſervatoire au-deſſus de la Seine au Pont-royal; la rivière étant à 4 pieds.
679.	10	Senones plus élevé que la ſalle de l'Obſervatoire.
270.	5	A ajouter, le pavé de la ſalle de l'Obſervatoire plus élevé que le niveau de la mer à Breſt.
950.	3	Élévation du ſol de Senones au-deſſus du niveau de la mer à Breſt; Breſt & Senones ſous le même parallèle.

MOYEN

De cacher le Cuivre ſans que l'alkali volatil puiſſe le faire reconnoître.

Par M. CADET. *

LORSQUE je déposai à l'Académie, en 1758, un régule cuivreux que j'avois tiré du Borax, *(Mémoires préſentés à l'Académie, tome V)* je me propoſois de donner une ſuite d'expériences ſur ce régule, & de préſenter à cette ſavante Compagnie les moyens que j'avois employés pour l'obtenir. Le ſervice des Armées m'a empêché de remplir cet engagement. J'eſpère dans quelque temps donner un travail ſuivi ſur cette matière, & ne laiſſer rien à deſirer. Mais comme la première objection, qui ſe préſente, eſt que le borax ordinaire ne donne aucun indice de cuivre, & que celui que j'en ai retiré pouvoit y être étranger, j'ai voulu faire voir comment le cuivre pouvoit être caché dans le borax, ſans que les expériences ordinaires puſſent l'y déceler.

Le régule cuivreux, que j'ai tiré du borax, m'a paru joint à un principe arſénical : or l'alkali volatil ne décèle en aucune manière le cuivre dans la diſſolution du borax, & ne lui donne aucune couleur bleue. Je penſai donc que l'arſenic pouvoit être un moyen de cacher le cuivre, & de le ſouſtraire à l'épreuve de l'alkali volatil, qui juſqu'ici a été regardée comme un moyen ſûr pour faire apercevoir par une couleur bleue la plus petite portion de cuivre, par-tout où il ſe trouve. Pour m'aſſurer de cette théorie, j'ai employé l'arſenic même, & des matières qui en contiennent; j'ai trouvé que l'arſenic étoit réellement ſuffiſant pour engager le cuivre, & le rendre

* Ce Mémoire avoit été lû le 1.er Février 1764, par M. Cadet, avant qu'il fût de l'Académie, il l'a depuis relû comme Académicien.

absolument

absolument méconnoissable; mais le travail de l'arsenic ayant nui à ma santé, je me suis tourné du côté de l'étain, & j'ai remarqué qu'il suffisoit aussi pour cacher le cuivre, d'une manière à ne pouvoir être décélé par l'alkali volatil. Ce travail m'a fait trouver un moyen de juger du degré de pureté de l'étain; j'ai voulu employer à ces expériences plusieurs autres substances salines vitrifiables & métalliques, telles que le sable, le plomb, le cuivre, &c. Par ces différentes combinaisons, je suis parvenu à faire une espèce de borax artificiel, qui a quelque ressemblance avec le borax que l'on tire des Indes, & qui par cela même, peut répandre un assez grand jour sur cette substance singulière & si peu connue.

J'ai employé pour ces expériences les cristaux de verdet, croyant que le principe inflammable, qu'on a démontré dans l'acide radical du vinaigre que donnent ces cristaux de cuivre par la distillation, pourroit me fournir avec l'arsenic, dans un vaisseau fermé, un régule arsenical.

J'ai distillé à cet effet un mélange de deux onces d'arsenic & de 4 gros de cristaux de Vénus; il a passé dans le récipient un acide de vinaigre très-pénétrant, ayant une forte odeur d'ail: la plus grande partie de l'arsenic s'est sublimée au col de la cornue; une portion de cet arsenic étoit transparente comme le cristal; sa superficie étoit enduite d'une lame métallique qui n'est que du régule d'arsenic formé à l'aide du principe inflammable du vinaigre; l'intérieur de la partie de la sublimation étoit tapissé de petits cristaux d'arsenic très-brillans; au fond de la cornue j'ai trouvé un régule très-aigre, dont les facettes approchoient beaucoup de celles du zinc. La dissolution de ce régule arsenical dans l'eau régale, m'a fourni des cristaux soyeux qui diffèrent peu par leur forme de ceux que l'on retire de la dissolution de l'étain par l'esprit de sel; cette dissolution n'a donné avec l'alkali volatil aucune nuance de bleu qui pût m'annoncer la présence du cuivre, ce qui prouve que l'arsenic est suffisant pour cacher le cuivre, de manière qu'il ne puisse être indiqué par l'alkali volatil: il est vrai qu'ensuite j'ai recommencé plusieurs fois

cette expérience, & dans différentes proportions: aucunes ne m'ont réussi; car je n'ai obtenu qu'une chaux de cuivre arsenical spongieuse, ayant une variété de couleur comme la gorge de pigeon; mais par la plupart de ces expériences, la formation de ce régule m'a semblé tenir à bien peu de chose; & il y a lieu de croire qu'elle dépend d'un degré de feu plus ou moins vif, ou plus ou moins prompt. Ces différentes chaux de cuivre arsenical, traitées au feu de fusion, dans un creuset, avec de la cire, & recouvertes en même temps d'une couche de sel alkali, donnent un beau cuivre blanc, qui approche de celui de la Chine, mais différent du régule arsenical que j'avois trouvé la première fois. La dissolution de ce cuivre, dans les acides minéraux, acquiert une couleur verte ou bleue, plus ou moins foncée, suivant l'espèce d'acide qu'on a employée; & une seule goutte de chacune de ces dissolutions, noyée dans beaucoup d'eau, donne avec l'alkali volatil, le bleu le plus vif.

Une maladie que j'ai éprouvée à la suite de ce travail, m'a forcé d'abandonner mes expériences sur l'arsenic, & de recourir à d'autres moyens moins dangereux. Comme j'étois fort attaché à ce principe arsenical, & que je pensois ne pouvoir réussir à masquer le cuivre sans son secours, j'ai cru devoir l'emprunter de quelqu'autre métal. L'étain est celui qui m'a paru le plus convenable à remplir mon objet, à raison de l'arsenic qu'il contient, ainsi que l'a si clairement prouvé le célèbre M. Margraff.

J'ai pris de l'étain de Malac en chapeau; j'en ai pesé six onces que j'ai fondues avec deux gros de cuivre de rosette; cet alliage d'étain avoit acquis beaucoup de dureté, & présentoit un œil mat & argentin comme l'étain de Cornouailles. J'ai réduit une partie de cet alliage d'étain en limaille que j'ai passé ensuite au tamis de soie; j'en ai mis à dissoudre dans de l'esprit de sel; cet acide agit avec beaucoup de facilité sur cette limaille; la dissolution se fait d'elle-même & sans le secours de la chaleur; dans l'instant de la dissolution, l'esprit de sel perd entièrement sa couleur jaune;

le mouvement d'effervescence passé, on aperçoit une poudre noire qui se précipite peu-à-peu, & qui ensuite s'y dissout; si l'on chauffe légèrement ce mélange, on détermine plus tôt cette dissolution de l'étain, & le précipité de la poudre noire; la liqueur alors se colore tant soit peu. Si au contraire on la fait bouillir, le précipité noir s'y dissout plus difficilement. J'ai observé aussi que l'esprit de sel volatilisoit une partie de l'étain dans le temps de cette ébullition, ce dont je me suis aperçu lorsque le vaisseau a été refroidi; la superficie du col extérieur de ce vaisseau étoit toute couverte de feuillets blancs, lesquels examinés à la loupe, étoient un assemblage de petits cristaux soyeux, qui, à leur saveur, m'ont paru être un sel d'étain: cette propriété de l'esprit de sel, de volatiliser par lui-même l'étain, est encore bien démontrée dans la liqueur fumante de Libarius: ayant saturé cette dissolution d'alkali volatil, j'ai obtenu un précipité jaune; la liqueur, qui surnageoit le précipité, n'avoit pris aucune nuance de bleu qui pût y faire soupçonner le cuivre que j'y avois fait entrer. Cette dissolution, évaporée à un certain point, à une douce chaleur, donne des cristaux soyeux dont j'aurai occasion de parler, à la suite de mes expériences sur le borax.

La poudre noire, dont je viens de parler, n'étoit que du cuivre qui se dégageoit insensiblement de cet alliage d'étain, pendant la dissolution. J'ai versé de l'esprit de nitre sur une portion de ce précipité noir; la dissolution s'en est faite promptement; quelques gouttes d'alkali volatil l'ont aussitôt coloré d'un beau bleu.

Dans différentes dissolutions d'étain, plusieurs Chimistes ont observé cette poudre noire: le célèbre Henckel assure que c'est l'arsenic de l'étain; d'autres le regardent comme le souffre de l'étain: cette diversité d'opinions m'a engagé d'examiner plus particulièrement ce précipité noir de la dissolution de l'étain. J'ai pris pour ces expériences une certaine quantité de limaille d'étain de Malac; j'ai versé dessus une dose suffisante d'esprit de sel, pour en faire à froid la dissolution: lorsqu'elle a été achevée, j'ai aperçu un très-léger précipité

que j'ai féparé avec foin : l'efprit de nitre verfé deffus l'a diffout, & l'alkali volatil l'a enfuite précipité en une poudre jaune; la liqueur qui furnageoit n'a pris aucune nuance de bleu qui ait pu me faire foupçonner que ce léger précipité fût du cuivre. J'ai tout lieu de préfumer qu'il pouvoir venir d'une portion de fer qui s'étoit détachée de la lime qui avoit fervi à cette limaille d'étain; ce dont je me fuis affuré, par la pierre d'aimant, fur une pareille limaille, qui en a enlevé des parcelles en affez grand nombre.

Les différens étains de Malac que j'ai employés, font de tous les étains, ceux que j'ai reconnus les plus purs, & ceux qui font capables de fupporter du cuivre en plus grande quantité, fans que l'alkali volatil puiffe le déceler par la couleur bleue: il n'en eft pas de même des étains des autres fabriques, principalement de celle de Cornouailles; les différentes diffolutions que j'ai tentées avec l'efprit de fel fur ce métal, m'ont prouvé que les étains n'étoient pas de même aloi, qu'il y avoit de grandes différences entr'eux, & qu'ils contenoient plus ou moins de cette poudre noire; j'ai pris de la limaille d'étain de Cornouailles; j'ai eu la précaution d'en enlever avec la pierre d'aimant le fer que la lime pouvoit y avoir laiffé; j'ai verfé fur cette limaille d'étain une fuffifante quantité d'efprit de fel, & j'ai aperçu peu après, une poudre noire qui nageoit dans la liqueur; j'ai chauffé légèrement pour décider la diffolution; voyant qu'une partie de cette poudre noire avoit de la peine à s'y diffoudre, je l'en ai féparée pour verfer deffus une autre quantité d'efprit de fel; la diffolution s'en eft faite fur le champ; ayant mêlé enfemble ces diffolutions, l'alkali volatil les a précipitées en un jaune foncé; un excès d'alkali volatil verfé fur la liqueur du précipité, ne s'eft point coloré en bleu, non plus que le précipité; la quantité de poudre noire que j'ai aperçu fe former dans ces différentes diffolutions de l'étain, m'a paru mériter un examen d'autant plus férieux, que je les foupçonnois alors être du cuivre; pour avoir de ce précipité noir de la diffolution de l'étain, j'ai pris de la limaille d'étain

de Cornouailles, ſur-tout de celui qui m'avoit donné le plus de cette poudre noire; j'ai verſé de l'eſprit de ſel ſur cette limaille; la diſſolution a été faite à froid dans une cucurbite large d'ouverture; je l'ai expoſée à l'air froid, en évitant de couvrir le vaiſſeau, pour laiſſer échapper les vapeurs & retirer une plus grande quantité de cette poudre noire; la diſſolution achevée, j'ai ſéparé avec ſoin le précipité; je l'ai lavé, pour lui enlever la plus grande partie de l'eſprit de ſel; j'ai pris moitié de ce précipité, ſur lequel j'ai verſé du bon eſprit de nitre; la diſſolution s'en étant faite promptement & avec efferveſcence, elle a pris auſſitôt une foible couleur verte; l'alkali volatil verſé dans cette diſſolution, l'a fait paſſer au bleu le plus vif; la ſuperficie d'une lame d'acier poli trempée dans cette liqueur affoiblie avec de l'eau, y eſt devenue auſſitôt cuivreuſe; le filtre de papier, qui avoit ſervi à ſéparer ce précipité noir, a donné dans le feu une belle flamme verte. Ces expériences ne m'ont plus permis de douter que ce précipité noir ne fût véritablement du cuivre; cela m'a déterminé à traiter au feu de fuſion dans un creuſet d'eſſais, l'autre partie de mon précipité, avec le flux noir; cette expérience m'a donné un petit bouton de cuivre. On doit donc revenir de l'idée qu'on a eue juſqu'a préſent, que ce précipité noir étoit l'arſenic ou le ſoufre de l'étain, puiſque ce n'eſt véritablement que du cuivre. Il y a lieu de croire qu'il n'y a que l'arſénic de l'étain qui empêche de reconnoître le cuivre par l'épreuve de l'alkali volatil, dans ſa diſſolution, par l'eſprit de ſel.

La différence qui ſe trouve entre les étains de fabrique, & ceux de Malac, par rapport à ce précipité noir, ne me fait pas conclure que l'étain de Malac ne contienne point du tout du cuivre; il eſt peut-être eſſentiel à la formation de l'étain, & peut-être caché, de façon que rien ne puiſſe le déceler.

Mais on ne doit pas être ſurpris de trouver du cuivre dans pluſieurs étains, d'après ce que M. Geoffroy nous apprend dans ſa matière médicale ſur la fonte de l'étain de Cornouailles;

il dit que la partie ſupérieure de la maſſe d'étain eſt ſi molle & ſi flexible, qu'on ne peut la travailler ſans y mêler du cuivre, ſavoir trois livres ſur cent livres d'étain, & deux livres de cuivre ſur le métal qui eſt au milieu. Rien ne reſſemble plus à l'étain de Cornouailles, qu'un alliage de deux gros de cuivre, avec ſix onces d'étain de Malac : les Potiers d'étain préfèrent auſſi de beaucoup l'étain de Malac, à celui d'Angleterre, comme étant le plus pur. Pour durcir cet étain & le travailler plus aiſément, ſur cent livres peſant ils font entrer juſqu'à ſept livres de cuivre de roſette, cet étain eſt celui qu'ils emploient pour leur vaiſſelle, qu'ils appellent leur étain fin; la diſſolution totale de cet étain dans l'eſprit de ſel, ne prouve point la préſence du cuivre avec l'alkali volatil, quoiqu'il en contienne beaucoup; le précipité qui donne cette diſſolution, lorſqu'on y verſe de l'alkali volatil, diffère de celui du pur étain de Malac, en ce qu'il eſt jaune, & que celui de Malac eſt blanc; quoique dans cette expérience on ne démontre pas la préſence du cuivre, elle s'y reconnoît quelquefois ſur les fontaines d'étain, par du vert-de-gris qui s'y manifeſte. Je tiens ce fait d'une perſonne qui en a eu l'expérience. Les Potiers d'étain tiennent chez eux une eſpèce d'étain très-aigre, dont ils font des gobelets, des cuillers & des fourchettes, dans lequel ils font entrer du régule d'antimoine; ils prétendent que ce régule ſert à procurer le grand poli dont ils ont beſoin pour ces différens uſtenſiles. Je n'ai tenté aucune expérience ſur cet étain, qu'ils appellent leur étain commun; c'eſt vraiſemblablement à raiſon de cette partie réguline d'antimoine, que le vin, qui a ſéjourné dans les gobelets d'étain, acquiert la propriété de purger, & quelquefois de faire vomir.

Les Potiers, pour juger de l'aloi de l'étain qu'ils achettent, en coulent dans le creux d'une pierre, qu'ils appellent pierre de touche.

Feu M. Hellot m'a dit qu'elle ſe trouvoit aux environs de Tonnerre; le coup-d'œil ſeul les décide ſur le degré de pureté; ils prétendent que toutes ſortes de pierres ne peuvent

ſervir à cette épreuve; que l'étain d'Angleterre prend un œil blanc & mat en refroidiſſant, & que celui de Malac a un œil brillant qu'il conſerve juſqu'à la fin: ils achettent communément 24 ſous celui d'Angleterre, & 32 ſous celui de Malac. Feu M. Geoffroy a donné une ſuite d'expériences (dans les Mémoires de l'Académie de l'*année 1738)*, qui peuvent ſervir à faire juger de la pureté de l'étain, par la couleur plus ou moins blanche que donnent ſous la mouffle ces différentes chaux d'étain ; les taches rouges, noires & griſes qu'il a aperçues ne ſeroient-elles pas dûes à des parties cuivreuſes? ce qui m'autoriſe à former cette conjecture, c'eſt que les chaux d'étain, que j'ai obtenues dans pluſieurs calcinations que j'ai tentées ſur pluſieurs alliages d'étain avec le cuivre, m'ont donné ces différentes couleurs rouges, noires & griſes; l'eſprit de ſel, verſé ſur ces chaux métalliques, n'y perd plus ſa couleur jaune, comme cela arrive dans la diſſolution du métal même ; au contraire il acquiert un œil verdâtre, & démontre la préſence du cuivre avec l'alkali volatil, par ſa couleur bleue; ce qui prouve encore que le cuivre ne ſe trouve caché dans ces diſſolutions, que par l'arſenic de l'étain.

La diſſolution de l'étain, faite à froid par l'eſprit de ſel, eſt un ſecond moyen qu'on pourroit employer, pour juger du titre de l'étain; je ne ſais même ſi on ne devroit pas lui donner la préférence, cette expérience étant plus prompte, & paroiſſant plus certaine & moins ſujette à des variations, ainſi qu'on l'éprouve dans les calcinations de l'étain. Cet eſſai pourroit ſe faire ſur une petite quantité de limaille priſe à différens endroits des ſaumons ou des chapeaux d'étain, & on pourroit alors juger du titre de ce métal, par le plus ou moins de poudre noire qu'on en ſépareroit, ou par les différens degrés de blancheur des précipités que l'on obtiendroit de cette diſſolution, en ſe ſervant de l'alkali volatil.

Depuis ces expériences, j'ai combiné le cuivre & l'étain, avec l'alkali de la ſoude & avec l'urine, combinaiſon dont je me réſerve de parler dans un autre Mémoire; j'ai obtenu

une liqueur qui avoit un goût amer & nauſéabonde; elle étoit d'une couleur d'un beau vert de pré très-foncé; je l'ai étendu dans une ſuffiſante quantité d'eau, pour en affoiblir la couleur; l'alkali volatil n'y décèle point le cuivre, & ne produit point de couleur bleue: une lame de fer, trempée dans cette liqueur, n'y devient point cuivreuſe; en verſant un acide quelconque ſur cette liqueur concentrée, il ſe forme auſſitôt dans le vaiſſeau un ſel par lames, comme le ſel ſédatif, ainſi que cela arrive avec une diſſolution chargée de borax; ſi pour lors on y trempe une lame de fer, elle devient cuivreuſe, ce qui n'arrive point avant qu'on y verſe de l'acide: cette expérience eſt très-ſéduiſante pour les Chimiſtes qui s'occupent de la recherche du borax & du ſel ſédatif; elle me rappelle quelque choſe d'aſſez ſingulier que j'ai vu, il y a plus de vingt années chez M.rs Ballif Maîtres Apothicaires de Paris; elle n'a pas peu contribué à me faire perſiſter dans l'idée que le cuivre eſt un des principes eſſentiels du borax, quoique les Chimiſtes ſoient aujourd'hui d'un ſentiment contraire. On y faiſoit ce jour-là une aſſez grande quantité de ſel ſédatif; la diſſolution du borax avoit été faite dans des vaiſſeaux de grès; l'opération du ſel ſédatif avoit été continuée dans les mêmes vaiſſeaux; au défaut d'une ſpatule d'ivoire ou d'argent, on s'étoit ſervi par haſard d'une lame d'épée à trois quarts, pour remuer la liqueur; j'examinai cette lame, que je trouvai toute cuivreuſe: on dira peut-être que le borax dont on s'étoit ſervi, en contenoit, pour avoir été purifié dans des vaiſſeaux de cuivre; mais j'eſſayai auſſitôt avec l'alkali volatil le borax dont on s'étoit ſervi, & je n'eus pas la moindre couleur bleue qui pût y indiquer le cuivre; ainſi j'ai prouvé qu'on peut cacher le cuivre, à l'aide de la ſubſtance arſenicale de l'étain; je crois qu'il ſeroit poſſible d'y parvenir par d'autres voies, telles que celles des ſemi-métaux, & principalement avec le régule du cobolth, tiré du ſafre ou de l'émail des quatre feux dont j'ai donné le procédé; *(Mém. préſentés à l'Académie, tome IV)*; en attendant ce travail, je vais rapporter quelques expériences qui tendent au même objet;

objet; ſi je ne les ai pas portées au degré que je deſirois, au moins j'eſpère qu'elles pourront jeter quelque jour ſur la nature du borax, & ſervir de preuve à ce que j'ai avancé ſur cette matière.

La grande fuſibilité du verre que j'ai tiré du borax, la facilité qu'il a de ronger les creuſets, l'action des acides minéraux ſur ce verre, à peu-près ſemblable à celle qu'ils ont ſur le verre de plomb; ce caractère de reſſemblance entre ces deux verres, me firent tenter différens moyens pour voir ſi je ne parviendrois pas à maſquer le cuivre, par le ſecours de la vitrification de plomb.

Pour avoir un précipité de cuivre toujours égal, j'ai fait diſſoudre une certaine quantité de vitriol bleu de Chypre dans une ſuffiſante quantité d'eau; j'ai précipité cette diſſolution de cuivre avec l'alkali de ſoude; j'ai enſuite lavé & ſéché ce précipité: c'eſt celui que j'ai employé conſtamment & de préférence pour les expériences ſuivantes.

J'ai peſé quatre onces de ſable bien lavé & ſéché, quatre onces de ſel de ſoude & huit onces de litharge; j'ai mis ce mélange dans un creuſet conique, à un feu de fuſion; la matière étant bien en fonte, j'y ai ajouté demi-once de mon précipité de cuivre; dans le même inſtant j'ai agité le tout avec une verge de cuivre; quelques minutes après j'ai tiré le creuſet du fourneau; il s'y eſt trouvé une maſſe de verre dont les parties colorantes étoient en ſi grande quantité & ſi rapprochées les unes des autres, qu'elles empêchoient la tranſparence de ce verre; mais les éclats en étoient tranſparens & d'une belle couleur d'émeraude; à la pointe du creuſet, j'ai trouvé un régule de plomb reſſuſcité peſant demi-once dix-huit grains. Si dans cette opération on ne prend pas la précaution de mettre le précipité de cuivre, préciſément lorſque la matière eſt en parfaite fuſion, au lieu d'un vert de couleur d'émeraude, on n'obtient qu'un verre opaque d'un rouge foncé. J'ai obſervé que cette couleur rouge n'étoit dûe qu'au flogiſtique qui peut reſter dans la litharge, & au principe ſulfureux du ſel de ſoude qui ſe communique ſur le champ

au précipité du cuivre, & qui tend à ressusciter ce métal; ce qui m'est arrivé lorsque j'ai fait ce mélange tout-à-la-fois. J'ai cru ne devoir pas laisser ignorer l'observation que cette opération m'a donné lieu de faire, d'autant plus qu'elle peut être de quelque utilité à ceux qui travaillent à la composition des émaux & des verres colorés; travail dans lequel on éprouve souvent des variations dont on ne peut pas toujours se rendre raison.

J'ai pesé quatre onces & demie de ce verre métallique cuivreux, je l'ai réduit en poudre subtile; j'ai versé sur cette poudre de l'esprit-de-sel fumant; cet acide a une action si prompte sur ce verre, qu'en un instant & sans le secours de la chaleur, il le corrode & le réduit en une pâte qui devient blanche d'abord: ce mélange s'échauffe de lui-même considérablement, au point de ne pouvoir y tenir la main. Lorsqu'il a été parfaitement refroidi, je l'ai desséché au bain-marie dans une capsule de verre, en l'agitant continuellement avec une spatule de cristal. Après avoir été parfaitement desséché, ce verre métallique s'est trouvé du poids de six onces cinq gros; par conséquent il a retenu dans cette opération deux onces un gros d'acide réel de sel marin. J'ai pesé une once de cette poudre, je l'ai mêlée avec une même quantité de sel de soude cristallisé très-blanc, qui avoit été desséché dans une terrine de grès. Ce dernier mélange tenu l'espace d'un quart-d'heure dans un creuset conique exactement couvert, à un feu de fusion, a donné un verre laiteux, jaunâtre & quelquefois verdâtre, à la pointe duquel s'est trouvé un régule très-aigre, pesant douze grains, qui tenoit plus du cuivre que du plomb. La superficie de ce verre laiteux étoit couverte d'une croûte saline très-alkaline & d'un beau bleu; la nature de ce sel bleu est si fusible, qu'en le présentant à la flamme d'une bougie, il s'y fond à l'instant. Je pense que la grande fusibilité de ce sel est dûe à l'acide marin, & à une portion de substance métallique dont le sel s'est emparé pendant la fusion. Dans cette opération, il ne faut pas tenir trop long-temps la matière en fonte, on

courroit le riſque de manquer ſon expérience, parce que ce verre métallique perce & ronge facilement les creuſets. Ce verre laiteux, au ſortir du creuſet, laiſſe ſur la langue une impreſſion de ſel marin. Si on expoſe enſuite ce verre à l'humidité de l'air, il ſe forme à ſa ſuperficie une liqueur verdâtre qui a le piquant d'un alkali cauſtique. Cette liqueur & ce verre, expoſés dans un lieu plus ſec, ſe réduiſent en une eſpèce de gluten verdâtre ou jaunâtre qui, en ſe deſſéchant, ſe convertit en une matière blanche qui craque ſous les dents, & dont la ſaveur approche de celle du borax. Cette matière n'eſt plus alors ſuſceptible de reprendre par elle-même de l'humidité; ce gluten, mis ſur un charbon ardent, y bourſoufle comme le borax, & s'y vitrifie. Les caractères de ce verre me firent penſer qu'il pourroit ſervir à ſouder les métaux. J'en portai chez un Orfévre, qui, après l'avoir réduit en poudre fine, en mit une pincée ſur une plaque d'argent qu'il avoit mouillée d'un peu d'eau, comme lorſqu'on opère avec le borax; il mit ſur cette poudre de petits morceaux de ſoudure, au titre d'un gros de cuivre ſur trois gros d'argent; il recouvrit cette ſoudure d'une autre pincée de la même poudre qu'il humecta d'un peu d'eau; il fit pareille opération ſur un autre endroit de la même plaque d'argent avec du borax, pour me mettre à même de juger des différences qu'il y auroit entre les deux fondans. Cette plaque d'argent ainſi arrangée ſur les charbons ardens au feu de forge, la matière a bourſouflé auſſitôt, s'eſt convertie en verre, & a mis en fuſion la ſoudure auſſi promptement que le borax.

J'avois pluſieurs raiſons de croire que le caractère qu'avoit ce faux verre, de ſe bourſoufler, de ſe vitrifier & de ſouder comme le borax, n'étoit dû qu'à l'acide marin que j'avois fait entrer dans ſa compoſition; je m'en aſſurai ſur le champ, en eſſayant de ſouder avec le verre métallique cuivreux qui n'avoit pas encore touché à l'eſprit-de-ſel; mais le verre ſe fondit ſur la plaque d'argent ſans ſe bourſoufler, & ne put jamais mettre la ſoudure en fuſion, quoique l'Orfévre eût

employé le feu le plus vif. Il n'y a donc plus de doute que c'eſt à l'acide marin que mon verre doit la propriété de ſouder les métaux ; la propriété ſemblable qu'a le borax de ſouder les métaux ne ſeroit-elle pas dûe au même principe? J'ai vu avec plaiſir les propriétés de cette eſpèce de verre; quoique le cuivre n'y ſoit pas caché au point que je le deſire, & ainſi qu'il l'eſt, ſuivant moi, dans le borax, il ne l'eſt pas même autant que je le cache dans l'étain, puiſque lors de ſon bourſouflement ſur les charbons ardens, la partie qui le touche immédiatement devient rouge, & cette couleur prouve que la partie cuivreuſe tend à ſe reſſuſciter. On ne ſera pas étonné de la marche que j'ai tenue dans ces dernières opérations, quoique ſingulière en apparence, ſi l'on ſe rappelle les différentes expériences que j'ai données dans deux Mémoires ſur le borax. Ces expériences, auxquelles j'ai été conduit par celles de feu M. Geoffroy, M.[rs] Bourdelin & de Laſſone, & des célèbres Chimiſtes qui ont analyſé le borax, me fortifient plus que jamais dans l'opinion où je ſuis que le borax contient réellement du cuivre; mais je penſe bien que le cuivre n'eſt pas ſeul dans le borax; je l'y crois joint à une autre ſubſtance métallique, dont je traiterai dans une autre occaſion.

La plupart des Naturaliſtes, tant anciens que modernes, ont avancé que le borax étoit le produit d'une liqueur qui découle d'une mine de cuivre; j'étois bien tenté de le croire, ſur-tout en réfléchiſſant à l'expérience de M. Geoffroy, ſur la diſſolution du ſel ſédatif dans l'eſprit-de-vin, dont la flamme donne une belle couleur verte pareille à celle que fournit le cuivre. Les filtres qui ont ſervi à l'opération du ſel ſédatif, lorſqu'ils ſont ſéchés & qu'on les brûle, donnent une belle flamme verte, ſemblable à des papiers qui ont été ſaupoudrés de verdet; nous ne reconnoiſſons juſqu'à préſent que le cuivre & le ſel ſédatif qui procurent à la flamme une ſi belle couleur verte. Je penſe auſſi que c'eſt l'acide marin qui conſtitue le borax, & non point l'acide vitriolique, ainſi que l'ont penſé Becker & le célèbre M. Pott. Le ſeul Chi-

miste qui ait aperçu l'acide marin, est M. Bourdelin, dans l'Analyse qu'il a faite du sel sédatif; je ne saurois trop souvent citer l'expérience de ce savant Chimiste; je ne sais comment dans le sel sédatif, matière si peu propre à cette découverte, il a pu saisir aussi-bien la présence de cet acide marin qui devoit échapper aux plus habiles Observateurs.

La base du sel marin est démontrée dans le borax; pourquoi y existe-t-elle? s'y seroit-elle trouvée par hasard, si son acide n'y eût existé auparavant? Ce sont des conjectures que j'espère appuyer par des expériences, & qui ne laisseront aucun doute sur la nature de cet article, & encore moins sur la terre vitrifiable du borax, que je crois avoir bien démontrée dans mon second Mémoire sur le Borax. La propriété qu'a ce verre métallique cuivreux dont je viens de parler, de souder les métaux à l'aide de l'esprit-de-sel, me donna l'idée de traiter ce verre composé avec l'acide vitriolique, pour examiner quel effet il pourroit produire dans cette opération. J'ai pris de l'huile de vitriol affoiblie de trois parties d'eau; j'y ai dissout ce verre métallique, comme j'avois fait avec l'esprit-de-sel; je l'ai desséché, & j'en ai fait un mélange avec parties égales de sel de soude; j'ai mis le tout en fusion dans un creuset, j'ai eu les mêmes produits que dans mon opération avec l'esprit-de-sel; mais dans la croûte saline qui couvroit la superficie du verre laiteux, on démêloit à travers le piquant de l'alkali, une amertume qui approchoit du sel de Glauber; ce qui m'a le plus étonné, c'est que ce verre laiteux de cette dernière expérience, au sortir du creuset, avoit un goût de sel marin bien marqué & semblable à celui que j'ai obtenu par la voie de l'esprit-de-sel; ce verre en a tous les caractères; il boursoufle, se vitrifie, & soude l'argent comme le borax.

Voici mes réflexions sur ce qui se passe dans cette opération; qu'on me permette de les proposer ici. On pourroit soupçonner que cette impression de sel marin, que donne ce verre laiteux par l'acide vitriolique, venoit d'un sel de soude qui n'étoit pas pur; mais le sel, que j'ai employé, étoit de beau sel de soude, bien cristallisé & dont je suis sûr. Avant

que d'aller plus loin, il est nécessaire de dire deux mots sur le sel de soude ou autrement sur la base du sel marin. Il a été bien prouvé par M. du Hamel, & depuis par M. Margraff, que c'est un alkali fixe ; ils conviennent de la différence qu'il y a entre lui & l'alkali fixe ordinaire ; l'un, comme on sait, se cristallise & tombe à l'air en efflorescence, & l'autre ne se cristallise pas & tombe à l'air en deliquium. M. Baumé dit dans son Manuel de Chimie, que cette propriété, qu'a la base du sel marin de cristalliser, lui vient de ce qu'il entre dans sa composition une plus grande quantité de terre que dans l'alkali végétal. Ce seroit sans doute à cette même surabondance de terre que seroient dûes toutes les différences qu'il y a entre ces deux alkalis, par rapport aux effets qu'ils produisent avec les acides: ceci demande d'être appuyé d'expériences. Pour moi, je pense différemment sur la base du sel marin ; j'ai employé du sel de soude cristallisé dans beaucoup d'expériences; elles m'ont porté à croire que ce sel n'est pas totalement dépouillé de l'acide marin, qui avant sa calcination le constituoit sel neutre; dans plusieurs vitrifications que j'ai tentées avec le sel de soude, j'ai reconnu plus d'une fois la présence réelle de cet acide, par l'impression de sel marin que plusieurs scories m'ont laissée quelquefois sur la langue, & par les vapeurs blanches qui s'en sont élevées en versant dessus de l'huile de vitriol ; ce qui me fait juger que cet alkali pendant sa calcination a retenu une portion d'acide avec lequel il est étroitement lié, & peut-être avec la surabondance de terre qu'a reconnue M. Baumé dans la base du sel marin, & qui occasionne, je crois, les différences qu'il y a entre ces deux alkalis fixes.

J'ai reconnu encore cet acide marin dans le savon qu'on prépare avec la lessive de soude aiguisée par la chaux & l'huile d'amandes douces ; ce savon, renfermé dans un pot bien couvert, au bout de quelque temps laisse une impression de sel marin des plus marquées. Ce n'est ni la chaux ni l'huile, je pense, qui lui ont fourni ce sel; sans doute que ce mélange d'huile & d'alkali est une cause de ce nouveau

développement, & s'il eſt poſſible par les faits que j'expoſe, d'admettre que le ſel de ſoude, pendant ſa calcination, retienne effectivement une portion d'acide dont on ne puiſſe le dépouiller, dans ce cas le phénomène que j'ai aperçu dans mon opération ſur le verre métallique cuivreux, traité par l'huile de vitriol, deviendroit facile à expliquer. Je penſerois alors que l'acide vitriolique ayant plus d'affinité avec les alkalis qu'avec les ſubſtances métalliques, il s'eſt dégagé pendant la fuſion, pour ſe combiner avec la partie alkaline du ſel de ſoude, & que ce même acide rencontrant l'acide marin, l'a forcé de quitter priſe; alors l'acide marin qui a l'action la plus grande ſur les terres vitrifiables, ſur-tout ſur celles des métaux blancs, & principalement ſur celle du plomb, s'y eſt auſſitôt combiné & a formé ce verre laiteux qui a l'impreſſion du ſel marin; objet de ces dernières réflexions. Il me paroît donc qu'il y a dans la baſe du ſel marin, une portion d'acide marin dont on ne peut le dépouiller, qui a produit un verre ſemblable à celui que j'avois eu par l'eſprit de ſel.

CONCLUSION.

Il réſulte des expériences précédentes:

1.° Que l'on peut cacher le cuivre dans différentes ſubſtances, à l'aide de l'arſenic, & principalement par celui qui eſt contenu dans l'étain, ſans que l'alkali volatil puiſſe le faire reconnoître:

2.° Que l'acide marin, joint à différentes ſubſtances ſalines vitrifiables & métalliques, telles que le plomb & le cuivre, donne une eſpèce de verre qui a pluſieurs des caractères du borax, puiſqu'il ſe bourſoufle, ſe vitrifie ſur les charbons ardens, & ſoude comme le borax:

3.° Que la propriété qu'a ce borax artificiel de ſouder les métaux, n'eſt exactement dûe qu'à l'acide marin qui eſt entré dans ſa compoſition, & que c'eſt par la même cauſe que le borax & le ſel ſédatif ſervent également bien l'un & l'autre à la ſoudure des métaux; c'eſt ce qui ſera démontré par de nouvelles expériences:

4.° Que le précipité noir qu'on obtient de quelques dissolutions d'étain, & principalement de celui de Cornouailles, n'est point le soufre de l'étain, comme l'avoit cru le célèbre Henckel, mais qu'il vient du cuivre qu'on a fait entrer dans la fusion de la mine d'étain.

5.° Que les différentes dissolutions d'étain dont il est parlé dans le Mémoire, pourroient servir de pierre de touche pour juger de la pureté des différentes espèces d'étain qu'on voudroit essayer.

6.° Qu'il est vraisemblable que la cristallisation de l'alkali du sel marin, est dûe à une portion d'acide marin, dont il n'est guère possible de le priver, & il paroît qu'elle ne vient point d'une surabondance de terre.

MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR DES
IRRATIONNELLES DE DIFFÉRENS ORDRES
AVEC
UNE APPLICATION AU CERCLE.

Par M. VANDERMONDE.

LORSQU'APRÈS être convenu de prendre p^n pour ſymbole du produit de n facteurs $p . p . p . p \ldots$ on eſt venu à ſuppoſer le nombre n fractionnaire, on a dû reconnoître auſſitôt les uſages multipliés de cette expreſſion irrationnelle, & la néceſſité de l'introduire dans le calcul. Il étoit clair que, dans ce cas, p^n ne ceſſoit pas d'être le terme correſpondant à l'indice n dans une ſuite géométrique; qu'il étoit toujours la ſomme des ſuites en n & p qu'on avoit trouvées dans l'hypothèſe de n égal à un nombre entier, leſquelles donneroient du moins ſa valeur approchée; enfin, que c'étoit la ſeule valeur exacte du rapport entre certaines lignes.

Cette manière d'indiquer le produit de n termes de la ſuite $p, p, p, p \ldots$ dont les premières différences ſont zéro, n'eſt qu'une convention particulière qui peut être généraliſée: on peut en faire une ſemblable pour les ſuites dont les ſecondes différences ou les troiſièmes, &c. ſont zéro; il en naîtra des expreſſions irrationnelles d'un ordre plus compoſé; & comme une infinité de rapports n'ont pour valeur exacte que des expreſſions radicales, il eſt naturel de penſer qu'il y en aura encore une infinité, dont ces autres irrationnelles repréſenteront les valeurs.

Il m'a paru que cette idée offroit une branche nouvelle & féconde de l'analyſe, & que l'application ſuivante pourroit exciter quelques Géomètres à la cultiver.

I.

Je repréſente par $[p]^{n}$ le produit de n facteurs.... $p.(p-1).(p-2).(p-3)...$ ou le produit de n termes conſécutifs d'une ſuite dont les premières différences ſont 1, & les ſecondes différences ſont zéro. Il ſuffit de ſuppoſer les premières différences égales à l'unité; car ſi elles étoient égales à Δp, les ſecondes différences continuant d'être zéro, on auroit $p.(p-\Delta p).(p-2\Delta p).(p-3\Delta p)...$ $= \Delta p^{n}. \frac{p}{\Delta p}(\frac{p}{\Delta p}-1)(\frac{p}{\Delta p}-2)(\frac{p}{\Delta p}-3)...$ $= \Delta p^{n}\left[\frac{p}{\Delta p}\right]^{n}$.

II.

Il eſt clair que ſi les premières différences, au lieu d'être l'unité, étoient zéro, on auroit $[p]^{n} = p^{n}$; & que cette équation a encore lieu ſi p eſt infini par rapport à n.

III.

De même qu'on avoit $p.p.p.p... = p^{n} = p^{m}.p^{n-m}$, on aura $p.(p-1).(p-2).(p-3).........$ $= [p]^{n} = [p]^{m}\,[p-m]^{n-m}$.

IV.

L'équation $p^{n} = p^{m}.p^{n-m}$ donnoit $p^{n} = p^{0}.p^{n}$, ou $p^{0} = 1$. Elle donnoit de plus $p^{0} = p^{m}.p^{-m}$, ou $p^{-m} = \frac{1}{p^{m}}$.

Semblablement, l'équation $[p]^{n} = [p]^{m}\,[p-m]^{n-m}$ donne $[p]^{n} = [p]^{0}\,[p]^{n}$, d'où $[p]^{0} = 1$; $[p]^{0} = [p]^{m}\,[p-m]^{-m}$,

d'où $[p - m]^{-m} = \frac{1}{[p]^{m}}$, ou en écrivant $p + m$ pour p,

$$[p]^{-m} = \frac{1}{[p + m]^{m}}.$$

V.

Au moyen de ces Théorèmes, la loi de continuité sera observée entre ces différentes expressions, & l'on aura

$$[p]^{n} = p\cdot(p - 1)\cdot(p - 2)\cdot(p - 3)\ldots(p - n + 1),$$

$$[p]^{0} = 1, \text{ \&}$$

$$[p]^{-n} = \frac{1}{(p + 1)\cdot(p + 2)\cdot(p + 3)\cdot(p + 4)\ldots(p + n)}.$$

Ainsi pour représenter, par exemple, le produit $11.9.7.5$, j'écrirois $2^{4}\left[\frac{11}{2}\right]^{4}$; pour représenter celui-ci $\frac{1}{5.7.9.11}$, j'écrirois $2^{-4}\left[\frac{5}{2} - 1\right]^{-4}$, ou $\frac{1}{2^{4}}\left[\frac{3}{2}\right]^{-4}$; pour $\frac{1}{1.4.7.10.13}$, j'écrirois $3^{-5}\left[\frac{1}{3} - 1\right]^{-5}$, ou $\frac{1}{3^{5}}\left[-\frac{2}{3}\right]^{-5}$; pour $\frac{1}{1.2.3.4.5}$, j'écrirois $[0]^{-5}$, &c.

VI.

On a par l'*article III*,

$$[p]^{n} = [p]^{n-1}\,[p - n + 1]^{1} = [p]^{n-1}\,(p - n + 1) \text{ \&}$$

$$[p + 1]^{n} = [p + 1]^{1}\,[p]^{n-1} = (p + 1)\,[p]^{n-1}; \text{ donc}$$

$$[p + 1]^{n} = [p]^{n} + n\,[p]^{n-1}.$$

Mettant $p + 1$ pour p, & substituant, on a

$$[p + 2]^{n} = [p]^{n} + 2n\,[p]^{n-1} + n(n - 1)\,[p]^{n-2},$$

$$[p+3]^{n} = [p]^{n} + 3n\,[p]^{n-1} + 3n\,(n-1)\,[p]^{n-2}$$
$$+ n\,(n-1)\,(n-2)\,[p]^{n-3},$$

& en général

$$[p+m]^{n} = [p]^{n} + [m]^{1}\,[0]^{-1}\,[n]^{1}\,[p]^{n-1}$$
$$+ [m]^{2}\,[0]^{-2}\,[n]^{2}\,[p]^{n-2}$$
$$+ \&c.$$

Donc en écrivant $p+n$ pour p, & multipliant tout par $[p]^{-n}$,

$$[p+m+n]^{n}\,[p]^{-n} = [p+n]^{n}\,[p]^{-n}$$
$$+ [m]^{1}\,[0]^{-1}\,[n]^{1}\,[p+n]^{n-1}\,[p]^{-n}$$
$$+ [m]^{2}\,[0]^{-2}\,[n]^{2}\,[p+n]^{n-2}\,[p]^{-n}$$
$$+ \&c.$$

& parce que felon l'*article III*, $[p+n]^{n-a}\,[p]^{-n} = [p]^{-a}$ on a enfin

$$[p+m+n]^{n}\,[p]^{-n} = 1 + [m]^{1}\,[0]^{-1}\,[n]^{1}\,[p]^{-1}$$
$$+ [m]^{2}\,[0]^{-2}\,[n]^{2}\,[p]^{-2}$$
$$+ \&c.$$

& comme en échangeant m & n entr'elles dans les deux membres, le fecond demeure le même, on a auffi

$$[p+m+n]^{n}\,[p]^{-n} = [p+m+n]^{m}\,[p]^{-m}.$$

Dans le cas où m & n feroient des fractions, la fuite précédente donnera donc une valeur de l'expreffion

$[p+m+n]^{n}\,[p]^{-n}$, ou généralement de celle-ci $[q]^{n}\,[p]^{-n}$.

Nous en allons chercher une autre fous la forme de produits infinis.

VII.

On a par l'*article III*,

$$[q]^{n} = [q]^{-r}\,[q+r]^{n+r} = [q]^{-r}\,[q+r]^{n}\,[q+r-n]^{r}$$

& enfin par l'*article IV*, $[q]^{n} = [q]^{-r}\,[q+r]^{n}\cdot\frac{1}{[q-n]^{-r}}$;

& pareillement $[p]^{-n} = [p]^{-r}\,[p+r]^{-n}\cdot\frac{1}{[p+n]^{-r}}$. Donc

$$[q]^{n}\,[p]^{-n} = [q+r]^{n}\,[p+r]^{-n}\cdot\frac{[p]^{-r}\,[q]^{-r}}{[p+n]^{-r}\,[q-n]^{-r}}.$$

Or, par l'*art. II*, si r est infini par rapport à $p, q,$ & n, on a

$$[q+r]^{n}\,[p+r]^{-n} = [r]^{n}\,[r]^{-n} = r^{n}\,r^{-n} = 1;$$

donc enfin

$$[q]^{n}\,[p]^{-n} = \frac{[p]^{-\infty}\,[q]^{-\infty}}{[p+n]^{-\infty}\,[q-n]^{-\infty}} = \frac{(p+n+1)\,(q-n+1)\,(p+n+2)\,(q-n+2)\ldots}{(p+1)\,(q+1)\,(p+2)\,(q+2)\ldots}$$

VIII.

Maintenant, si l'on développe la puissance du binome dans l'expression $\nu N\int x^{\nu N-1}\,dx\,(1-x^{\nu})^{N}$, on trouve cette expression égale à

$$\nu N\int\Big(x^{\nu N-1}\,dx - [N]^{1}\,[o]^{-1}x^{\nu(N+1)-1}\,dx + [N]^{2}\,[o]^{-2}x^{\nu(N+2)-1}\,dx - \&c.\Big)$$

intégrant terme-à-terme, divisant haut & bas par ν, faisant commencer l'intégrale quand $x=0$, & faisant $x=1$, après l'intégration, cette expression se réduit à

$$1-\frac{N}{N+1}[N]^{1}[o]^{-1}+\frac{N}{N+2}[N]^{2}[o]^{-2}-\frac{N}{N+3}[N]^{3}[o]^{-3}+\&c.$$

c'eſt-à-dire qu'on a alors

$$\begin{aligned} & 1 + [\mathrm{N}]^{1} [0]^{-1} [-N]^{1} [N]^{-1} \\ & + [\mathrm{N}]^{2} [0]^{-2} [-N]^{2} [N]^{-2} \\ & + [\mathrm{N}]^{3} [0]^{-3} [-N]^{3} [N]^{-3} \\ & + \&c. \end{aligned}$$

$$= \nu N \int x^{\nu N - 1} dx (1 - x^{\nu})^{\mathrm{N}} = [\mathrm{N}]^{\mathrm{N}} [N]^{-\mathrm{N}} = [N]^{N} [\mathrm{N}]^{-N} = \frac{[\mathrm{N}]^{-\infty} [N]^{-\infty}}{[0]^{-\infty} [\mathrm{N} + N]^{-\infty}}.$$

Car cette ſuite n'eſt qu'un cas particulier de celle de l'*art. VI*, & l'on trouvera, en y faiſant $m = \mathrm{N}$, $n = -N$, $p = N$, que la ſomme eſt $[\mathrm{N}]^{-N} [N]^{N}$ ou $[\mathrm{N}]^{\mathrm{N}} [N]^{-\mathrm{N}}$. Subſtiſtituant de même dans l'*article VII*, on trouvera qu'elle égale encore $\frac{[\mathrm{N}]^{-\infty} [N]^{-\infty}}{[0]^{-\infty} [\mathrm{N} + N]^{-\infty}}$.

Ce ſont ces formules que nous allons appliquer au cercle. On les vérifiera préalablement, ſi on le juge à propos, pour ſe familiariſer à cette manière d'écrire, en ſubſtituant des nombres entiers pour N, ou pour *N*.

IX.

Si l'on fait dans l'article précédent $\nu = 2$, $N = \frac{1}{2}$, $\mathrm{N} = -\frac{1}{2}$, & qu'on déſigne par ϖ le rapport de la circonférence du cercle à ſon diamètre; on a, à cauſe de $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{1}{2} \varpi$, dans la ſuppoſition $x = 1$ après l'intégration

$$1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.3}{2.4.5} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.7} + \&c.$$

$$= \frac{1}{2} \varpi = [\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} [-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots\ldots}$$

& il est à remarquer que, comme par l'*article III*,
$[\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2}]^{1} [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}$, on a
$\frac{1}{2}\varpi = [\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = 2 [\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent
$2 [\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\varpi}$; & qu'ainsi *le côté du carré égal à l'aire du cercle dont le rayon est pris pour unité, a pour expression* $2 [\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}$;
expression qui, dans les conventions ordinaires pour les puissances, seroit $2 . \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, ou $\sqrt{2}$, ou celle de la diagonale du carré dont le côté est l'unité.

Ces propositions seront encore confirmées par les remarques suivantes.

X.

On a $[\frac{1}{2}]^{1} [-\frac{1}{2}]^{-1} = \frac{\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2}+1)} = 1$,
$[\frac{1}{2}]^{2} [-\frac{1}{2}]^{-2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)} = -\frac{1}{3}$,
$[\frac{1}{2}]^{3} [-\frac{1}{2}]^{-3} = \frac{1}{5}$, $[\frac{1}{2}]^{4} [-\frac{1}{2}]^{-4} = -\frac{1}{7}$, &c.
d'où n étant un nombre entier $[\frac{1}{2}]^{n} [-\frac{1}{2}]^{-n} = \pm \frac{1}{2n-1}$;
ou, en enveloppant l'ambiguité des signes dans une expression qui y supplée, $[\frac{1}{2}]^{n} [-\frac{1}{2}]^{-n} = \frac{\sin. \frac{2n-1}{2}\varpi}{2n-1}$, équation qui devient $1 = 1$ quand $n = 0$, comme cela doit être (*article IV*). Or si on fait $n = \frac{1}{2}$, on a $2n - 1 = 0$, & alors $\sin. \frac{2n-1}{2}\varpi = \frac{2n-1}{2}\varpi$, & $[\frac{1}{2}]^{n} [-\frac{1}{2}]^{-n}$
$= \frac{\frac{2n-1}{2}\varpi}{2n-1}$, d'où $[\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\varpi$.

Donc $[\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}\ [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}$ *eſt le terme correſpondant à l'indice* $\frac{1}{2}$ *dans la ſuite* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c. *comme il eſt* (art. IX), *la ſomme de la ſuite* $1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.3}{2.4.5} +$ &c.

X I.

On trouvera de même, n étant un nombre entier, que $[n]^{n}\ [-n]^{-n} = \frac{n}{\pm o}$; on peut envelopper l'ambiguité des ſignes, en écrivant $\frac{n}{\text{ſin.}\, n\varpi}$, pour $\frac{n}{\pm o}$; mais afin que lorſque $n = o$, l'expreſſion devienne $= 1$, il faut que $[n]^{n}\ [-n]^{-n} = \frac{n\varpi}{\text{ſin.}\, n\varpi}$, ce qui en y appliquant la formule de l'*art. VII,* donne les produits infinis que l'on ſait être la valeur de $\frac{n\varpi}{\text{ſin.}\, n\varpi}$; *voyez le* Calcul intégral de M. Euler. On a de même $[p]^{\frac{1}{2}}\ [-p]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2p\, \text{ſin.}\, \frac{2p-1}{2}\varpi}{(2p-1)\ \text{ſin.}\, p\varpi}$, à cauſe de $[p]^{\frac{1}{2}} = [p]^{p}\ [o]^{-p+\frac{1}{2}}$, & de $[o]^{m}\ [o]^{-m} = \frac{\text{ſin.}\, m\varpi}{m\varpi}$; ou plus généralement, en calculant de la même manière, on a

$$[p]^{n}\ [m-p]^{-n} = \frac{m-p}{n-p}\ [p]^{m}\ [n-p]^{-m}\ \frac{\text{ſin.}\,(n-p)\varpi}{\text{ſin.}\,(m-p)\varpi}.$$

De ces Théorèmes, que l'on peut multiplier à l'infini, en ſuivant cet algorithme, on déduit comme ci-deſſus $[\frac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}\ [-\frac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\varpi$.

X I I.

Si dans la formule $[\frac{1}{2}]^{n}\ [-\frac{1}{2}]^{-n} = \frac{\text{ſin.}\, \frac{2n-1}{2}\varpi}{2n-1}$, l'on fait

fait $n = \frac{1}{4}$, ou $= \frac{3}{4}$; on a, à cauſe de ſin. $\frac{1}{4}\varpi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$$\left[\tfrac{1}{2}\right]^{\frac{1}{4}} \left[-\tfrac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{4}} = \left[\tfrac{1}{2}\right]^{\frac{3}{4}} \left[-\tfrac{1}{2}\right]^{-\frac{3}{4}} = \sqrt{2} = \frac{3.5.7.\ 9.11.13\ldots}{2.6.6.10.10.14\ldots}$$

& à cauſe de ſin. $\frac{1}{6}\varpi = \frac{1}{2}$, on en tire de même

$$\left[\tfrac{1}{2}\right]^{\frac{1}{6}} \left[-\tfrac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{3}} = \left[\tfrac{1}{2}\right]^{\frac{2}{3}} \left[-\tfrac{1}{2}\right]^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = \frac{5.7.11.13.17.19.23.25\ldots}{3.9.\ 9.15.15.21.21.27\ldots}$$

On a auſſi, par l'*article XI*,

$$\left[\tfrac{1}{3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[-\tfrac{1}{3}\right]^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{5.7.11.13.17.19\ldots}{4.8.10.14.16.20\ldots} \text{ \&c.}$$

XIII.

Il y a donc de ces expreſſions irrationnelles *du ſecond ordre* qui ſe réduiſent à des nombres rationnels; d'autres, qui ſe réduiſent ſeulement à des quantités irrationnelles d'un ordre plus ſimple, à peu-près comme $4^{\frac{1}{2}}$ ſe réduit à 2.

Il s'agiroit d'avoir une méthode certaine de faire ces réductions, toutes les fois qu'elles ſont poſſibles, ou d'avoir l'arithmétique de ces irrationnelles de différens ordres.

XIV.

Je n'ajouterai qu'un mot ſur les ordres ſupérieurs. Si l'on entend par $\varphi(p)$, une fonction quelconque de p, & que l'on faſſe

$$[\varphi(p)]^{n} = \varphi(p).\varphi(p-1).\varphi(p-2).\varphi(p-3)\ldots\varphi(p-n+1);$$

on aura $[\varphi(p)]^{n} = [\varphi(p)]^{m}\,[\varphi(p-m)]^{n-m}$, d'où l'on déduira

$[\varphi(p)]^{n} = [\varphi(p)]^{0}\,[\varphi(p)]^{n}$, ou $[\varphi(p)]^{0} = 1$; &

$[\varphi(p)]^{0} = [\varphi(p)]^{m}\,[\varphi(p-m)]^{-m}$, d'où en écrivant $p + m$

pour p, $[\varphi(p)]^{-m} = \frac{1}{[\varphi(p+m)]^{m}}$; & l'on déduira de ces Théorèmes fondamentaux, lorſque la fonction φ ſera donnée, des ſuites générales dont l'uſage pourra ſe manifeſter dans différentes recherches; ce qu'il me ſuffit d'indiquer ici.

Mon objet principal étoit de faire voir que les expreſſions radicales ne donnent qu'une forme particulière d'irrationnelles; & que l'hypothèſe qu'on a faite pour y parvenir, ſur les ſuites dont les premières différences ſont zéro, peut être faite dans des vues analogues, & auſſi légitimement, ſur celles, par exemple, où l'on ne commence à avoir zéro qu'aux ſecondes différences.

MÉMOIRE SUR UNE MACHINE À ÉLECTRISER D'UNE ESPÈCE NOUVELLE.

Par M. LE ROY.

Lû à la rentrée publique de Pâques 1772.

LE plus bel eſprit du ſiècle, & peut-être de tous les ſiècles (M. de Voltaire) a dit que la Phyſique eſt une mine, dans laquelle on ne peut deſcendre qu'avec des machines. On ne pouvoit renfermer une plus grande vérité en moins de paroles, & préſenter une image plus juſte des difficultés de cette ſcience, & des moyens que nous avons pour les ſurmonter. En effet tous ces inſtrumens & toutes ces machines qu'emploie la Phyſique, & dans leſquels le commun des hommes n'entrevoit qu'une foible utilité, ſont aux yeux du véritable Phyſicien, de la plus grande importance; il les regarde comme les véritables armes avec leſquelles il peut attaquer la Nature avec ſuccès, & la forcer à nous révéler ſes ſecrets. Car l'expérience, & l'expérience variée par toutes les combinaiſons poſſibles, pouvant ſeule nous mener à la découverte des cauſes; ces machines en étendant en quelque façon nos organes de cent manières différentes, nous fourniſſent les moyens de reconnoître des phénomènes, qui ſans cela nous ſeroient peut-être échappés pour jamais.

Analyſez l'eau & la glace par toutes les voies que la Chimie vous offre, & vous ne pourrez jamais y trouver, ni en tirer un atome de feu; appliquez ces ſubſtances à la machine électrique, & dans l'inſtant vous découvrez ce que cette analyſe n'avoit pu vous apprendre, que l'eau & la glace contiennent du feu, à l'aide duquel on peut enflammer des liqueurs, embraſer des corps, &c.

Je pourrois prouver par mille autres exemples, que ce qui nous échappe, en interrogeant ainſi la Nature par une voie, ſe découvre en l'interrogeant par une autre; mais

celui-ci me ſuffit pour établir cette grande vérité, ainſi que la conſéquence importante qui en réſulte, je veux dire, la néceſſité de multiplier & de perfectionner les machines dans la Phyſique, pour analyſer de toutes les manières poſſibles, les phénomènes qu'elle nous préſente.

Cependant nos progrès ſont ſi lents & les découvertes ſi rares, qu'il ſe paſſe quelquefois nombre d'années avant qu'on parvienne ſeulement à perfectionner des machines déjà connues, ou à en employer de nouvelles, dont la conſtruction ſembloit la plus facile à imaginer. L'hiſtoire abrégée des moyens dont on s'eſt ſervi pour électriſer les corps, & qui m'a paru néceſſaire ici, en ſera encore une nouvelle preuve.

Vers 1740, quelques Phyſiciens allemands, laſſés des fatigues qu'on éprouvoit en faiſant de l'Électricité, au moyen des tubes de verre qu'on frottoit avec la main, imaginèrent de leur ſubſtituer des globes de la même ſubſtance, qu'on électriſoit en les faiſant tourner avec rapidité ſur leur axe, & en les frottant en même temps avec les deux mains. Ce moyen ayant réuſſi parfaitement, & les phénomènes électriques étant devenus en conſéquence beaucoup plus conſidérables, & par-là même beaucoup plus ſenſibles; cette ſeule nouveauté fit changer de face à l'Électricité, & nous valut un ſi grand nombre de découvertes curieuſes & importantes, que cette époque ſera à jamais célèbre dans l'hiſtoire de cette partie de la Phyſique.

Cependant on ne peut s'empêcher d'être étonné qu'on ait attendu ſi tard à employer des globes, Haukſbée s'en étant ſervi près de trente ans auparavant, dans un grand nombre d'expériences qu'il fit ſur la lumière & ſur l'électricité des corps; mais M.[rs] *Gray* & *du Fay* avoient fait leurs expériences avec des tubes; ç'en fut aſſez pour qu'on continuât de les faire de la même manière, tant l'habitude & l'uſage ont de force, même dans les choſes où ils devroient en avoir le moins.

Comme le verre, ſous quelque forme qu'on le frotte, s'électriſe toujours, pourvu que ce frottement ſe faſſe d'une

manière convenable; il ſemble qu'il n'y avoit qu'un pas à faire pour ſubſtituer les plateaux ou les roues de verre aux globes, & remédier par-là aux inconvéniens de ces derniers, dont l'uſage n'étoit pas ſans quelque danger; car pluſieurs avoient caſſé entre les mains des perſonnes qui les frottoient, non ſans riſque de les bleſſer grièvement, & même les aſſiſtans, par la force avec laquelle les éclats en avoient été lancés. Cependant toute ſimple que nous paroiſſe aujourd'hui cette ſubſtitution, il ſe paſſa encore plus de vingt-cinq ans, avant qu'on s'en aviſât. Enfin on imagina en Angleterre, vers 1766, une machine électrique, dans laquelle on mit un plateau de verre, en place du globe. J'en ai actuellement une de cette eſpèce, que M. l'abbé Bouriot, fort verſé dans la Phyſique, a bien voulu me prêter; & quoique ce ſoit une des premières qu'ait fait M. Ramſdens, habile artiſte de Londres, & qu'elle ſoit d'un fort petit volume, elle donne cependant autant d'électricité qu'une machine à globe ordinaire, d'un volume beaucoup plus conſidérable,

On en concevra facilement la conſtruction, en ſe repréſentant un plateau de verre monté ſur un arbre avec une manivelle, & tournant au milieu de deux montans de bois, qui ſont contretenus par en haut au moyen d'une traverſe, & entre leſquels il y a des couſſins pour frotter le plateau.

Dès que je vis cette machine, je conçus qu'on pouvoit en tirer un parti beaucoup plus avantageux qu'on ne l'avoit fait, en la rendant propre à donner, non-ſeulement l'électricité ordinaire ou l'électricité *en plus*, mais encore celle qu'on appelle l'électricité *en moins.*

J'imaginai qu'il n'y avoit pour y parvenir, qu'à changer la poſition des couſſins, les mettre en dehors des montans du plateau, & les faire porter par un ſupport de verre, ou toute autre ſubſtance qui les iſoleroit; je penſai même que ce changement que je méditois, ſeroit d'autant plus avantageux, que j'aurois par ſon moyen une machine, qui, quoique fort ſimple, pourroit en donnant l'électricité *en plus*, ſervir encore à démontrer avec la plus graude facilité, l'électricité *en moins*, & tous les phénomènes qui en dépendent.

Plein de ces idées sur la facilité & les moyens de perfectionner cette machine, je les communiquai l'été dernier* à plusieurs personnes, & entr'autres à M. le Duc de Chaulnes, qui comme feu M. le Duc de Chaulnes son père, aime les Sciences, & les cultive avec succès. J'en fis part de même à M. l'abbé Musnier, qui quoique fort jeune, est déjà connu avantageusement de l'Académie *(a)*. Frappé des avantages qui en pouvoient résulter, ce dernier a fait exécuter en conséquence une machine qui a été présentée à l'Académie, il y a déjà quelque temps; & la Compagnie a vu avec quelle facilité on peut, avec cette machine, faire toutes les expériences de l'électricité *en plus*, ou des machines ordinaires, & toutes celles de l'électricité *en moins*.

* En 1771.

Cependant comme la machine que j'avois en vue me sembloit pouvoir être beaucoup plus simple & plus solide que celle de M. l'abbé Musnier, j'en ai fait faire une autre, dont la construction m'a paru remplir entièrement mon objet; elle est représentée dans la figure première *(b)*, & ce sera la seule dont je parlerai dans la suite. Mais avant d'en donner la description, je me trouve obligé, pour faire mieux connoître les électricités *en plus* & *en moins*, & leurs différens phénomènes, de remettre sous les yeux de l'Assemblée un précis de ce que j'ai dit autrefois sur ce sujet. C'est avec beaucoup de regret que je reviens sur une matière que j'ai traitée si anciennement, ayant établi solidement dès 1753, dans un Mémoire que je lûs à ce sujet, la distinction de ces

(a) Ce jeune Homme est mort depuis; ce qui est une perte, par le goût qu'il avoit pour la Physique.

(b) Le temps qui s'est écoulé entre le moment où ce Mémoire a été lû & celui où il s'imprime (au commencement de 1775), m'oblige à mettre ici une note relativement à une Machine à électriser avec un globe de M. Nairne (habile Ingénieur pour les instrumens de Mathématiques de Londres), dont il est parlé dans la traduction des Œuvres de M. Franklin, par M. Dubourg, qui a paru dans l'été de 1773. Cette machine, comme la mienne, sert à exciter à volonté l'électricité positive & négative. On voudra bien observer que ce Mémoire a été lû à la rentrée de Pâques 1772; qu'il n'est nullement question de cette machine de M. Nairne dans l'Ouvrage anglois de M. Franklin; que la description qu'en a donnée M. Dubourg lui a été envoyée par cet habile Physicien en 1773; enfin, qu'à l'époque où j'imaginois ma machine en 1771, celle de M. Nairne n'existoit pas, ou au moins qu'elle n'étoit nullement connue en France.

deux électricités, par la découverte des phénomènes qui les caractérisent; mais j'y suis forcé. Car je n'ai eu que trop lieu de connoître par les objections que l'on m'a faites encore tout nouvellement, qu'il n'y a dans ce pays-ci, même aujourd'hui, qu'un très-petit nombre de personnes qui soient vraiment instruites de ce qui constitue la différence de ces électricités, quoique M. Franklin les ait annoncées, il y a plus de vingt ans, & qu'elles aient été adoptées depuis par les plus célèbres Physiciens de l'Europe.

On s'accorde assez à regarder le fluide électrique, comme un fluide fort subtil, fort élastique, qui tient beaucoup de la matière du feu, & qui est répandu dans tous les corps, excepté peut-être dans le verre & dans les substances vitrifiées; au moins paroissent-elles n'en contenir qu'une très-petite quantité, relativement aux autres corps. Ce fluide paroît résider dans les corps, comme l'air réside dans les liqueurs, dans l'eau, par exemple; & comme on ne peut condenser ou raréfier l'air qui touche la surface d'un fluide, sans produire l'un ou l'autre de ces effets sur l'air qui y est contenu, on ne peut de même condenser ou raréfier le fluide électrique à la surface des corps, qu'on ne le condense ou le raréfie en même temps dans leur intérieur.

On sent encore qu'en vertu de son élasticité, on ne peut augmenter ou diminuer la quantité de matière électrique contenue dans un corps, sans augmenter ou diminuer en même temps sa densité dans ce corps, ces deux effets se correspondant entièrement; enfin la densité du fluide électrique paroissant la même dans tous les corps électrisables, par communication, qui couvrent la superficie de notre globe, & ces corps présentant en général les phénomènes électriques, pour peu qu'elle y soit altérée, ou en l'augmentant ou en la diminuant; cette densité est regardée par-là, comme une densité primitive, à laquelle on compare ou on rapporte toutes les autres. Quand on dit donc que le fluide électrique est condensé ou raréfié dans un corps, on entend par-là en général, que sa densité y est plus grande ou moindre, qu'elle ne l'est dans un corps électrisable par communication qui n'est pas électrisé.

De-là ces dénominations différentes d'électricité *en plus* & *en moins*, ou *par condensation* & *par raréfaction*, qui servent à caractériser la manière dont on conçoit qu'un corps est électrisé, la première indiquant qu'on a augmenté ou condensé le fluide électrique dans ce corps; la seconde, qu'on l'y a diminué ou raréfié.

Le verre, le soufre & les résines sont les instrumens, si cela se peut dire, dont nous nous servons pour produire les phénomènes de l'électricité; ces substances étant (la comparaison n'a rien de forcé) de véritables pompes à feu électrique, à l'aide desquelles nous raréfions ou nous condensons à volonté ce feu dans les corps; mais elles agissent, dans cette double opération, d'une manière absolument contraire. Ainsi le globe de verre attire ou pompe le fluide électrique des coussins ou des corps qui le frottent, tandis que le globe de soufre le condense dans ces corps; & ce dernier globe pompe le fluide électrique des conducteurs ou des corps qui le touchent, pendant que le globe de verre au contraire le dépose ou le condense dans ces mêmes corps.

De-là, & d'après ce qui a été dit plus haut, on voit:

1.° Que le globe de verre électrise les conducteurs *en plus* & les coussins *en moins*, en condensant l'électricité dans les premiers, & en la raréfiant dans les seconds.

2.° Que le globe de soufre produit l'effet contraire ou électrise les conducteurs *en moins* & les coussins *en plus*, en raréfiant le fluide électrique dans les premiers, & le condensant dans les seconds.

3.° Enfin, qu'avec l'un ou l'autre on peut électriser à volonté les corps *en plus* ou *en moins*.

Il résulte encore de ce que je viens d'exposer:

Que l'électricité propre du verre est l'électricité *en plus*, puisque dans son électrisation il se charge du fluide électrique, qu'il pompe des corps qui le frottent:

Et que celle du soufre est au contraire l'électricité *en moins*, puisque dans cette électrisation il se dépouille de son fluide électrique, qu'il donne aux corps qui le frottent.

En

En partant de ce double effet, on a caractérisé encore l'électricité propre de chacune de ces ſubſtances par le nom de la ſubſtance même; ainſi on a appelé l'électricité du verre, *électricité vitrée;* & celle du ſoufre ou de la réſine, *électricité réſineuſe.*

Or, comme on s'eſt accoutumé à électriſer les corps, en les mettant en contact avec les globes de verre ou de ſoufre, & que de cette manière ces corps acquièrent toujours l'électricité propre de ces ſubſtances; on eſt parti de-là fort mal-à-propos pour regarder l'électricité qu'elles communiquent aux corps, dans différentes circonſtances, comme devant être toujours de la même nature que celle de ces mêmes ſubſtances, je veux dire, *vitrée* ou *réſineuſe;* mais c'eſt une erreur; ces électricités communiquées pouvant être préciſément & reſpectivement l'inverſe l'une de l'autre. En effet, ſi le haſard eût voulu qu'on eût commencé à électriſer les corps, en les faiſant communiquer avec le couſſin, au lieu de les faire communiquer avec le conducteur, ce qui eût été très-poſſible, on eût trouvé que l'électricité communiquée par le verre, au lieu d'être *vitrée* ou *en plus*, auroit été *réſineuſe* ou *en moins,* & reſpectivement, que l'électricité produite par le ſoufre, au lieu d'être *réſineuſe* ou *en moins*, auroit été *vitrée* ou *en plus.* On ſent par-là combien ſe ſont trompés les Phyſiciens qui ont prétendu que l'électricité *en moins* étoit plus foible que l'autre, en voulant toujours la juger ſur celle que donne le ſoufre, puiſque dans la réalité, cette électricité ſe produit par le verre comme par le ſoufre, ainſi qu'on vient de le voir. Enfin, dans la dénomination actuelle des choſes, l'électricité *en moins*, qu'excite le verre dans les couſſins ou les corps qui le frottent, eſt tout auſſi forte que l'électricité *en plus* qu'il produit dans les conducteurs ou les corps qui le touchent, comme je l'ai expérimenté & prouvé cent & cent fois.

Les phénomènes qui caractériſent ces deux électricités, & que j'ai découverts, comme je l'ai dit il y a près de dix-neuf ans, ſont, 1.° *l'aigrette* qu'on voit aux pointes des corps métalliques électriſés en plus, aigrette formée par la ſortie du

fluide électrique, qui étant condensé dans ces corps, s'en échappe; 2.° *le point lumineux* ou le point de lumière que l'on observe aux extrémités des pointes de métal qu'on présente aux corps électrisés *en plus*, &c. & qui est produit par le fluide électrique qui y entre. Ces diverses apparences sont représentées dans la *figure 3* en *P.* Dans l'électricité *en moins*, ces différens feux se trouvent placés d'une manière directement opposée à ce qu'ils sont dans l'électricité *en plus*, comme on peut le voir dans la même figure en *M;* c'est-à-dire, que le corps électrisé de cette façon a *le point lumineux,* parce que le fluide électrique y étant raréfié, celui de l'air & des corps circonvoisins y affluent de toutes parts; & au contraire, le corps qu'on en approche a *une aigrette,* quoiqu'il ne soit pas électrique, ce qu'il est très-essentiel de remarquer. Il résulte de-là évidemment, que la relation entre la densité du fluide électrique dans ce dernier corps, qui n'est pas électrisé, & celle de celui qui l'est au contraire *en moins*, est exactement du même genre que celle qui se trouve entre un corps électrisé *en plus*, & celui qui ne l'est en aucune façon.

Je demande grâce pour ce long détail, mais il étoit absolument nécessaire pour donner une juste idée de la nature de ces différentes électricités, & de l'usage de la nouvelle machine que je vais faire connoître en peu de mots.

Un coup-d'œil sur le dessin de la *figure 1*, suffit pour découvrir qu'elle est construite conformément à ce que j'ai annoncé. On voit en effet qu'elle est composée d'un plateau ou d'une roue de verre *PP*, avec une manivelle; de deux coussins *CC*, soutenus par un ressort *R*, dont on règle la pression contre le plateau, au moyen de deux vis & d'un support *S*, qui sert à porter le tout; ce support est de verre, comme je l'ai dit, pour qu'on puisse isoler les coussins quand on le juge à propos. Je ne m'étendrai pas davantage sur cette machine, j'ajouterai seulement que les coussins sont mobiles sur leur centre, pour qu'on puisse changer à volonté la position du grain ou des fibres de leur étoffe, relativement au sens dans lequel le plateau tourne. J'ai cherché par ce petit artifice

à remédier à la diminution d'électricité qu'on obſerve ſouvent quand les couſſins ont frotté un certain temps *(c)*; car les aſpérités de leur ſurface ſe couchant dans le ſens où le frottement ſe fait, perdent par-là ce mordant, ſi cela ſe peut dire, qui excite, dans les fibres des deux ſurfaces frottées, une ſorte d'effet, ou peut-être de vibration, d'où naît l'électricité; & cette diminution de la vertu électrique paroît tenir tellement à cette cauſe, qu'il ſuffit ſouvent de changer la poſition des couſſins pour la ranimer.

Cet effet a beaucoup de rapport avec ce qu'on obſerve dans les inſtrumens à corde, dont on n'excite les vibrations ou qu'on ne fait réſonner que par le frottement; car, pour qu'ils donnent beaucoup de ſon, il faut que ce frottement ſoit accompagné d'une adhérence paſſagère ou d'un *grippement*, ſi cela ſe peut dire, entre les ſuperficies frottantes: de-là l'uſage de frotter de colophane les archets de ces inſtrumens pour qu'en conſéquence du mordant ou du grippement qui en réſulte, ils rendent un ſon fort, plein & agréable. Revenons à la nouvelle machine.

Je viens de la décrire, je dois actuellement en montrer l'uſage, ou comment elle donne les deux électricités *en plus* & *en moins*, ou ſéparément, ou toutes les deux enſemble.

Pour avoir la première ſeulement, une perſonne poſant ſur le plancher, mettra la main ſur les couſſins ou ſur le conducteur *M*, porté ſur du verre, & cenſé communiquer immédiatement avec ces couſſins par une chaîne de métal ou autrement, & la machine donnera l'électricité *en plus*; car cette perſonne touchant les couſſins ou leur conducteur *M*, eſt préciſément dans le même cas que celle qui frotte le globe dans les machines ordinaires; les couſſins repréſentant ici les mains de cette perſonne; ainſi, dès qu'on tournera le plateau

Fig. 1.

(c) Il y a plus de quinze ans que j'ai pratiqué cet artifice dans des machines à électriſer. Je ne parlerois certainement pas de pareille choſe, ſi je ne voulois éviter qu'on pût croire que ce petit moyen a été employé d'après des machines dans leſquelles, depuis que ce Mémoire a été lû (on ſe ſouviendra que c'eſt en 1772), on a imité groſſièrement cette mécanique.

de verre, il s'électrisera par le frottement des coussins, comme le globe s'électrise par celui des mains dans ces machines, & ce plateau déposant son électricité sur le conducteur *P* isolé, & qui en est très-près, il l'électrisera *en plus* comme le globe électrise ceux qu'on en approche.

On aura donc une machine propre à faire, & avec succès, tous les effets des machines à électriser, ordinaires.

Veut-on à présent qu'elle donne uniquement l'électricité *en moins* ou *par raréfaction!* la personne passera de l'autre côté & posera la main sur le conducteur *P* du plateau, au lieu du conducteur *M* où elle l'avoit auparavant, & ce seul changement suffira pour que cette machine étant en action, donne l'électricité *en moins.* Car le plateau étant de verre, il pompera nécessairement le fluide électrique des coussins, & ces coussins communiquant avec le conducteur *M*, ils ne pourront perdre de leur fluide, qu'ils n'en enlèvent en même temps à ce conducteur: or étant isolé comme eux, il ne pourra recevoir des corps environnans le fluide qu'il a perdu; il restera donc, ainsi que les coussins, privé d'une partie du fluide qu'il avoit auparavant; il sera donc électrisé *en moins,* & la machine dans cette disposition étant une vraie pompe à tirer ou pomper le fluide électrique des corps, elle sera propre à faire toutes les expériences de l'électricité *en moins* ou *par raréfaction.*

En expliquant l'usage de cette machine, j'ai supposé qu'une personne mettoit la main, tantôt sur le conducteur *M* du coussin, & tantôt sur celui du plateau *P*, mais je n'ai fait cette supposition que pour qu'on m'entendît plus facilement; car un fil de fer ou de cuivre, ou tel autre corps métallique faisant alternativement la communication entre l'un ou l'autre de ces conducteurs & le plancher, peut y être employé également.

Je fais cette observation d'autant plus volontiers, qu'on a imaginé que les corps animés avoient en cela quelques prérogatives sur les autres corps électrisables par communication; sur-tout d'après l'idée de quelques personnes, que le fluide nerveux est le même que le fluide électrique;

mais rien n'eſt moins prouvé que l'identité de ces deux fluides, & ne ſemble plus contraire à l'expérience, puiſque les morts, au moins ceux qui le ſont nouvellement, jouiſſent du même avantage, à cet égard, que les vivans. Nous ne tenons cette propriété d'être électriſables par communication, ou de tranſmettre l'électricité, ce qui eſt la même choſe, que de ce que nous ſommes formés d'un nombre infini de vaiſſeaux remplis d'un fluide aqueux: ainſi nous ne différons, à ce ſujet, en aucune façon, d'une machine hydraulique, compoſée de beaucoup de canaux tous remplis d'eau. Il n'y auroit certainement aucune merveille à ce que cette machine tranſmît l'électricité, étant remplie d'un fluide qui en a la propriété: l'expérience même en a été faite à Genève par M.rs Deluc, citoyens de cette ville.

Mais ceci montre, pour le dire en paſſant, l'erreur de ceux qui ont prétendu que certains individus, par une privation qui révolte la Nature, perdent la propriété de communiquer le fluide électrique, ou ce qui eſt égal, de recevoir & de tranſmettre la commotion de Leyde. Lorſque la nouvelle s'en répandit, je fis voir à l'Académie, par l'analogie des faits, que la choſe étoit impoſſible. En effet un homme mort étant à cet égard dans le même cas exactement qu'un homme vivant, il tranſmettroit la commotion comme l'homme le plus robuſte: la différence dans le tempérament, dans l'âge, dans le ſexe, dans la conformation ne pouvant rien changer dans une propriété qui réſulte eſſentiellement de la nature du corps humain; mais je me reprocherois d'inſiſter davantage ſur une choſe auſſi peu équivoque, mon opinion ayant été d'ailleurs pleinement confirmée par l'expérience qu'a fait faire à ce ſujet un grand Prince *(d)* qui annonce ce goût pour les Sciences, & cette protection éclairée des Savans, héréditaire dans ſa Maiſon.

(d) M.gr le Duc de Chartres fit faire, à peu-près vers le mois de Mars 1772, cette expérience ſur pluſieurs Chanteurs Italiens, qu'on avoit raſſemblés au Palais royal; ils reſſentirent tous la commotion de Leyde auſſi vivement que les autres perſonnes qui faiſoient partie de la chaîne, ou du circuit néceſſaire dans cette expérience.

Je me hâte de rentrer en matière; mais j'ai cru qu'on me pardonneroit cette digreſſion en faveur du ſujet.

J'ai montré comment avec la nouvelle machine on fait l'électricité *en plus* & l'électricité *en moins* ſéparément; il faut faire voir actuellement comment elle produit ces deux électricités en même temps: rien de plus facile; il ſuffira qu'aucun des conducteurs ne communique avec le plancher, & elle donnera les deux électricités tout-à-la-fois, c'eſt-à-dire, que le conducteur du plateau *P* aura l'électricité *en plus*, & celui des couſſins *M* l'électricité *en moins*.

On pourra en conſéquence faire avec les électricités de chacun de ces conducteurs, non-ſeulement les expériences qui en dépendent, mais encore toutes celles qui appartiennent à la combinaiſon de ces deux électricités; comme, par exemple, de charger la bouteille de Leyde, en faiſant communiquer ſon crochet avec un des conducteurs, & ſa panſe avec l'autre, ce qui ſe fait en un inſtant, & qui ſeroit abſolument impoſſible, ſi leur électricité étoit du même genre. On fait de même & avec une égale facilité l'expérience de la deſtruction des deux électricités contraires, rapportées dans le Mémoire de 1753 que j'ai déjà cité; car en faiſant communiquer *métalliquement* enſemble les deux conducteurs, au moyen d'un fil de fer ou de tout autre métal, on verra dans un inſtant leur électricité diſparoître; la raiſon en eſt bien ſimple : dans le conducteur *P*, le fluide électrique eſt condenſé préciſément autant qu'il eſt raréfié dans l'autre conducteur *M*. Or, lorſqu'ils communiquent enſemble, le fluide rentre dans tous les deux, dans ſon état de denſité ordinaire, le conducteur *P* donnant à l'autre *M* ce qu'il avoit de plus que cette denſité; l'équilibre doit donc en conſéquence être entièrement rétabli, & ainſi l'électricité détruite, comme il réſulte de tout ce que j'ai dit au commencement, ſur la cauſe des phénomènes électriques. On pourra encore, avec cette machine, voir tout-à-la-fois, par nombre de combinaiſons différentes, comment les corps électriſés *en plus*, ont des aigrettes, & ceux qu'on leur préſente, des points lumineux, & au contraire comment ceux qui ſont électriſés *en moins*, ont ces derniers

feux, & ceux qu'on leur présente, des aigrettes, &c. Je pourrois rapporter encore nombre d'autres expériences; mais j'en ai dit assez pour faire connoître l'usage & les propriétés de cette machine, & la facilité avec laquelle on peut s'en servir. En effet, on peut, par son moyen, démontrer en moins d'une demi-heure les phénomènes principaux des deux électricités, & tous ceux qui résultent de leur combinaison, tandis qu'avec les machines ordinaires, cela ne se fait qu'avec assez de peine & d'embarras. Il y a lieu de croire même que la difficulté de produire facilement l'électricité en moins, a été une des causes qui ont porté des Physiciens qui n'alloient pas au-delà du témoignage de leurs sens, à la regarder comme moins forte que l'électricité *en plus*, disposés en cela, par ce qu'ils observoient dans le soufre; mais avec la nouvelle machine, ces doutes ne subsisteront plus, par la facilité qu'on aura de se convaincre de tout ce que j'ai avancé sur ces deux électricités; enfin la difficulté dont je viens de parler, est cause qu'on n'a fait que peu d'expériences avec l'électricité *en moins;* cependant il y a peut-être plusieurs phénomènes nouveaux & curieux à découvrir, en employant cette électricité, & ce sera encore un avantage de cette machine.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

LA *Figure première* représente en perspective toute la machine, montée ou placée sur une table *TT.*

PP est le plateau ou la roue de verre portée par les deux montans, dont on ne voit que celui qui est en devant, désigné par les lettres *OO.*

LL est la manivelle adaptée à l'arbre pour faire tourner le plateau.

CC sont les coussins qui frottent ce plateau.

RR le ressort par lequel sont portés les coussins, pour que leur frottement soit plus liant.

SS le support de verre sur lequel est fixé le ressort qui porte les coussins; support destiné par sa nature à les isoler à volonté.

La Figure seconde comprend en détail toutes les différentes parties du coussin, du ressort & de sa monture.

CC sont les coussins garnis de maroquin dans la partie qu'on ne voit pas, & bordés autour par une bande large & épaisse d'une étoffe de soie, pour

empêcher le fluide électrique que le verre pompe des coussins, n'y retourne quand il est sorti de dessous. Cette précaution est très-essentielle; car sans cela il y a beaucoup d'électricité de perdue.

C I est un coussin avec sa tige *t*, d'où le petit cercle de bois marqué *B* a été ôté afin qu'on voye cette tige *t*.

C B est un coussin recouvert de ce petit cercle de bois.

S est un trou dans ce cercle de bois où entre l'extrémité *V* de la vis adaptée au ressort *R*.

K est un petit trou où entre une cheville d'acier *h*, pour que ce petit cercle de bois fasse corps avec le ressort.

R le ressort avec la pièce *E* de cuivre qui entre sur la tige *g*, adaptée au support de verre, & la pièce *L* qui sert à la serrer par-dessus; ce ressort *R* tourne autour d'une vis que porte la pièce *E*, afin qu'avec ce mouvement & le mouvement horizontal, il puisse prendre toutes les positions convenables. Lorsque le tout est monté, comme dans la *figure première*, le bout de la vis *V* appuyant dans le trou *S*, presse le coussin contre le plateau, & la cheville *h* qui passe à travers la lame du ressort, entrant dans le trou *K*, fait faire corps à ce petit cercle de bois avec ce ressort, de façon que la tige du coussin, entrant dans ce trou *B*, il peut tourner, sans qu'il y ait rien de changé dans le cercle de bois, en sorte que la pression du coussin reste toujours la même. Ceci sert à produire l'effet dont on a parlé dans le Mémoire, relativement à la nécessité de pouvoir changer la position des coussins à volonté pour entretenir l'égalité de l'électricité.

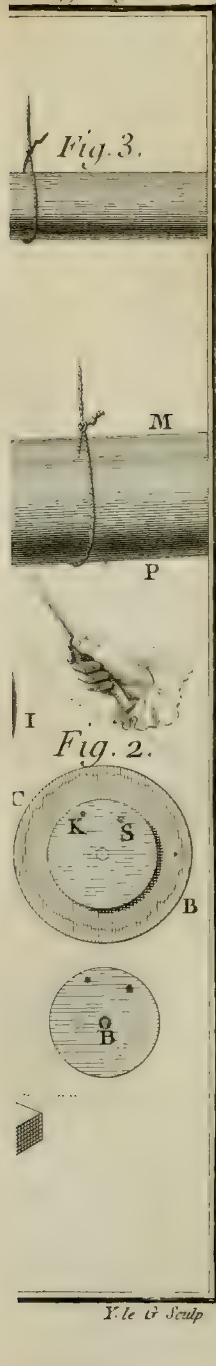
La Figure troisième représente

En *P*, *un conducteur électrisé en plus*, avec *une aigrette* à son extrémité, & au-dessous une main portant une pointe; ayant en conséquence de l'*électricité en plus* du conducteur, *un point lumineux*.

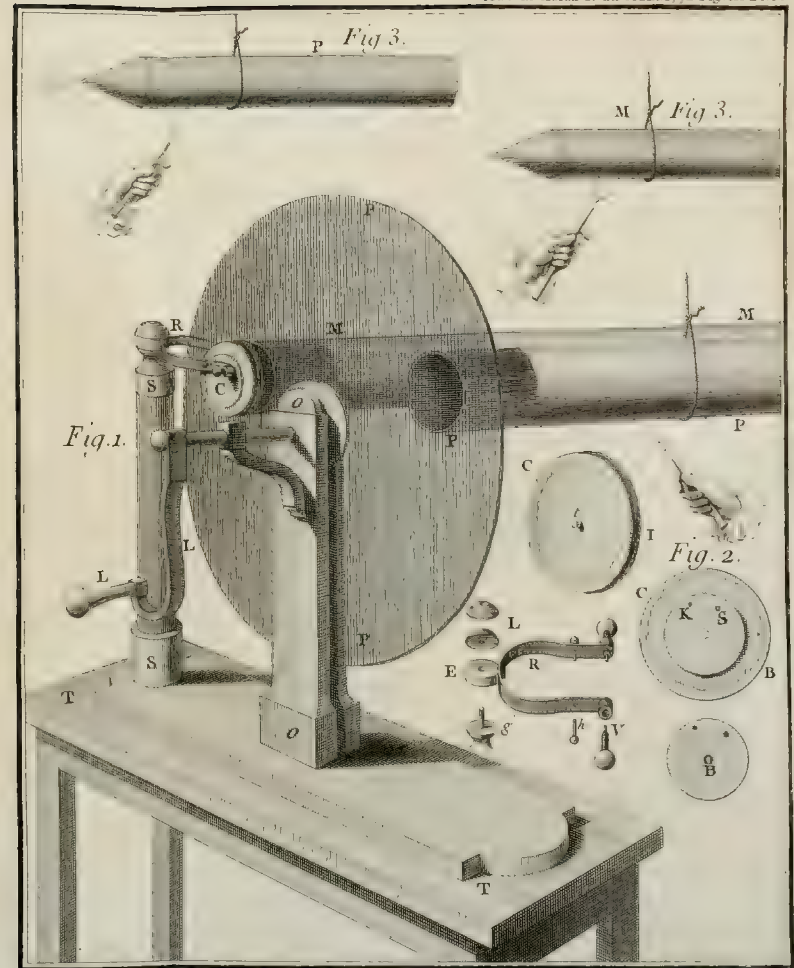
En *M*, *un conducteur électrisé en moins*, avec un *point lumineux* à son extrémité, & au-dessous une main portant une pointe, ayant en conséquence de l'*électricité en moins*, du conducteur, *une aigrette*.

Je pourrois ajouter encore beaucoup de choses sur cette machine, mais j'en ai dit assez pour ceux qui sont au fait de ces matières; ils les imagineront facilement.

RECHERCHES



Y. le G. Sculp



Fossier del.

Y le G Sculp

RECHERCHES
SUR LA
MANIÈRE DE FORMER DES TABLES
DES PLANÈTES,
D'APRÈS LES SEULES OBSERVATIONS.

Par M. DE LA GRANGE.

ON s'occupe depuis long-temps à rechercher *à priori* les inégalités des mouvemens des Planètes d'après les principes de la gravitation universelle; mais personne, que je sache, n'a encore entrepris de donner des méthodes directes & générales pour trouver ces mêmes inégalités *à posteriori*; c'est-à-dire, d'après les observations seules. C'est à remplir ce dernier objet dans toute son étendue, qu'est destiné le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie Royale des Sciences; heureux si cette illustre Compagnie daigne recevoir avec indulgence ce fruit de mon travail sur une matière, qui a, à la vérité, plus d'utilité que de difficulté; mais qui ne me paroît par-là que plus digne de son attention.

HYPOTHÈSE.

(1.) Les inégalités des mouvemens des Planètes peuvent être représentées par une suite de termes de la forme A sin. φ, A étant un coëfficient constant, & φ un angle qui augmente uniformément.

REMARQUE I.

(2.) C'est sur ce principe que sont fondées toutes les Tables des Planètes; chaque terme tel que A sin. φ s'appelle une équation, dont A est le coëfficient ou la plus grande valeur, & φ l'argument.

Les Anciens, qui ne vouloient admettre dans le ſyſtème du monde que des mouvemens circulaires & uniformes, repréſentoient toutes les irrégularités des mouvemens des corps céleſtes par des cercles excentriques & par des épicycles; or, il eſt facile de prouver que tant que l'excentricité eſt aſſez petite, & que les rayons des épicycles ſont auſſi aſſez petits par rapport à celui du cercle principal, les irrégularités que l'on trouve par ce moyen, peuvent toujours s'exprimer par une ſuite de termes de la forme A ſin. φ.

En effet, ſi on conſidère un cercle dont le rayon ſoit a, & qui ſoit chargé d'un épicycle dont le rayon ſoit $m\,a$, & qu'on ſuppoſe que tandis que le centre de cet épicycle ſe meut ſur la circonférence du cercle principal, en décrivant autour de ſon centre l'angle t, un corps ſe meuve ſur la circonférence de l'épicycle, en décrivant autour de ſon centre l'angle φ, on trouvera que ce corps décrira autour du centre du cercle principal un angle $= t + x$, où x ſera tel que $\text{tang.}\, x = \frac{m\, \text{ſin.}\, \varphi}{1 + m \,\text{coſ.}\, \varphi}$, en ſorte que l'angle x exprimera l'inégalité du mouvement provenante de l'épicycle. Or, ſi on ſuppoſe le rayon $m\,a$ fort petit par rapport au rayon a, on aura pour m une fraction fort petite, & l'on aura par les ſéries,

$$\text{tang.}\, x = m \,\text{ſin.}\, \varphi\, (1 - m \,\text{coſ.}\, \varphi + m^2 \,\text{coſ.}\, \varphi^2 - \&c.);$$

mais $x = \text{tang.}\, x - \frac{\text{tang.}\, x^3}{3} + \&c.$ Donc, ſubſtituant la valeur de tang. x, & réduiſant les puiſſances & les produits de ſin. φ & de coſ. φ en ſinus & coſinus d'angles multiples de φ, on aura pour x cette ſérie aſſez ſimple,

$$x = m \,\text{ſin.}\, \varphi - \frac{m^2 \,\text{ſin.}\, 2\,\varphi}{2} + \frac{m^3 \,\text{ſin.}\, 3\,\varphi}{3} - \frac{m^4 \,\text{ſin.}\, 4\,\varphi}{4} + \&c.$$

Si on imaginoit un ſecond épicycle dont le rayon fût $= n\,a$, & dont le centre décrivit la circonférence du premier épicycle, tandis que le mobile décrit la circonférence de

ce ſecond épicycle, en parcourant autour de ſon centre des angles ψ dans le même temps que ſont parcourus les angles t & φ, on trouveroit que l'angle parcouru par le mobile autour du cercle principal ſeroit $= t + x$, où l'angle x, qui repréſente l'inégalité du mouvement ſera tel que

$$\text{tang. } x = \frac{m \text{ ſin. } \varphi + n \text{ ſin. } (\varphi + \psi)}{1 + m \text{ coſ. } \varphi + n \text{ coſ. } (\varphi + \psi)},$$

d'où, en ſuppoſant m & n fort petits, il eſt facile de tirer la valeur de x exprimée par une ſuite de ſinus.

S'il y avoit un troiſième épicycle dont le rayon fût pa, & ſur la circonférence duquel le mobile fût mu en parcourant autour de ſon centre des angles ξ, on trouveroit que l'inégalité x ſeroit déterminée par l'équation

$$\text{tang. } x = \frac{m \text{ ſin. } \varphi + n \text{ ſin. } (\varphi + \psi) + p \text{ ſin. } (\varphi + \psi + \xi)}{1 + m \text{ coſ. } \varphi + \psi \text{ coſ. } (\varphi + \psi) + p \text{ coſ. } (\varphi + \psi + \xi)},$$

& ainſi de ſuite.

Si on ſuppoſe un cercle excentrique dont le rayon ſoit a, & l'excentricité $= ma$, on trouvera que tandis que le mobiſe parcourt autour du centre du cercle, l'angle t, il parcourra autour du point qui eſt pris pour le centre du mouvement apparent, un angle $t + x$, en ſorte que $\text{tang. } x = \frac{m \text{ ſin. } t}{1 + m \text{ coſ. } t}$; d'où l'on voit que c'eſt la même choſe que ſi le cercle étoit ſuppoſé homocentrique, & qu'il portât un épicycle dont le rayon fût ma, & dont la circonférence fût parcourue par le mobile d'un mouvement angulaire égal à celui dont le centre de cet épicycle parcourt la circonférence du cercle principal; c'eſt ce qui a déjà été remarqué par Ptolémée.

De-là on voit auſſi que le cas d'un épicycle porté par un excentrique, ſera le même que celui d'un homocentrique qui portera deux épicycles, & ainſi de ſuite.

Remarque II.

(3.) Dans l'Aſtronomie moderne, on explique les prin-

cipales inégalités des Planètes par la figure elliptique de leurs orbites, & par la loi des aires proportionnelles au temps, d'où résulte l'inégalité qu'on appelle équation du centre, & qui est, comme l'on sait, exprimée par la série

$$-2\varepsilon \sin. \varphi + \frac{5\varepsilon^2}{4} \sin. 2\varphi + \frac{\varepsilon^3}{4} \sin. \varphi - \frac{13\varepsilon^3}{12} \sin. 3\varphi + \&c:$$

ε étant l'excentricité, & φ l'angle de l'anomalie moyenne, qui est proportionnelle au temps. La loi de cette série n'est pas facile à trouver, sur-tout en employant la méthode ordinaire, suivant laquelle on cherche d'abord l'anomalie moyenne par la vraie, & ensuite on déduit celle-ci de celle-là par le retour de la série; mais on peut y parvenir par la méthode que j'ai donnée ailleurs *(Mém. de Berlin, 1769)*.

Quant aux autres inégalités des Planètes, c'est par le principe de la gravitation universelle qu'on tâche de les déterminer, & les calculs faits d'après ce principe donnent toujours des équations dont les argumens dépendent des lieux moyens des Planètes, de ceux de leurs aphélies, & de leurs nœuds.

En général, la figure presque circulaire des orbites des Planètes, fait que les forces perturbatrices qui viennent de leur attraction réciproque peuvent être exprimées par des séries plus ou moins convergentes & composées uniquement de sinus ou cosinus; circonstance sans laquelle il seroit comme impossible de déterminer d'une manière générale l'effet de ces perturbations.

Remarque III.

(4.) Il y a cependant une espèce d'inégalités qui paroît faire une exception à la règle générale; je parle des inégalités séculaires qui augmentent comme les carrés des temps: mais d'un côté il paroît très-probable que ces sortes d'inégalités ne sont qu'apparentes, & ne viennent que de quelques équations dont les argumens ne varient que très-peu, en sorte que leur période est très-longue; de l'autre, elles ne sont, à proprement parler, que des cas particuliers de la formule

générale, comme nous le ferons voir dans la suite de ce Mémoire. D'ailleurs il est toujours possible de se débarrasser d'avance de ces sortes d'inégalités; & nous fournirons pour cela des moyens aussi simples que commodes.

Ire PROPOSITION.

THÉORÈME.

(5.) *Toute série dont un terme quelconque est représenté par la formule*

$$A\,\text{sin.}\,(a + m\alpha) + B\,\text{sin.}\,(b + m\beta) + C\,\text{sin.}\,(c + m\gamma) + \&c.$$

m *étant le nombre des termes précédens, est une série récurrente dont l'échelle de relation dépend uniquement des angles* α, β, γ, &c.

Dénotons en général par T, T', T'', T''', &c. $T^{(m)}$, $T^{(m+1)}$, &c. les termes de la série proposée, en sorte que l'on ait

$$T^{(m)} = A\,\text{sin.}\,(a + m\alpha) + B\,\text{sin.}\,(b + m\beta) + C\,\text{sin.}\,(c + m\gamma) + \&c.$$

& examinons la nature de la suite infinie

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + \&c. + T^{(m)}x^m + T^{(m+1)}x^{m+1} + \&c.$$

On sait que $\text{sin.}\,\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; donc faisant pour abréger

$$K = \frac{Ae^{a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ L = -\frac{Ae^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ p = e^{\alpha\sqrt{-1}},\ q = e^{-\alpha\sqrt{-1}},$$

on aura $A\,\text{sin.}\,(a + m\alpha) = Kp^m + Lq^m$; de même si on fait

$$M = \frac{Be^{b\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ N = -\frac{Be^{-b\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ r = e^{\beta\sqrt{-1}},\ s = e^{-\beta\sqrt{-1}},$$

$$P = \frac{Ce^{c\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ Q = -\frac{Ce^{-c\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ t = e^{\gamma\sqrt{-1}},\ u = e^{-\gamma\sqrt{-1}},$$
&c.

on aura

$$B\,\text{ſin.}\,(b + m\beta) = Mr^m + Ns^m,$$
$$C\,\text{ſin.}\,(c + m\gamma) = Pt^m + Qu^m,\ \&c.$$

& le terme général $T^{(m)}$ prendra cette forme,

$$T^{(m)} = Kp^m + Lq^m + Mr^m + Ns^m + Pt^m + Qu^m + \&c.$$

D'où l'on voit que la ſuite

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + \&c.$$

n'eſt autre choſe que la ſomme de pluſieurs ſéries géométriques, dont les premiers termes ſont K, L, M, &c. & dont les raiſons ſont px, qx, rx, &c. de ſorte qu'en ſommant chacune de ces ſéries géométriques, on aura la valeur de toute la ſérie,

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + \&c.$$

On aura donc de cette manière l'équation identique

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{IV}x^4 + \&c.$$
$$= \frac{K}{1 - px} + \frac{L}{1 - qx} + \frac{M}{1 - rx} + \frac{N}{1 - sx} + \&c.$$

& il eſt clair qu'en réduiſant au même dénominateur les fractions qui compoſent le ſecond membre de cette équation, & dont nous ſuppoſerons que le nombre ſoit n, ce ſecond membre ſe transformera en une fraction unique de la forme

$$\frac{[0] + [1]x + [2]x^2 + [3]x^3 + \&c. + [n-1]x^{n-1}}{(0) + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + \&c. + (n)x^n},$$

où les nombres 0, 1, 2, 3, &c. renfermés dans des crochets quarrés ou ronds, déſignent des coëfficiens différens qui dépendent des quantités K, L, M, N, &c. p, q, r, s, &c. Et comme le dénominateur de cette fraction doit être égal au produit des n dénominateurs, $1 - px$, $1 - qx$, $1 - rx$, $1 - sx$, &c. il eſt d'abord évident qu'on aura

$(0) = 1,$

$(1) = -p - q - r - s -$ &c.

$(2) = pq + pr + ps +$ &c. $+ qr + qs +$ &c.

$(3) = -pqr - pqs - qrs -$ &c.

&c.

de ſorte que les coëfficiens (0), (1), (2), (3), &c. du dénominateur de la fraction dont il s'agit, ſeront donnés uniquement par les quantités p, q, r, s, &c.

Ainſi la ſérie propoſée ſera égale à cette dernière fraction, que nous appellerons par conſéquent *fraction génératrice* de la ſérie; d'où il eſt facile de conclure que la même ſérie ſera du genre de celles qu'on nomme *récurrentes*, & dont la propriété eſt qu'un terme quelconque, ſe forme de l'addition d'un certain nombre de termes précédens, multipliés chacun par un coëfficient donné; car en multipliant la ſérie

$$T + T'x + T''x^2 + \text{\&c.}$$

par le dénominateur $1 + (1)x + (2)x^2 +$ &c. $+ (n)x^n$, & comparant les termes du produit avec le numérateur $[0] + [1]x + [2]x^2 +$ &c. $+ [n-1]x^{n-1}$, on a les équations

$$T = [0]$$

$$T' = -(1)T + [1]$$

$$T'' = -(1)T' - (2)T + [2]$$

$$T''' = -(1)T'' - (2)T' - (3)T + [3].$$

&c.

$$T^{(n-1)} = -(1)T^{(n-2)} - (2)T^{(n-3)} - \text{\&c.} - (n-1)T + [n-1]$$

$$T^{(n)} = -(1)T^{(n-1)} - (2)T^{(n-2)} - \text{\&c.} - (n)T,$$

$$T^{(n+1)} = -(1)T^{(n)} - (2)T^{(n-1)} - \text{\&c.} - (n)T',$$

&c.

& en général

$$T^{(m)} = -(1)T^{(m-1)} - (2)T^{(m-2)} - \text{\&c.} - (n)T^{(m-n)},$$

où les coëfficiens — (1), — (2), — (3), &c. — (n) forment ce qu'on appelle d'après M. Moivre, l'échelle de la série récurrente.

COROLLAIRE I.

(6.) Puisque $p = e^{\alpha\sqrt{-1}}$, & $q = e^{-\alpha\sqrt{-1}}$, on aura $p + q = e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}} = 2$ cos. α & $pq = 1$; de même $r + s = 2$ cos. β, $t + u = 2$ cos. γ, $tu = 1$, & ainsi de suite; donc on aura

$$(1 - px)(1 - qx) = 1 - 2 \text{ cos. } \alpha x + x^2,$$
$$(1 - rx)(1 - sx) = 1 - 2 \text{ cos. } \beta x + x^2,$$
$$(1 - tx)(1 - ux) = 1 - 2 \text{ cos. } \gamma x + x^2,$$
&c.

Par conséquent le dénominateur

$$1 + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + \text{\&c.} + (n)x^n.$$

sera le produit de ces $\frac{n}{2}$ facteurs doubles.

$$1 - 2 \text{ cos. } \alpha x + x^2,$$
$$1 - 2 \text{ cos. } \beta x + x^2,$$
$$1 - 2 \text{ cos. } \gamma x + x^2,$$
&c.

D'où il est facile de conclure qu'on aura nécessairement $(n) = 1$, $(n - 1) = (1)$, $(n - 2) = (2)$ &c. c'est-à-dire que les coëfficiens des termes extrêmes, ainsi que ceux des termes équidistans des extrêmes, seront les mêmes; ce qui est la propriété des polynomes qu'on appelle *réciproques.*

Or pour trouver facilement les valeurs des coëfficiens (1), (2), (3), &c. $\left(\frac{n}{2}\right)$ en cos. α, cos. β, cos. γ, &c. On mettra le polynome en question sous la forme suivante, en faisant pour plus de simplicité $n = 2\nu$

$$1 + x^{2\nu} + (1)x.(1 + x^{2\nu-2}) + (2)x^2.(1 + x^{2\nu-4}) + \text{\&c.} + (\nu)x^\nu,$$

ensuite

ensuite on supposera $1 + x^2 = xz$, & l'on remarquera que $(1 + x^2)^2 = 1 + 2x^2 + x^4 = x^2z^2$; d'où $1 + x^4 = x^2(z^2 - 2)$; $(1 + x^2)^3 = 1 + x^6 + 3x^2(1 + x^2) = x^3z^3$; d'où $1 + x^6 = x^3(z^3 - 3z)$; & en général

$$1 + x^{2\mu} = x^{\mu}\left(z^{\mu} - \mu z^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-3)}{2} z^{\mu-4} - \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{2.3} z^{\mu-6} + \&c.\right);$$

en ne continuant cette série que tant que l'on aura des puissances positives de z.

On fera donc ces substitutions, & divisant ensuite tous les termes par x^{ν}, il viendra un polynome en z de la forme

$$z^{\nu} + [(1)]z^{\nu-1} + [(2)]z^{\nu-2} + [(3)]z^{\nu-3} + \&c. + [(\nu)],$$

où l'on aura

$$[(1)] = (1),$$
$$[(2)] = (2) - \nu,$$
$$[(3)] = (3) - (\nu - 1)(1),$$
$$[(4)] = (4) - (\nu - 2)(2) + \frac{\nu(\nu-3)}{2},$$
$$[(5)] = (5) - (\nu - 3)(3) + \frac{(\nu-1)(\nu-4)}{2}(1),$$
&c.

De même si on substitue xz à la place de $1 + x^2$ dans le produit des ν trinomes

$$1 - 2\,\text{cos}.\alpha.\,x + x^2,\quad 1 - 2\,\text{cos}.\beta.\,x + x^2,\ \&c.$$

& qu'on divise ce produit par x^{ν}, on aura celui-ci:

$$(z - 2\,\text{cos}.\alpha)(z - 2\,\text{cos}.\beta)(z - 2\,\text{cos}.\gamma)\ldots\ldots;$$

lequel devant être identique avec le polynome précédent, on en conclura aisément les valeurs des coëfficiens $[(1)]$, $[(2)]$, $[(3)]$ &c. & de-là celles des coëfficiens (1), (2), (3) &c.

Quoique les formules précédentes ſoient connues depuis long-temps, j'ai cru devoir les donner ici, parce que j'aurai occaſion d'en faire uſage dans la ſuite.

Quant aux coëfficiens [0], [1], [2] &c. du numérateur, il eſt très-facile de les déterminer par le moyen des équations trouvées dans l'article précédent, leſquelles donnent:

$[0] = T,$
$[1] = T' + (1)T,$
$[2] = T'' + (1)T' + (2)T,$
$[3] = T''' + (1)T'' + (2)T' + (3)T,$
&c.

COROLLAIRE II.

7. On voit par l'analyſe du Problème précédent, que non-ſeulement toute ſuite compoſée de ſinus d'angles qui croiſſent en progreſſion arithmétique, mais en général toute ſuite compoſée de termes qui procèdent en progreſſion géométrique, eſt une récurrente d'un ordre égal au nombre de ces termes.

Il eſt facile de prouver de même que toute ſuite algébrique qui a des différences conſtantes d'un ordre quelconque, multipliée, ſi l'on veut, terme-à-terme par une ſérie géométrique quelconque, eſt une ſuite récurrente d'un ordre ſupérieur d'une unité; & qu'en général toute ſuite formée par l'addition de deux ou de pluſieurs ſuites de cette eſpèce, ſera pareillement récurrente d'un ordre égal à la ſomme de ceux de chaque ſuite particulière.

En effet, on ſait que la ſomme d'une ſuite infinie, dont le terme général ſera $(m+1)p^m x^m$, eſt exprimée par $\frac{1}{(1-px)^2}$, que celle dont le terme général ſera $\frac{(m+1)(m+2)}{2} p^m x^m$ eſt exprimée par $\frac{1}{(1-px)^3}$, que celle dont le terme général ſera $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} p^m x^m$, eſt exprimée par $\frac{1}{(1-px)^4}$, & ainſi de ſuite; donc la ſomme de la ſuite qui aura le

terme général

$$[K + (m+1)K1 + \frac{(m+1)(m+2)K2}{2} + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)K3}{2.3} + \&c.$$

$$+ \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+\mu-1)K(\mu-1)}{2.3\ldots\ldots\mu-1}]p^m x^m$$

fera égale à

$$\frac{K}{1-px} + \frac{K1}{(1-px)^2} + \frac{K2}{(1-px)^3} + \&c. + \frac{K(\mu-1)}{(1-px)^\mu},$$

c'est-à-dire à la fraction fimple

$$\frac{K(1-px)^{\mu-1} + K1(1-px)^{\mu-2} + K2(1-px)^{\mu-3} + \&c. + K(\mu-1)}{(1-px)^\mu}.$$

d'où il s'enfuit que fi l'on a une férie dont le terme général foit repréfenté par la formule

$$(K + K'm + K''m^2 + K'''m^3 + \&c. + K^{(\mu-1)}m^{\mu-1})p^m x^m$$

il n'y aura qu'à chercher les quantités $K1$, $K2$, $K3$ &c. $K\mu-1$, en forte que l'on ait l'équation identique

$$K + K'm + K''m^2 + K'''m^3 + \&c. + K^{(\mu-1)}m^{\mu-1}$$

$$= K + K1\,(m+1) + K2\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$+ K3\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3} + \&c.$$

$$+ K(\mu-1)\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+\mu-1)}{1.3\ldots\mu-1};$$

& l'on aura pour la fomme de la férie, la fraction ci-deffus, dont le numérateur eft, comme l'on voit, un polynome du degré μ, & dont le dénominateur eft la puiffance $\mu+1$ du binome $1-px$; de forte que la férie propofée fera une férie récurrente de l'ordre $\mu+1$, & dont l'échelle de relation fera

$$\mu p, -\frac{\mu(\mu-1)}{2}p,^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}p,^3 \&c. \pm p^\mu$$

Quant aux coëfficiens $K1$, $K2$, $K3$, &c. il eft facile de les trouver de la manière fuivante. Qu'on fuppofe en

général

$$K + K' m + K'' m^2 + K''' m^3 + \&c. + K^{(\mu-1)} m^{\mu-1} = S,$$

& qu'on dénote par S', S'' S''', &c. les valeurs de S lorſque $m = -1, -2, -3,$ &c. on aura donc, en vertu de l'équation ſuppoſée

$$S' = K,$$
$$S'' = K - K1,$$
$$S''' = K - 2K1 + K2,$$
$$S^{IV} = K - 3K1 + 3K2 - K3,$$
&c.

D'où l'on tire

$$K = S',$$
$$-K1 = S'' - S',$$
$$K2 = S''' - 2S'' + S',$$
$$-K3 = S^{IV} - 3S''' + 3S'' - S',$$
&c.

En ſorte que les coëfficiens $K, K1, K2, K3,$ &c. ne ſeront autre choſe que les différences ſucceſſives des quantités S', S'', S''', &c. priſes alternativement en $-$ & en $+$.

Enfin, il eſt clair que ſi la ſuite propoſée eſt compoſée de pluſieurs ſuites de la forme précédente, il n'y aura qu'à ajouter enſemble les fractions qui expriment la ſomme de chacune de ces ſuites continuées à l'infini, & l'on aura une fraction unique qui ſera égale à la ſérie propoſée, & dont le dénominateur ſera de la forme $(1 - px)^{\mu} \cdot (1 - qx)^{\nu} \ldots$ De ſorte que cette ſérie ſera récurrente de l'ordre .... $\mu + 1 + \nu + 1 +$ &c. ayant pour échelle les coëfficiens pris négativement des puiſſances x, x^2, x^3, &c. du polynome qui réſultera du développement de la formule $(1 - px)^{\mu} \cdot (1 - qx)^{\nu} \ldots\ldots$

En général, si on a une suite récurrente quelconque,
$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{\text{IV}}x^4 + T^{\text{V}}x^5 +$ &c.
& qu'en dénotant par φ une fonction rationelle, & sans diviseur, d'une ou de plusieurs quantités, on forme les nouvelles séries

$$\Phi(T) + \varphi(T')x + \varphi(T'')x^2 + \varphi(T''')x^3 + \&c.$$
$$\varphi(T,T') + \varphi(T,'T'')x + \varphi(T,''T''')x^2 + \varphi(T,'''T^{\text{IV}})x^3 + \&c.$$
$$\varphi(T,T,'T'') + \varphi(T,'T,''T''')x + \varphi(T,''T,'''T^{\text{IV}})x^2 + \&c.$$

& ainsi de suite; toutes ces séries seront pareillement récurrentes, & on pourra en trouver l'échelle de relation, dès qu'on en aura formé le terme général à l'aide de celui de la série proposée; & ces nouvelles échelles pourront toujours s'exprimer par les seuls termes de l'échelle de la proposée; car la difficulté ne consistera qu'à chercher les coëfficiens d'une équation déjà donnée; Problème dont l'Algèbre fournit plusieurs solutions.

De plus, si dans la série proposée on ne prend les termes que de deux en deux, ou de trois en trois, ou, &c. les séries résultantes

$$T + T''x^2 + T^{\text{IV}}x^4 + T^{\text{VI}}x^6 + \&c.$$
$$T + T'''x^3 + T^{\text{VI}}x^6 + T^{\text{IX}}x^9 + \&c.$$
&c.

seront aussi récurrentes & du même ordre que la proposée; & il est facile de voir que si l'échelle de relation de celle-ci est représentée par le polynome $(1 - px)^{\mu} \times (1 - qx)^{\nu} \times \ldots$ celles des séries dont il s'agit le seront par les polynomes

$$(1 - p^2x^2)^{\mu} \times (1 - q^2x^2)^{\nu} \times \ldots$$
$$(1 - p^3x^3)^{\mu} \times (1 - q^3x^3)^{\nu} \times \ldots \&c.$$

ainsi, mettant x à la place de x^2, ou x^3, ou, &c. les séries

$$T + T''x + T^{\text{IV}}x^2 + T^{\text{VI}}x^3 + \&c.$$
$$T + T'''x + T^{\text{VI}}x^2 + T^{\text{IX}}x^3 + \&c.$$
&c.

ſeront récurrentes, & auront pour échelles de relation les polynomes

$$(1 - p^2 x)^\mu \times (1 - q^2 x)^\nu \times \ldots$$
$$(1 - p^3 x)^\mu \times (1 - q^3 x)^\nu \times \ldots \&c.$$

Enfin, ſi l'on a différentes ſéries récurrentes, telles que

$$T + T' x + T'' x^2 + T''' x^3 + T^{\text{IV}} x^4 + \&c.$$
$$V + V' x + V'' x^2 + V''' x^3 + V^{\text{IV}} x^4 + \&c.$$
$$X + X' x + X'' x^2 + X''' x^3 + X^{\text{IV}} x^4 + \&c.$$
&c.

& que l'on en compoſe une nouvelle de la forme

$$\varphi : (T, V, X, \ldots) + \varphi : (T', V', X' \ldots) x + \varphi : (T'', V'', X'' \ldots) x^2 + \&c.$$

celle-ci ſera encore récurrente, & ſon échelle dépendra uniquement de celles des ſéries particulières d'où elle eſt formée; & la difficulté de trouver cette échelle ne conſiſtera qu'à trouver l'équation dont les racines ſeront des fonctions données de celles de quelques équations données; Problème toujours réſoluble par les méthodes connues.

COROLLAIRE III.

8. De même que lorſqu'on connoît le terme général d'une ſérie récurrente, on peut trouver la fraction génératrice de la ſérie, de même en connoiſſant cette fraction, on pourra en déduire l'expreſſion du terme général; car il n'y aura d'abord qu'à chercher tous les facteurs du dénominateur, & à décompoſer enſuite, par les méthodes connues, la fraction propoſée, en autant de fractions partielles qu'il y a de facteurs, & dont chacune ait un de ces facteurs pour dénominateur, en obſervant cependant que s'il y a des facteurs doubles ou triples, &c. ou μ^{cuples}, chacun de ces facteurs donnera μ fractions partielles, dont les dénominateurs ſeront ſucceſſivement la première, la ſeconde, la troiſième, &c. la $\mu.^{\text{ème}}$ puiſſance du même facteur.

De cette manière la fraction dont il s'agit ſe trouvera dé-

compoſée en autant de fractions ſimples de la forme $\frac{H}{(1-px)^{\lambda}}$ que le dénominateur aura des facteurs, & chacune de ces fractions donnera une ſérie dont le terme général ſera

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots\ldots\ldots(m+\lambda-1)}{1.2.3\ldots.\lambda-1} Hp^{m} x^{m};$$

de ſorte qu'en ajoutant enſemble tous ces différens termes, on aura la valeur du terme général cherché. Tout cela eſt trop connu pour que je doive m'y arrèter davantage; je crois cependant qu'on me permettra de donner ici une formule générale & fort ſimple, pour trouver tout d'un coup, à l'aide du calcul différentiel, la partie du terme général qui vient d'un facteur multiple quelconque du dénominateur de la fraction donnée.

Soit $(1-px)^{\mu}$ ce facteur, & dénotons par X la fraction propoſée, après en avoir retranché par la diviſion le même facteur, en ſorte que $\frac{X}{(1-px)^{\mu}}$ ſoit égale à la fraction donnée, on cherchera, en faiſant varier x, & regardant dx comme conſtante, la valeur de la quantité $\frac{x^{\mu}\, d.^{\mu-1}(Xx^{-m-1})}{1.1.2.3\ldots(\mu-1)(-dx)^{\mu-1}}$; enſuite on y mettra $\frac{1}{p}$ à la place de x, & la quantité réſultante ſera le coëfficient de x^{m} dans le terme général de la ſérie provenante du facteur en queſtion.

Je ſupprime la démonſtration de ce Théorème, parce qu'elle n'eſt pas difficile à trouver, d'après les principes connus.

COROLLAIRE IV.

9. Concluons de-là que chaque facteur ſimple du dénominateur de la fraction génératrice propoſée, tel que $1-px$, donnera dans l'expreſſion du terme général de la ſérie, le terme $Kp^{m}x^{m}$; & que chaque facteur multiple, tel que

$(1 - px)^{\mu}$, y donnera les termes

$(K + K'm + K''m^2 + K'''m^3 + \&c. + K^{(\mu - 1)} m^{\mu - 1}) p^m x^m$;

Si p eſt imaginaire, il ſera réductible à la forme $t + u\sqrt{-1}$, & il y aura néceſſairement un facteur correſpondant $1 - qx$, où q ſera de la forme $t - u\sqrt{-1}$; de-là on trouvera que les coëfficiens K, K', K'', &c. ſeront chacun de la forme $h + l\sqrt{-1}$, $h' + l'\sqrt{-1}$, $h'' + l''\sqrt{-1}$, &c. & les quantités correſpondantes, provenantes de l'autre facteur $1 - qx$ ſeront de la forme

$h - l\sqrt{-1}$, $h' - l'\sqrt{-1}$, $h'' - l''\sqrt{-1}$, &c.

Or, ſoit $\sqrt{(t^2 + u^2)} = r$, $\frac{u}{t} = \text{tang.}\,\alpha$, $\sqrt{(h^2 + l^2)} = f$, $\frac{l}{h}$ tang. a, $\sqrt{(h'^2 + l'^2)} = f'$, $\frac{l'}{h'} = \text{tang.}\,a'$, &c. on aura $p = r(\text{coſ.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\alpha\sqrt{-1})$; $p^m = r^m$ $(\text{coſ.}\,m\alpha + \text{ſin.}\,m\alpha\sqrt{-1})$, $K = f(\text{coſ.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1})$, $K' = f'(\text{coſ.}\,a' + \text{ſin.}\,a'\sqrt{-1})$, &c. Donc,

$Kp^m = fr^m\,[\text{coſ.}\,(a + m\alpha) \pm \text{ſin.}\,(a + m\alpha)\sqrt{-1}]$,

$K'p^m = f'r^m\,[\text{coſ.}\,(a' + m\alpha) + \text{ſin.}\,(a' + m\alpha)\sqrt{-1}]$, &c.

& les quantités correſpondantes ne différeront de celles-ci que par le ſigne du radical $r - 1$; de ſorte qu'en raſſemblant toutes ces quantités, on trouvera que les facteurs multiples imaginaires $(1 - px)^{\mu}$, $(1 - qx)^{\mu}$ donneront dans l'expreſſion du terme général de la ſérie, les termes ſuivans,

$$[f\,\text{coſ.}\,(a + m\alpha) + f'm\,\text{coſ.}\,(a' + m\alpha) + f''m^2\,\text{coſ.}\,(a'' + m\alpha) + \&c.]\; r^m x^m;$$

& chaque autre couple de facteurs imaginaires donnera des termes ſemblables.

Quoique toutes ces choſes ſoient aſſez connues, j'ai cru devoir les rappeler à mes Lecteurs, parce qu'elles donnent lieu à des conſéquences importantes dans la matière qui fait l'objet

l'objet de ce Mémoire. Une des principales, c'eſt que quelque dérangement que les corps céleſtes puiſſent éprouver en vertu de leur action mutuelle, & même de la réſiſtance d'un fluide très-rare dans lequel ils nageroient, leurs mouvemens en temps égaux, ſeront toujours repréſentés par des ſéries du genre des récurrentes; car les termes les plus compliqués que la théorie puiſſe jamais donner dans l'expreſſion du mouvement vrai d'une Planète quelconque, ſeront de la forme

$$K\varphi^{m}\, c^{n\varphi} \cos.(a + b\varphi),$$

φ étant l'arc du mouvement moyen, & a, b, c, m, n, K, des coëfficiens conſtans quelconques; or, il eſt clair, par ce qu'on a vu ci-deſſus, que toute ſérie qui naîtra de cette formule ou de la ſomme de pluſieurs formules ſemblables, en donnant ſucceſſivement à φ des valeurs qui augmentent en progreſſion arithmétique, ſera toujours récurrente.

Donc, ſi l'on a une ſuite d'obſervations d'une Planète quelconque, faites à des intervalles de temps égaux, on eſt en droit de regarder les réſultats de ces obſervations comme formant une ſuite récurrente d'un ordre quelconque, & toute la difficulté ſe réduira à trouver la loi de la ſérie; c'eſt l'objet du Problème ſuivant.

II.me PROPOSITION.

PROBLÈME.

(10). *Étant donnée une ſuite de termes dont les valeurs ſoient connues, trouver ſi cette ſuite eſt récurrente, & déterminer dans ce cas la forme générale de ſes termes.*

Soient les termes donnés & connus T, T', T'', T''', T^{IV} &c. on en formera la ſérie

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{IV}x^4 + \&c.$$

que je ſuppoſerai $= s$ pour abréger; & il n'y aura qu'à chercher ſi cette ſérie peut réſulter du développement d'une fonction rationelle quelconque, où la plus haute puiſſance

de x dans le numérateur, soit moindre que dans le dénominateur.

Supposons d'abord que la série proposée soit récurrente du premier ordre, on aura dans ce cas, $s = \frac{a'}{a + bx}$; donc, $\frac{1}{s} = \frac{a + bx}{a'} = p + qx$; d'où il s'ensuit que si on divise l'unité par le polynome s, en ordonnant, dans l'opération, les termes suivant les puissances de x, on trouvera nécessairement un quotient fini de deux termes $p + qx$. Supposons ensuite que la série proposée soit récurrente du second ordre, on aura dans ce cas, $s = \frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}$; donc, $\frac{1}{s} = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x}$; qu'on divise le numérateur trinome $a + bx + cx^2$, par le dénominateur binome $a' + b'x$, on aura un quotient binome $p + qx$, & un reste $a'' x^2$; donc, $\frac{1}{s} = p + qx + \frac{a'' x^2}{a' + b'}$; d'où je conclus d'abord que si on divise l'unité par le polynome s, & qu'on pousse la division jusqu'à ce que l'on ait dans le quotient, deux termes tels que $p + qx$, ce qui ne demande que deux opérations, on aura un reste qui sera nécessairement divisible par x^2, & que je représenterai par $s' x^2$, s' étant une nouvelle série de la forme

$$V + V'x + V''x^2 + V'''x^3 + \&c.$$

Donc $\frac{1}{s} = p + qx + \frac{s' x^2}{s} = p + qx + \frac{a'' x^2}{a' + b'x}$; par conséquent $\frac{s'}{s} = \frac{a''}{a' + b'x}$, & de-là $\frac{s}{s'} = \frac{a' + b'x}{a''}$ $= p' + q'x$. Donc, si on divise le polynome s par le polynome s', on aura nécessairement un quotient fini de deux termes tels que $p' + q'x$.

Supposons que la série proposée soit récurrente du troisième

ordre, on aura alors $s = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3}$; donc, $\frac{1}{s} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3}{a' + b'x + c'x^2}$; qu'on divise le numérateur de cette fraction par son dénominateur, on aura un quotient de la forme $p + qx$, & un reste de la forme $a''x^2 + b''x^3$; donc $\frac{1}{s} = p + qx + \frac{a''x^2 + b''x^3}{a' + b'x + c'x^2}$. De-là il s'ensuit aussi que si on divise l'unité par le polynome s, & qu'on continue la division jusqu'à ce qu'on ait dans le quotient deux termes tels que $p + qx$, le reste sera tout divisible par x^2, & pourra être représenté par $s'x^2$, s' étant une série de la forme $V + V'x + V''x^2 + V'''x^3 +$ &c. On aura donc $\frac{1}{s} = p + qx + \frac{s'x^2}{s} = p + qx + \frac{a''x^2 + b''x^3}{a' + b'x + c'x^2}$; donc $\frac{s'}{s} = \frac{a'' + b''x}{a' + b'x + c'x^2}$, & de-là $\frac{s}{s'} = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a'' + b''x}$. Or, en divisant le numérateur de cette fraction par le dénominateur, il est clair qu'on aura un quotient de la forme $a'''x^2$; en sorte que $\frac{s}{s'} = p' + q'x + \frac{a'''x^2}{a'' + b''x}$. Donc, si on divise le polinome s par le polynome s', & qu'on pousse la division jusqu'à ce qu'on ait dans le quotient, deux termes tels que $p' + q'x$, le reste sera nécessairement divisible par x^2, & pourra être représenté par $s''x^2$, s'' étant une nouvelle série de la forme

$$X + X'x + X''x^2 + X'''x^3 + \text{\&c.}$$

Ainsi on aura $\frac{s}{s'} = p' + q'x + \frac{s''x^2}{s'} = p' + q'x + \frac{a'''x^2}{a'' + b''x}$; d'où $\frac{s''}{s'} = \frac{a'''}{a'' + b''x}$; & de-là $\frac{s'}{s''} = \frac{a'' + b''x}{a'''} = p''' + q'''x$. D'où il s'ensuit qu'en divisant le polynome s' par le polynome s'', on aura nécessairement un quotient fini, tel que $p''' + q'''x$.

Si la ſérie propoſée étoit récurrente d'un ordre quelconque ſupérieur, on y pourroit faire des raiſonnemens & des opérations ſemblables. De-là je conclus en général, que pour reconnoître ſi la ſérie propoſée s eſt récurrente d'un ordre quelconque, il n'y a qu'à diviſer d'abord l'unité par s, juſqu'à ce qu'on ait dans le quotient deux termes tels que $p + qx$, & dénotant le reſte par $s'x^2$, on diviſera enſuite s par s', juſqu'à ce que l'on ait auſſi dans le quotient deux termes comme $p' + q'x$; dénotant de même le reſte par $s''x^2$, on diviſera encore s' par s'', juſqu'à ce que l'on ait dans le quotient deux termes comme $p'' + qx''$; & ainſi de ſuite. Si la ſérie s eſt véritablement récurrente d'un ordre quelconque n, l'opération ſe terminera néceſſairement à la n.ᵉᵐᵉ diviſion; en ſorte que le reſte $s^{(n)}x^2$ ſera nul; ſinon, l'opération ira à l'infini.

Lors donc qu'on ſera parvenu à une diviſion qui ne laiſſera aucun reſte, on ſera d'abord aſſuré que la ſérie propoſée eſt récurrente d'un ordre égal au quantième de cette diviſion; & de plus, les quotiens trouvés donneront la fraction même d'où la ſérie tire ſon origine.

Car on a les équations ſuivantes

$$\frac{1}{s} = p + qx + \frac{s'x^2}{s},$$

$$\frac{s}{s'} = p' + q'x + \frac{s''x^2}{s'},$$

$$\frac{s'}{s''} = p'' + q''x + \frac{s'''x^2}{s''},$$

$$\frac{s''}{s'''} = p''' + q'''x + \frac{s^{\text{IV}}x^2}{s'''},$$

&c.

$$\frac{s^{(n-2)}}{s^{(n-1)}} = p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x;$$

d'où

$$s = \frac{1}{p + qx + \frac{s'}{s} x^2},$$

$$\frac{s'}{s} = \frac{1}{p' + q'x + \frac{s''}{s'} x^2},$$

$$\frac{s''}{s'} = \frac{1}{p'' + q''x + \frac{s'''}{s''} x^2},$$

&c.

$$\frac{s^{(n-1)}}{s^{(n-2)}} = \frac{1}{p^{(n-1)} + q^{(n-1)} x^2}.$$

Donc

$$s = \cfrac{1}{p + qx + \cfrac{x^2}{p' + q'x + \cfrac{x^2}{p'' + q''x + \cfrac{x^2}{p''' + q'''x + \text{\&c.} + \cfrac{x^2}{p^{(n-1)} + q^{(n-1)} x}}}}}.$$

Ainſi il n'y aura plus qu'à réduire cette fraction continue en une fraction ordinaire, qui ſera par conſéquent la fraction cherchée; & il eſt clair que cette fraction aura pour numérateur un polynome du degré $n - 1$, & pour dénominateur un polynome du degré n, dont les coëfficiens donneront l'échelle de relation de la ſérie.

Ayant trouvé ainſi la fraction génératrice de la ſérie, on en déduira aiſément l'expreſſion du terme général de la ſérie par les méthodes connues.

COROLLAIRE.

(11.) Pour faire avec facilité la réduction dont il s'agit, il n'y aura qu'à conſidérer la ſuite des quotiens $p + qx$, $p' + q'x$, &c. $p^{(n-1)} + q^{(n-1)} x$, & les diſpoſer à rebours, de cette manière,

$p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x, p^{(n-2)} + q^{(n-2)}x, p^{(n-3)} + q^{(n-3)}x$, &c. $p + qx$; ensuite on formera par leur moyen les quantités suivantes,

$$\xi = 1,$$
$$\xi' = p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x,$$
$$\xi'' = (p^{(n-2)} + q^{(n-2)}x)\xi' + x^2\xi,$$
$$\xi''' = (p^{(n-3)} + q^{(n-3)}x)\xi'' + x^2\xi',$$
$$\xi^{\text{IV}} = (p^{(n-4)} + q^{(n-4)}x)\xi''' + x^2\xi'',$$
&c.
$$\xi^{(n)} = (p + qx)\xi^{(n-1)} + x^2\xi^{(n+2)};$$

& l'on aura $\frac{\xi^{(n-1)}}{\xi^{(n)}}$ pour la fraction génératrice de la série récurrente.

EXEMPLE I.

(12.) *Étant proposée la suite des nombres* 1, 2, 3, 3, 7, 5, 15, 9, 31, 17, 63, 33, 127, 65, &c. *dont on ignore la loi; on demande si cette suite est récurrente, & quelle est, dans ce cas, l'expression de son terme général.*

Ayant formé la série

$(s)\ldots 1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 9x^7 + 31x^8 + 17x^9 + 63x^{10} + 33x^{11} + 127x^{12} + 65x^{13}$ &c.

On divisera, par la méthode ordinaire, l'unité par cette série s, & l'on trouvera le quotient $1 - 2x$, & le reste $x^2 + 3x^3 - x^4 +$ &c. qui est, comme l'on voit tout divisible par x^2; on divisera donc ce reste par x^2, & l'on aura la nouvelle série

$(s')\ldots 1 + 3x - x^2 + 9x^3 - 5x^4 + 21x^5 - 13x^6 + 45x^7 - 29x^8 + 93x^9 - 61x^{10} + 18x^{11}$, &c.

par laquelle il faudra maintenant diviser la série s; la division faite, on aura le quotient $1 - x$, & le reste $7x^2 - 7x^3 + 21x^4 +$ &c. lequel étant divisé par x^2 donnera la série

$(s'')\ldots 7 - 7x + 21x^2 - 21x^3 + 49x^4 - 49x^5$
$+ 105x^6 - 105x^7 + 217x^8 - 217x^9$, &c.

on continuera donc l'opération en divisant l'avant-dernière série (s''); & on trouvera le quotient $\frac{1}{7} + \frac{4x}{7}$; comme ensuite il ne reste rien, ce sera une marque que l'opération est terminée, & que la suite proposée est effectivement récurrente du troisième ordre.

Pour en trouver maintenant la fraction génératrice, on considérera les trois quotiens qu'on vient de trouver, & on les rangera ainsi par ordre, en commençant du dernier, $\frac{1}{7} + \frac{4x}{7}$, $1 - x$, $1 - 2x$; ensuite on en formera les quantités ξ, ξ', ξ'', &c. de cette manière,

$$\xi = 1,$$
$$\xi' = \frac{1}{7} + \frac{4x}{7},$$
$$\xi'' = (1 - x)\xi' + x^2\xi = \frac{1 + 3x + 3x^2}{7},$$
$$\xi''' = (1 - 2x)\xi'' + x^2\xi' = \frac{1 - x - 2x^2 - 2x^3}{5},$$

& la fraction génératrice de la série s sera $\frac{\xi''}{\xi'''}$; savoir, $\frac{1 - 3x + 3x^2}{1 + x - 2x^2 - 2x^3}$; d'où l'on voit d'abord que l'échelle de relation est $-1, +2, +2$, en sorte que si t, t', t'', t''' sont quatre termes consécutifs quelconques de la série proposée, on aura $t''' = -t'' + 2t' + 2t$.

Pour trouver maintenant l'expression du terme général, on cherchera d'abord les facteurs du quadrinome $1 + x - 2x^2 - 2x^3$, lesquels sont $1 + x$, $1 + \sqrt{2}.x$, $1 - \sqrt{2}.x$, & on décomposera ensuite la fraction $\frac{1 + 3x + 3x^2}{(1 + x)(1 + \sqrt{2}.x)(1 - \sqrt{2}.x)}$ en ces trois-ci $- \frac{1}{1 + x} + \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}.x} + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}.x}$; d'où l'on tirera sur le champ le terme général

$$[-1(-1)^m + (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}})(-\sqrt{2})^m + (1 + \frac{1}{2\sqrt{2}})(\sqrt{2})^m]x^m.$$

REMARQUE I.

(13.) Dans l'analogie du Problème précédent, nous avons obſervé que les reſtes des différentes diviſions devoient être néceſſairement diviſibles par x^2, ce qui ſuit de la nature même de la diviſion, & nous avons preſcrit de diviſer chacun de ces reſtes par x^2 pour avoir les polynomes s', s'', &c. qui doivent ſervir de diviſeurs à leur tour. Or, il peut arriver que quelqu'un de ces reſtes ſoit diviſible par une puiſſance de x, plus haute que le carré, auquel cas, après la diviſion par x^2, on aura un polynome dont le premier terme contiendra encore x; en ſorte que dans la diviſion ſuivante il viendra des puiſſances négatives de x au quotient, ce qui pourroit cauſer quelqu'embarras; mais il ſera aiſé de l'éviter en diviſant le reſte dont il s'agit par la plus haute puiſſance de x dont il eſt diviſible, & mettant enſuite cette puiſſance à la place de x^2 dans les formules de l'*article 2.*

En général, ſoient

$$r'x^\lambda + t'x^{\lambda+1} + \&c.\ r''x^\mu + t''x^{\mu+1} + \&c.\ r'''x^\nu + t'''r^{\nu+1} \ldots r^{(n-1)}x^\sigma + t^{(n-1)}x^{\sigma+1}\ \&c.$$

les reſtes provenans de la première, de la ſeconde, de la troiſième... de la $(n-1)^{\text{ème}}$ diviſion, on diviſera d'abord, pour plus de facilité, chacun de ces reſtes par les premiers termes $r'x^\lambda$; $r''x^\mu$, $r'''x^\nu$ &c. $r^{(n-1)}x^\sigma$, pour avoir des polynomes dont les premiers termes ſoient l'unité, & ces polynomes étant nommés s', s'', s''', &c. $s^{(n-1)}$, on continuera l'opération comme on l'a enſeigné dans l'*article 10.*

De cette manière, on trouvera la ſérie s exprimée par la fraction continue

$s =$

$$s = \cfrac{1}{p + qx + \cfrac{r'x^{\lambda}}{p' + q'x + \cfrac{r''x^{\mu}}{p'' + q''x + \cfrac{r'''x^{\nu}}{p''' + q'''x + \text{\&c.}}}}}$$

$$+ \frac{r^{(n-1)}x^{\sigma}}{p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x};$$

& pour la réduire à une fraction ordinaire, on cherchera les valeurs des quantités ξ, ξ', ξ'', &c. $\xi^{(n)}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\xi &= 1,\\
\xi' &= p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x,\\
\xi'' &= (p^{(n-2)} + q^{(n-2)}x)\xi' + r^{(n-1)}x^{\sigma}\xi,\\
\xi''' &= (p^{(n-3)} + q^{(n-3)}x)\xi'' + r^{(n-2)}x^{\rho}\xi',\\
\xi^{\text{IV}} &= (p^{(n-4)} + q^{(n-4)}x)\xi''' + r^{(n-3)}x^{\pi}\xi'',\\
&\text{\&c.}\\
\xi^{(n)} &= (p + qx)\xi^{(n-1)} + r'x^{\lambda}\xi^{(n-2)};
\end{aligned}$$

ensuite de quoi on aura $\frac{\xi^{(n-1)}}{\xi^{(n)}}$ pour la fraction génératrice de la série, où il est bon de remarquer que le polynome $\xi^{(n)}$ sera du degré

$n + \sigma - 2 + \rho - 2 + \pi - 2 +$ &c. $+ \lambda - 2$, en sorte que l'ordre de la série récurrente sera aussi marqué par ce même nombre.

EXEMPLE II.

(14.) *Soit proposée la série des nombres* 1, 1, 1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, &c. *dont la loi est assez claire; on demande si cette série est du genre des*

récurrentes, & quelle doit être en ce cas l'expreſſion de ſon terme général.

On formera pour cela la ſérie

$$(s) \ldots 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 7x^7 + 7x^8 + 8x^9 + \&c.$$

& on diviſera d'abord 1 par s, ce qui donnera le quotient $1 - x$, & le reſte $- x^3 - 2x^4 - 2x^5 - x^6 * * - x^9 - 2x^{10} - 2x^{11} - x^{12} * * - x^{15}$ &c. qu'on diviſe ce reſte par le premier terme $- x^3$, & l'on aura le polynome

$$(s') \ldots\ldots 1 + 2x + 2x^2 + x^3 * * + x^6 + 2x^7 + 2x^8 + x^9 * * + x^{12} \ \&c.$$

par lequel on diviſera maintenant le polynome s, ce qui donnera le quotient $1 - x$, & le reſte $x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 9x^9 + 11x^{10} + 12x^{11} + 12x^{12} + 12x^{13} +$ &c. on diviſera donc ce reſte par le premier terme x^2 pour avoir le polynome

$$(s'') \ldots\ldots 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 9x^7 + 11x^8 + 12x^9 + 12x^{10} \ \&c.$$

& enſuite on diviſera le polynome s' par le dernier polynome s'', ce qui donnera le quotient $1 - x$, & un reſte nul; d'où l'on conclura d'abord que la ſérie propoſée eſt effectivement récurrente.

Pour en trouver maintenant la fraction génératrice, il n'y aura qu'à conſidérer les quotiens $1 - x$, $1 - x$, $1 - x$, & les premiers termes des reſtes $- x^3$, x^2; & prenant tant les uns que les autres à rebours, on en formera les quantités ſuivantes,

$$\xi = 1,$$

$$\xi' = 1 - x,$$

$$\xi'' = (1 - x)\,\xi' - x^2\,\xi = 1 - 2x + 2x^2,$$

$$\xi''' = (1 - x)\,\xi'' - x^3\,\xi' = 1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4,$$

dont les deux dernières donneront la fraction cherchée $\frac{\xi''}{\xi'''}$, savoir $\frac{1 - 2x + 2x^2}{1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4}$.

D'où l'on voit que la férie proposée est récurrente du quatrième ordre, ayant pour échelle de relation les coëfficiens $3, -4, 3, -1$. Or, comme le dénominateur $1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4$ se résout dans les facteurs $(1 - x)^2$, $1 - x + x^2$, & que ce dernier se résout encore dans ces deux facteurs imaginaires, $1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2})x$, $1 - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2})x$, ou bien $1 - (\text{cof. } 60^d + \text{fin. } 60^d\sqrt{-1})x$, $1 - (\text{cof. } 60^d - \text{fin. } 60^d\sqrt{-1})x$, ou, ce qui revient au même, $1 - e^{60^d\sqrt{-1}}x$, $1 - e^{-60^d\sqrt{-1}}x$; on pourra décomposer la fraction génératrice en ces quatre-ci:

$$\frac{K}{1-x} + \frac{KI}{(1-x)^2} + \frac{L}{1 - e^{60^d\sqrt{-1}}x} + \frac{M}{1 - e^{60^d\sqrt{-1}}x};$$

& l'on trouvera $K = -1$, $KI = 1$,

$$L = \frac{e^{60^d\sqrt{-1}} - 1}{e^{60^d\sqrt{-1}} - e^{-60^d\sqrt{-1}}}, = e^{30^d\sqrt{-1}} \times \frac{e^{30^d\sqrt{-1}} - e^{30^d\sqrt{-1}}}{e^{60^d\sqrt{-1}} - e^{-60^d\sqrt{-1}}}$$

$$= e^{30^d\sqrt{-1}} \times \frac{1}{e^{30^d\sqrt{-1}} + e^{-30^d\sqrt{-1}}} = \frac{e^{30^d\sqrt{-1}}}{2 \text{ cof. } 30^d},$$

& de même $M = \frac{e^{-30^d\sqrt{-1}}}{2 \text{ cof. } 30^d}$; de-là on trouvera le terme général

$$[K + (m+1)KI + Le^{m\,60^d\sqrt{-1}} + Me^{-m\,60^d\sqrt{-1}}]x^m;$$

c'est-à-dire en substituant les valeurs des coëfficiens K, KI, L, M, & réduisant, $(m + \frac{\text{cof.}(30^d + m\,60^d)}{\text{cof. } 30^d})x^m$.

REMARQUE II.

15. Au reste, il seroit peut-être encore plus simple & plus commode d'employer dans le calcul les restes tels qu'ils

ſe trouvent ſans les diviſer par leurs premiers termes, comme nous l'avons dit ci-deſſus; il eſt vrai que de cette manière les quotiens renfermeront néceſſairement des puiſſances négatives de x; mais il n'y aura alors qu'à faire diſparoître les puiſſances négatives de la fraction génératrice $\frac{\xi^{(n-1)}}{\xi^{(n)}}$, en multipliant le haut & le bas par la plus haute puiſſance négative qui s'y trouvera.

Ainſi on peut réduire la ſolution du Problème précédent à cette règle fort ſimple: « diviſez l'unité par la ſérie propoſée s, & continuez la diviſion juſqu'à ce qu'il y ait dans » le quotient deux termes qui renferment deux puiſſances » conſécutives de x, comme $px^{\lambda} + qx^{\lambda+1}$; diviſez enſuite » la ſérie s par le reſte de cette diviſion, & avec les mêmes » conditions; diviſez après cela le ſecond reſte par le premier, » & continuez ainſi en diviſant le nouveau reſte par le précédent, » de manière qu'il y ait toujours dans chaque quotient deux » termes de la forme précédente; ſi la ſérie s eſt récurrente, » on parviendra néceſſairement à une diviſion exacte; & alors » nommant $px^{\lambda} + qx^{\lambda+1}$, $p'x^{\mu} + q'x^{\mu+1}$, $p''x^{\nu} + q''x^{\nu+1}$, &c. $p^{(n-1)}x^{\sigma} + q^{(n-1)}x^{\sigma+1}$, les » quotiens trouvés dans les x diviſions, on aura

$$s = \cfrac{1}{px^{\lambda} + qx^{\lambda+1} + \cfrac{1}{p'x^{\mu} + q'x^{\mu+1} + \cfrac{1}{p''x^{\nu} + q''x^{\nu+1} + \text{\&c.}}}} \\ + \frac{1}{p^{(n-1)}x^{\sigma} + q^{(n-1)}x^{\sigma+1}}.$$

» Donc, faiſant

» $\xi = 1$,

» $\xi' = p^{(n-1)}x^{\sigma} + q^{(n-1)}x^{\sigma+1}$,

$$\xi'' = (p^{(n-2)} x^{\rho} + q^{(n-2)} x^{\rho+1}) \xi' + \xi,$$ «

$$\xi''' = (p^{(n-3)} x^{\pi} + q^{(n-3)} x^{\pi+1}) \xi'' + \xi',$$ «

&c. «

$$\xi^{(n)} = (p x^{\lambda} + q x^{\lambda+1}) \xi^{(n-1)} + \xi^{(n-2)},$$ «

on aura $s = \frac{\xi^{(n-1)}}{\xi^{(n)}}$. «

EXEMPLE III.

16. Pour confirmer la règle précédente par un exemple, ſoit propoſée la ſérie 1, 4, 10, 19, 31, 45, 64, 85, 109, 136, 166, 199, &c. on en formera la ſérie

$$(s) \ldots\ 1 + 4x + 10x^2 + 19x^3 + 31x^4 + 46x^5 + 64x^6 + 85x^7 + 109x^8 + 136x^9 + 166x^{10}, \text{ \&c.}$$

& on fera l'opération ſuivante qui eſt analogue à celle qui ſert à trouver le plus grand commun diviſeur de deux quantités. Diviſant d'abord 1 par s, on trouvera le quotient $1 - 4x$, & le reſte

$$(s') \ldots\ 6x^2 + 21x^3 + 45x^4 + 78x^5 + 120x^6 + 171x^7 + 231x^8 + 300x^9 + \text{\&c.}$$

Diviſant enſuite s par s', on a le quotient $\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{12x}$, & le reſte

$$(s) \ldots\ \frac{3x^2}{4} + \frac{9x^3}{4} + \frac{9x^4}{2} + \frac{15x^5}{2} + \frac{45x^6}{4} + \frac{63x^7}{4} + 21x^8 + 27x^9;$$

continuant ainſi à diviſer s' par s'', on aura le quotient $8 + 4x$, & comme il ne reſte rien de cette diviſion, l'opération ſera terminée; en ſorte qu'on ſera aſſuré que la ſérie propoſée eſt véritablement récurrente.

Or, puiſque les quotiens trouvés ſont $1 - 4x$, $\frac{1}{6x^2}$

$+ \frac{1}{12x}$, $8 + 4x$, on fera

$$\xi = 1,$$

$$\xi' = 8 + 4x,$$

$$\xi'' = \left(\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{12x}\right)\xi' + \xi = \frac{4}{3x^2} + \frac{4}{3x} + \frac{4}{3},$$

$$\xi''' = (1 - 4x)\,\xi'' + \xi' = \frac{4}{3x^2} - \frac{4}{x} + 4 - \frac{4x}{3};$$

& l'on aura $\frac{\xi''}{\xi'''}$; c'eſt-à-dire, en multipliant le haut & le bas par $\frac{3x^2}{4}$, $\frac{1 + x + x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$, pour la fraction génératrice de la ſérie propoſée. On voit par-là, que comme le dénominateur de cette fraction eſt le cube de $1 - x$, la ſérie ne peut être autre choſe qu'une ſérie algébrique du grand degré; c'eſt auſſi ce qu'on auroit pu reconnoître d'abord, puiſque les différences ſecondes ſont conſtantes.

REMARQUE III.

17. Quoique généralement parlant, dans la fraction génératrice $\frac{\xi^{(n-1)}}{\xi^{(n)}}$, le dénominateur doive être un polynome d'un degré plus grand que celui du numérateur, cependant il peut arriver que quelques-unes des plus hautes puiſſances de x s'évanouiſſent dans le dénominateur, en ſorte qu'il ſe trouve abaiſſé par-là à un degré égal ou moindre que celui du numérateur; dans ce cas, la ſérie récurrente qui en réſultera ſera auſſi d'un ordre moindre qu'elle n'auroit dû être; mais elle contiendra au commencement un certain nombre de termes irréguliers, après leſquels ſeulement elle commencera à être véritablement récurrente. Ainſi notre règle ſert également, ſoit que la ſérie ſoit récurrente dès ſon commencement, ou qu'elle contienne d'abord quelques termes irréguliers. Éclairciſſons ceci par un exemple.

EXEMPLE IV.

(18.) Soit proposée la série

1, 1, 3, 7, 18, 43, 123, 322, 843, 2207, 5778, &c.

on en formera d'abord celle-ci :

$(s) \ldots\ 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8$, &c.

& l'on procédera comme dans l'exemple précédent. Divisant donc 1 par s, on a le quotient $1 - x$, & le reste

$(s') \ldots - 2x^2 - 4x^3 - 11x^4 - 29x^5 - 76x^6 - 199x^7 - 521x^8$, &c.

divisant ensuite s par s', on a le quotient $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}$,

& le reste

$(s'') \ldots - \frac{x^2}{2} - 2x^3 - \frac{11x^4}{2} - \frac{29x^5}{2} - 38x^6 - \frac{199x^7}{2}$, &c.

divisant encore s' par s'', on trouve le quotient $4 - 8x$, & le reste

$(s''') \ldots - 5x^4 - 15x^5 - 40x^6 - 105x^7$, &c.

enfin, divisant s'' par s''', on a le quotient $\frac{1}{10x^2} + \frac{1}{10x}$,

& il ne reste rien; d'où il s'ensuit que la série proposée est nécessairement récurrente.

Ayant donc trouvé les quatre quotiens

$1 - x,\ -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x},\ 4 - 8x,\ \frac{1}{10x^2} + \frac{1}{10x}$,

on en formera les quantités suivantes,

$\xi = 1$,

$\xi' = \frac{1}{10x^2} + \frac{1}{10x}$,

$\xi'' = (4 - 8x)\xi' + \xi = \frac{2}{5x^2} - \frac{2}{5x} + \frac{1}{5}$,

$\xi''' = (-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x})\xi'' + \xi' = -\frac{1}{5x^4} + \frac{2}{5x^3} - \frac{1}{5x^2} + \frac{1}{5x}$,

$\xi^{IV} = (1 - x)\xi''' + \xi'' = -\frac{1}{5x^4} + \frac{3}{5x^3} - \frac{1}{5x^2}$,

dont les deux dernières donnent la fraction génératrice $\frac{z'''}{z^{\text{IV}}} = \frac{1 - 2x + x^2 - x^3}{1 - 3x + x^2}$; or comme x eſt élevé à une puiſſance plus haute dans le numérateur que dans le dénominateur, il s'enſuit qu'en diviſant celui-là par celui-ci, juſqu'à ce qu'on arrive à un reſte où l'expoſant de x ſoit moindre que 2, qui eſt le plus grand expoſant du dénominateur, la fraction ſe réduira à $x - 2 + \frac{3 - 7x}{1 - 3x + x^2}$; d'où l'on voit que la ſérie s n'eſt autre choſe qu'une ſuite récurrente provenante de la fraction $\frac{3 - 7x}{1 - 3x + x^2}$, à laquelle on a ajouté au commencement les deux termes arbitraires -2, $-x$; de ſorte qu'en retranchant ces deux termes, de la ſérie s, on aura celle-ci,

$$3 + 2x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4, \&c.$$

qui ſera récurrente dès le commencement; ou bien on pourra diviſer le numérateur, $1 - 2x + x^2 - x^3$, par le dénominateur, $1 - 3x + x^2$, en commençant par le terme 1, & continuant la diviſion juſqu'à ce que l'on arrive à un reſte qui renferme un nombre de termes moindre d'une unité que le diviſeur; on aura ainſi le quotient $1 + x$, & le reſte, $3x^2 - 2x^3$; en ſorte que la fraction deviendra $1 + x + x^2 . \frac{3 - 2x}{1 - 3x + x^2}$; d'où il eſt facile de conclure qu'en retranchant de la ſérie s les deux premiers termes $1 + x$, & diviſant les autres par x^2, on aura une ſérie récurrente régulière, dont la fraction génératrice ſera $\frac{3 - 2x}{1 - 3x + x^2}$.

REMARQUE IV.

(19.) La ſolution du Problème précédent n'eſt, comme l'on voit, qu'une ſimple application de la théorie des fractions continues; mais quoique cette théorie ait déjà été traitée par pluſieurs grands Géomètres, il paroît que l'application dont

dont il s'agit peut néanmoins être regardée comme neuve à plusieurs égards, & sur-tout relativement au point de vue sous lequel nous venons de l'envisager. En effet, on n'avoit point encore de méthode générale pour reconnoître si une série proposée dont on ne connoît que la valeur de quelques termes consécutifs est du genre des récurrentes, & pour trouver en même temps la loi de ses termes. Le seul cas où l'on pût trouver *à posteriori* la loi d'une série, étoit lorsqu'en prenant les différences successives de ses termes, on parvenoit à des différences constantes : or, il est clair que ce cas n'est qu'un cas particulier de notre Théorie générale; car on sait que toute série qui a des différences constantes d'un ordre quelconque n'est autre chose qu'une série simplement algébrique du même ordre; par conséquent, ce n'est qu'une espèce de séries récurrentes, dont l'échelle au lieu d'être un polynome quelconque, est une puissance du binome particulier, $1 - x$ *(article VII)*. J'avoue que la méthode des différences est plus simple & plus commode que celle des fractions continues que nous venons d'exposer; aussi est-elle préférable pour trouver la loi des séries qui ont des différences constantes d'un ordre quelconque; mais si en prenant les différences successives des termes d'une série on ne parvient jamais à des différences constantes, il faut alors avoir recours à notre méthode, pour voir si la série est au moins du genre des récurrentes.

Au reste, il est bon de remarquer que si l'on prend les différences successives des termes d'une série récurrente quelconque, ces différences formeront elles-mêmes une autre série récurrente du même ordre. Car soit la série récurrente $T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{\text{IV}}x^4 + T^{\text{V}}x^5 +$ &c. laquelle résulte de la fraction

$$\frac{[0] + [1]x + [2]x^2 + \&c. \ldots\ldots + [n-1]x^{n-1}}{(0) + (1)x + (2)x^2 + \&c. \ldots\ldots + (n)x^n},$$

qu'on mette tant dans la série que dans la fraction, $\frac{x}{1+x}$,

à la place de x, & qu'on divise ensuite l'une & l'autre par $1 + x$, il est clair que la série deviendra celle-ci,

$$\frac{T}{1 + x} + \frac{T'x}{(1 + x)^2} + \frac{T''x^2}{(1 + x)^3} + \frac{T'''x^3}{(1 + x)^4} + \&c.$$

laquelle en développant les puissances de $1 + x$, suivant les règles connues, & ordonnant les termes suivant x, se réduit à cette forme

$$T + (T' - T)x + (T'' - 2T' + T)x^2 + \&c.$$

c'est-à-dire, à

$$T + \Delta . T . x + \Delta^2 . T . x^2 + \Delta^3 . T . x^3 + \&c.$$

en marquant par $\Delta . 1$, $\Delta^2 . 1$, $\Delta^3 . 1$, &c. les différences successives des premiers termes de la série T, T', T'', &c. c'est-à-dire les différences première, seconde, troisième, &c. de ses termes, en sorte que l'on ait

$$\Delta . T = T' - T,$$

$$\Delta^2 . T = T'' - 2T' + T,$$

$$\Delta^3 . T = T''' - 3T + 3T' - T,$$

&c.

$$\Delta^\mu . T = T^{(\mu)} - \mu T^{(\mu-1)} + \frac{\mu(\mu-1)}{2} T^{(\mu-2)} \&c. \pm T.$$

Cette nouvelle série sera donc égale à la fraction

$$\frac{[0](1+x)^{n-1} + [1]x(1+x)^{n-2} + [2]x^2(1+x)^{n-3} + \&c. + [n-1]x^{n-1}}{(0)(1+x)^n + (1)x(1+x)^{n-1} + (2)x^2(1+x)^{n-2} + \&c. + (n)x^n},$$

dont le numérateur & le dénominateur étant développés & ordonnés suivant les puissances de x, seront aussi des polynomes, l'un du degré $n - 1$, l'autre du degré n, comme ceux de la fraction génératrice de la série primitive; d'où il est aisé de conclure que la série des différences,

$$T + \Delta . T . x + \Delta^2 . T . x^2 + \Delta^3 . T . x^3 + \&c.$$

sera également une série récurrente du même ordre n que la proposée $T + T'x + T''x^2 + \&c.$

On pourra donc aussi appliquer notre méthode à la série des différences dont nous venons de parler, & dès qu'on

en aura trouvé la fraction génératrice, ſi elle en a une, il n'y aura qu'à y ſubſtituer $\frac{x}{1 - x}$ à la place de x, & la diviſer en même temps par $1 - x$; l'on aura ſur le champ la fraction génératrice même de la ſérie propoſée.

Si la ſérie propoſée eſt purement algébrique de l'ordre $n - 1$, alors on ſait que les différences de l'ordre $n - 1$ doivent être conſtantes, & par conſéquent celles des ordres ſuivans nulles; en ſorte qu'on doit avoir dans ce cas, $\Delta^{n}.T = 0$, $\Delta^{n+1}T = 0$, &c. or, c'eſt auſſi ce qui réſulte de l'analyſe précédente; car dans ce cas la fraction génératrice de la ſérie aura pour dénominateur $(1 - x)^{n}$; & il eſt facile de voir qu'en y faiſant les ſubſtitutions & les réductions indiquées pour avoir la fraction génératrice de la ſérie des différences, cette dernière fraction ne contiendra plus x à ſon dénominateur; de ſorte qu'elle deviendra un ſimple polynome du degré $n - 1$; d'où il s'enſuit que les termes affectés de x^{n}, x^{n+1}, &c. dans la ſérie des différences, devront être nuls; ce qui donnera donc $\Delta^{n}.T = 0$, $\Delta^{n+1}.T = 0$, &c.

En général, ſi la ſérie propoſée $T + T'x + T''x^{2} +$ &c. qu'on ſuppoſe toujours de l'ordre n, contient une partie purement algébrique de l'ordre $m - 1$, le dénominateur de ſa fraction génératrice aura néceſſairement pour facteur la puiſſance $(1 - x)^{m}$, laquelle s'évanouira par la ſubſtitution de $\frac{x}{1 + x}$ à la place de x; en ſorte que la ſérie des différences ſe trouvera rabaiſſée d'elle-même à l'ordre $n - m$; mais elle aura au commencement m, termes irréguliers, après leſquels elle deviendra régulière de l'ordre $n - m$, comme on l'a expliqué ci-deſſus (*article 18*).

Ainſi, en rejetant les termes irréguliers T, $\Delta.T.x$, $\Delta^{2}.T.x^{2}$, &c. $\Delta^{m-1}.T.x^{m-1}$, & diviſant les autres par x^{m}, on aura la ſérie régulière,

$$\Delta^{n-m}.T + \Delta^{n-m+1}.T.x + \Delta^{n-m+2}.T.x^{2} + \text{\&c.}$$

laquelle ſera donc récurrente de l'ordre $n - m$, & ne contiendra plus de partie algébrique.

REMARQUE V.

(20.) Il eſt encore bon de remarquer que l'on peut toujours ſimplifier une ſérie récurrente, & la rabaiſſer à un ordre inférieur, en y détruiſant quelques-unes des ſéries partielles dont elle eſt compoſée, pourvu qu'on connoiſſe ſeulement l'échelle de relation de ces ſéries; c'eſt-à-dire, le dénominateur de leur fraction génératrice. Car comme ce dénominateur doit être un facteur de celui de la fraction génératrice de la ſérie totale, il s'enſuit que ſi on multiplie cette ſérie par le même facteur, la ſérie réſultante deviendra néceſſairement plus ſimple, puiſque ſa fraction génératrice n'aura plus pour dénominateur que l'autre facteur, en ſorte que les ſéries partielles dépendantes du premier facteur, ſe trouveront entièrement éteintes.

Il faut ſeulement obſervér que dans ce cas la nouvelle ſérie contiendra au commencement autant de termes irréguliers qu'il y a d'unités dans le degré du multiplicateur; de ſorte qu'il faudra retrancher ces termes & diviſer enſuite les autres par la plus haute puiſſance de x, dont l'expoſant ſera le nombre des termes retranchés.

Soit, par exemple, la ſérie de l'ordre n,

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{\text{IV}}x^4 + \&c.$$

dont la fraction génératrice ſoit $\frac{P}{Q}$, P étant un polynome du degré $n - 1$, & Q un polynome du degré n, dont les n facteurs ſoient $1 - px$, $1 - qx$, $1 - rx$, $1 - sx$, &c. on aura pour l'expreſſion du terme général de la ſérie

$$T^{(m)} = Kp^m + Lq^m + Mr^m + Ns^m + \&c.$$

Maintenant ſi on ſuppoſe qu'on connoiſſe les deux quantités p & q, on pourra ſimplifier la ſérie propoſée & la rabaiſſer à l'ordre $n - 2$, en y détruiſant la partie qui répond aux

termes Kp^m, Lq^m; car pour cela il n'y aura qu'à la multiplier par le polynome formé des facteurs $1 - px$ $1 - qx$, c'est-à-dire, par $1 - (p + q)x + pqx^2$, & désignant par

$$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + t^{\text{IV}}x^4 + \&c.$$

la série résultante de cette multiplication, il est clair que cette série aura pour fraction génératrice $\frac{P}{Q'}$, en supposant $Q = (1 - px)(1 - qx)Q'$, en sorte que Q' sera un polynome du degré $n - 2$, formé par le produit des autres facteurs simples $1 - rx$, $1 - sx$, &c. Qu'on retranche maintenant de part & d'autre les deux premiers termes $t + t'x$ de la série, on aura

$$t''x^2 + t'''x^3 + t^{\text{IV}}x^4 + t^{\text{V}}x^5 + \&c.$$
$$= \frac{P}{Q'} - (t + t'x) = \frac{P - (t + t'x)Q'}{Q'};$$

Or P étant un polynome du degré $n - 1$, & Q' un polynome du degré $n - 2$, il est clair que $P - (t + t'x)Q'$ sera aussi un polynome du degré $n - 1$; & comme toute la série est divisible par x^2, il s'ensuit que ce dernier polynome devra l'être aussi, & qu'il manquera par conséquent de ses deux premiers termes, en sorte qu'il sera de la forme x^2P', P' étant un polynome du degré $n - 3$; donc, divisant de côté & d'autre par x^2, on aura la série

$$t'' + t'''x + t^{\text{IV}}x^2 + t^{\text{V}}x^3 + \&c.$$

dont la fraction génératrice sera $\frac{P'}{Q'}$; en sorte que le terme général de cette nouvelle série sera de la forme ...... $M'r^m + N's^m + \&c.$ de manière qu'elle sera récurrente de l'ordre $n - 2$, & aura son terme général de la forme $M'r^m + N's^m + \&c.$

Or, si on traite cette série par notre méthode, & qu'on en détermine la fraction génératrice $\frac{P'}{Q'}$, on pourra retrouver la fraction primitive $\frac{P}{Q}$ de la série proposée; car on a d'un côté, $Q = (1 - px)(1 - qx)Q'$, & de l'autre, on a $P - (t + t'x)Q' = P'x^2$, & par conséquent, $P = (t + t'x)Q' + P'x^2$.

En général, soit R le facteur connu de Q, lequel soit du degré p, en sorte que $Q = RQ'$, Q' étant un polynome du degré $n - p$; on multipliera la série proposée par R, ensuite on en retranchera les p premiers termes que je désignerai par S, & le reste de la série étant divisée par x^p, sera récurrente de l'ordre $n - p$; en sorte que la recherche de sa fraction génératrice sera beaucoup plus simple que celle de la fraction de la série primitive. Or, soit $\frac{P'}{Q'}$ la fraction génératrice de cette nouvelle série, on fera $Q = RQ'$, & $P = SQ' + x^pQ'$, & la fraction $\frac{P}{Q}$ sera celle de la série proposée $T + T'x + T'x^2 +$ &c.

III.me PROPOSITION.

LEMME.

(21.) *Étant donnée une suite récurrente dont on connoisse déjà la fraction génératrice, on propose de trouver la fraction génératrice de la même série continuée en arrière.*

Soient $T, T', T'', T''',$ &c. $T^{(m)}, T^{(m+1)}$ &c. les termes de la série donnée, & supposons qu'en continuant la même série en arrière, on ait les termes

$$T, {}'T, {}''T, {}'''T, \text{ \&c. } {}^{(m)}T, {}^{(m+1)}T, \text{ \&c.}$$

de sorte que la série continuée des deux côtés soit représentée ainsi,

$$\&c.\ {}^{(m+1)}T,\ {}^{(m)}T,\ \&c.\ {}^{'''}T,\ {}^{''}T,\ {}^{'}T,\ T',\ T'',\ T''',\ \&c.\ T^{(m)},\ T^{(m+1)},\ \&c.$$

où les termes en allant de la gauche à la droite soient tous formés les uns des autres, suivant une même loi générale.

Soit de plus,

$$\frac{[1] + [1]x + [2]x^2 + [3]x^3 + \&c. + [n-1]x^{n-1}}{(0) + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + \&c. + (n)x^n}$$

la fraction génératrice de la série

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + \&c.$$

la question est de trouver la fraction génératrice de la série

$$T + {}^{'}Tx + {}^{''}Tx^2 + {}^{'''}Tx^3 + {}^{IV}Tx^4 + \&c.$$

Pour la résoudre, supposons que la fraction donnée soit décomposée en ces n fractions simples,

$$\frac{K}{1-px} + \frac{L}{1-qx} + \frac{M}{1-rx} + \frac{N}{1-sx} + \&c.$$

on aura, pour l'expression du terme général $T^{(m)}x^m$, celle-ci,

$$(Kp^m + Lq^m + Mr^m + Ns^m + \&c.)x^m;$$

d'où

$$T^{(m)} = Kp^m + Lq^m + Mr^m + Ns^m + \&c.$$

Or, comme cette expression de $T^{(m)}$ doit être générale pour tous les termes de la série, il est visible que pour avoir les valeurs des termes ${}^{'}T,\ {}^{''}T,\ {}^{'''}T,\ \&c.\ {}^{(m)}T$ qui précèdent le terme T^0, il n'y aura qu'à faire successivement $m = -1$, -2, -3, &c. $-m$; de sorte qu'on aura,

$${}^{(m)}T = Kp^{-m} + Lq^{-m} + Mr^{-m} + Ns^{-m} + \&c.$$

donc, le terme général ${}^{(m)}Tx^m$ de la série

$$T + {}^{'}Tx + {}^{''}Tx^2 + {}^{'''}Tx^3 + \&c.$$

sera représenté par la formule

$$(Kp^{-m} + Lq^{-m} + Mr^{-m} + Ns^{-m} + \&c.)x^m$$

d'où il est facile de conclure que cette série résultera du développement des n fractions.

$$\frac{K}{1-\frac{x}{p}}+\frac{L}{1-\frac{x}{q}}+\frac{M}{1-\frac{x}{r}}+\frac{N}{1-\frac{x}{s}}+\&c.$$

lesquelles étant réduites à une fraction unique, on aura la fraction génératrice cherchée.

Considérons donc l'équation identique

$$\frac{[0]+[1]x+[2]x^2+[3]x^3+\&c.+[n-1]x^{n-1}}{(0)+(1)x+(2)x^2+(3)x^3+\&c.+(n)x^n}$$
$$=\frac{K}{1-px}+\frac{L}{1-qx}+\frac{M}{1-rx}+\frac{N}{1-sx}+\&c.$$

& voyons quelle transformation on doit faire subir au premier membre, pour que le second se change en celui-ci,

$$\frac{K}{1-\frac{x}{p}}+\frac{L}{1-\frac{x}{q}}+\frac{M}{1-\frac{x}{r}}+\frac{N}{1-\frac{x}{s}}+\&c.$$

Je remarque d'abord qu'en faisant $x=0$, on a

$$\frac{[0]}{(1)}=K+L+M+N+\&c.$$

ensuite si on met $\frac{1}{x}$ à la place de x, & qu'on fasse les réductions ordinaires, on aura

$$\frac{[0]x^n+[1]x^{n-1}+[2]x^{n-2}+[3]x^{n-3}+\&c.+[n-1]x}{(0)x^n+(1)x^{n-1}+(2)x^{n-2}+(3)x^{n-3}+\&c.+(n)}$$
$$=-\frac{Kx}{p-x}-\frac{Lx}{q-x}-\frac{Mx}{r-x}-\frac{Nx}{s-x}+\&c.$$

retranchons cette équation de la précédente, & l'on aura celle-ci,

$$\frac{[0]}{(0)}-\frac{[0]x^n+[1]x^{n-1}+[2]x^{n-2}+[3]x^{n-3}+\&c.+[n-1]x}{(0)x^n+(1)x^{n-1}+(2)x^{n-2}+(3)x^{n-3}+\&c.+(n)}$$
$$=\frac{Kp}{p-x}+\frac{Lq}{q-x}+\frac{Mr}{r-x}+\frac{Ns}{s-x}+\&c.$$
$$=\frac{K}{1-\frac{x}{p}}+\frac{L}{1-\frac{x}{q}}+\frac{M}{1-\frac{x}{r}}+\frac{N}{1-\frac{x}{s}}+\&c.$$

On

On aura donc

$$\frac{[0]}{(0)} = \frac{[0]x^n + [1]x^{n-1} + [2]x^{n-2} + [3]x^{n-3} + \&c. + [n-1]x}{(0)x^n + (1)x^{n-1} + (2)x^{n-2} + (3)x^{n-3} + \&c. + (n)}$$

$$= T + {}^{I}Tx + {}^{II}Tx^2 + {}^{III}Tx^3 + {}^{IV}Tx^4 + \&c.$$

or, faiſant $x = 0$, on a $\frac{[0]}{(0)} = T$; Donc, retranchant cette équation de la précédente, & diviſant le reſte par x, on aura, en ordonnant les termes ſuivant les puiſſances croiſſantes de x,

$$-\frac{[n-1] + [n-2]x + [n-3]x^2 + \&c. + [0]x^{n-1}}{(n) + (n-1)x + (n-2)x^2 + (n-3)x^3 + \&c. + (0)x^n}$$

$$= {}^{I}T + {}^{II}Tx + {}^{III}Tx^2 + {}^{IV}Tx^3 + \&c.$$

Ainſi le Problème eſt réſolu.

REMARQUE I.

(22.) Quoique l'analyſe précédente ſoit fondée ſur la décompoſition de la fraction génératrice donnée dans les fractions ſimples $\frac{K}{1-px} + \frac{L}{1-qx} + \&c.$ décompoſition qui ſuppoſe que les facteurs bynomes $1 - px$, $1 - qx$, &c. ſoient tous inégaux; cependant il eſt facile de ſe convaincre que notre démonſtration n'en ſubſiſtera pas moins quand il ſe trouvera des facteurs doubles ou triples, &c. car on ſait que le cas des facteurs égaux peut toujours ſe ramener à celui des facteurs inégaux, en regardant les quantités égales p, q, &c. comme infiniment peu différentes entr'elles; de ſorte que comme la concluſion à laquelle nous ſommes arrivés eſt indépendante de la forme même des facteurs $1 - px$, $1 - qx$, &c. il s'enſuit qu'elle aura lieu, ſoit que ces facteurs ſoient tous inégaux ou non.

REMARQUE II.

(23.) J'appellerai, pour plus de ſimplicité, polynomes *contraires*, ceux qui étant du même degré, ont auſſi les mêmes coëfficiens, mais diſpoſés en ſens contraire.

Ainſi les deux polynomes

$(0) + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 +$ &c. $+ (n).x^n$,

$(n) + (n-1)x + (n-2)x^2 + (n-3)x^3 +$ &c. $+ (0).(x)^n$,

ſeront des polynomes *contraires.*

Donc ſi l'on a $(0) = (n)$, $(1) = (n-1)$, $(2) = (n-2)$, &c. ce qui eſt la propriété des polynomes qu'on appelle *réciproques (article 6)*; il eſt clair que les deux polynomes *contraires* ſeront les mêmes; *vice verſâ*, il eſt viſible que tout polynome qui ſera le même que ſon polynome contraire, ſera néceſſairement *réciproque.*

De ces définitions des polynomes *contraires* & *réciproques*, il eſt facile de déduire les propriétés ſuivantes de ces mêmes polynomes.

1.° La ſomme de deux polynomes contraires eſt un polynome réciproque du même degré.

Et en général, ſi P & Q ſont deux polynomes contraires du degré n, le polynome $P + Qx^m$ ſera un polynome réciproque du degré $n + m$.

2.° Le produit de deux polynomes contraires eſt un polynome réciproque d'un degré double; ainſi tout polynome réciproque d'un degré pair peut être regardé comme le produit de deux polynomes contraires.

3.° La ſomme ou la différence de deux polynomes réciproques du même degré, eſt auſſi un polynome réciproque d'un pareil degré.

Et le produit de deux polynomes réciproques de quelque degré que ce ſoit, eſt toujours un polynome réciproque d'un degré égal à la ſomme des degrés de ces polynomes. De même le quotient de deux polynomes réciproques, lorſque l'un eſt diviſible par l'autre, ſera un polynome réciproque d'un degré égal à la différence de ceux des deux polynomes.

4.° Tout polynome réciproque d'un degré impair eſt diviſible par $1 + x$, & le quotient ſera auſſi un polynome réciproque. Car il eſt viſible qu'en faiſant $x = -1$, les deux termes extrêmes du polynome ſe détruiront l'un l'autre,

ainſi que les autres termes équidiſtans des extrêmes; & comme $1 + x$ eſt lui-même un polynome réciproque, il s'enſuit que le quotient le ſera auſſi.

5.° La différence de deux polynomes contraires eſt diviſible par $1 - x$, & le quotient eſt un polynome réciproque. Car, ſoient P & Q deux polynomes contraires de quelque degré que ce ſoit, il eſt clair qu'en faiſant $x = 1$, on aura $P = Q$; donc $P - Q = 0$; donc $P - Q$ ſera diviſible par $1 - x$; maintenant ſi on multiplie la différence $P - Q$, par $1 - x$, on aura $P - Q - Px + Qx$ qui ſera par conſéquent diviſible par $(1 - x)^2$; or, $P + Qx$ eſt un polynome réciproque, & $Q + Px$ en eſt un auſſi du même degré *(n.° 1)*; donc la différence $P + Qx - Q - Px$ ſera un polynome réciproque *(n.° 3)*; d'un autre côté $(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$ eſt auſſi un polynome réciproque; donc le quotient de ces deux polynomes, c'eſt-à-dire le quotient de $P - Q$ par $1 - x$, ſera encore un polynome réciproque *(n.° 3)*.

On peut démontrer de la même manière que $P - Qx^m$ ſera diviſible par $1 - x$, & que le quotient ſera un polymone réciproque.

Ces propriétés des polynomes contraires & des polynomes réciproques vont nous ſervir pour tirer différentes conſéquences de la ſolution du Problème précédent.

COROLLAIRE I.

(24.) Soit $\frac{M}{P}$ la fraction génératrice de la ſérie récurrente de l'ordre n,

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{\text{IV}}x^4 + \&c. \dots (A)$$

P étant un polynome du degré n, & M un polynome du degré $n - 1$.

Que Q ſoit le polynome contraire à P, & N le polynome contraire à M; on aura $- \frac{N}{Q}$ pour la fraction génératrice

de la série

$${}^{\prime}T + {}^{\prime\prime}Tx + {}^{\prime\prime\prime}Tx^2 + {}^{\text{IV}}Tx^3 + {}^{\text{V}}Tx^4 + \&c. \ldots (B).$$

Donc, si on ajoute ensemble les deux séries *(A)* & *(B)*, ou qu'on les retranche l'une de l'autre, on aura la nouvelle série

$$T \pm {}^{\prime}T + (T' \pm {}^{\prime\prime}T)x + (T'' \pm {}^{\prime\prime\prime}T)x^2 + (T''' \pm {}^{\text{IV}}T)x^3 + \&c. \ldots\ldots (C),$$

dont la fraction génératrice sera égale à $\frac{M}{P} \mp \frac{N}{Q}$.

Supposons que le polynome P soit le produit d'un polynome réciproque Π d'un degré quelconque pair 2ν, par un autre polynome P' qui sera par conséquent du degré $n - 2\nu$; en sorte que l'on ait $P = \Pi P'$.

Soit Q' le polynome contraire à P'; & comme Π est un polynome réciproque, il est clair qu'on aura $Q = \Pi Q'$.

Ainsi, on aura $\frac{M}{\Pi P'} \mp \frac{N}{\Pi Q'}$, c'est-à-dire (en réduisant au même dénominateur) $\frac{MQ' \mp NP'}{\Pi P'Q'}$ pour la fraction génératrice de la série *(C)*.

Or, comme M & N sont deux polynomes contraires du degré $n - 1$, & P', Q' deux polynomes aussi contraires du degré $n - 2\nu$, & que d'ailleurs Π est un polynome réciproque du degré 2ν, il s'ensuit de ce qu'on a démontré dans l'*article 23*.

1.° Que le dénominateur $\Pi P'Q'$ de la fraction dont il s'agit sera un polynome réciproque du degré pair

$$2(n - 2\nu) + 2\nu = 2(n - \nu).$$

2.° Que le numérateur $MQ' \mp NP'$ de la même fraction sera égal à un polynome réciproque du degré pair $2(n - \nu - 1)$, multiplié par $1 \mp x$.

COROLLAIRE II.

(25.) Si on ajoute à la série *(A)*, ou qu'on en retranche

la série *(B)* multipliée par x, il viendra celle-ci:

$$T + (T' \pm 'T)x + (T'' \pm ''T)x^2$$
$$+ (T''' \pm '''T)x^3 + \text{\&c.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D).$$

dont la fraction génératrice sera donc égale à $\frac{M}{P} \mp \frac{Nx}{Q}$.

Soit, comme ci-dessus, $P = \Pi P'$ & $Q = \Pi Q'$, on aura donc $\frac{M}{\Pi P'} \mp \frac{Nx}{\Pi Q'}$, c'est-à-dire, $\frac{MQ' \mp NP'x}{\Pi P'Q'}$ pour la fraction génératrice de la série *(D)*; d'où l'on voit,

1.° Que le dénominateur de cette fraction sera le même que celui de la fraction génératrice de la série *(C)*; c'est-à-dire, un polynome réciproque du degré pair $2(n - \nu)$.

2.° Que si on prend le signe supérieur, la fraction aura pour numérateur un polynome réciproque du degré.... $2(n - \nu - 1)$ multiplié par $1 - x^2$. Car, ce numérateur étant $= MQ' - NP'x$, sera représenté par un polynome du degré $2(n - m)$ divisible par $1 - x$, & qui, par cette division, deviendra un polynome réciproque du degré $2(n - \nu) - 1$ *(article 23, n.° 5)*; or, ce dernier polynome étant d'un degré impair, sera encore divisible par $1 + x$, & deviendra, par cette division, un polynome réciproque du degré $2(n - \nu) - 2$ *(article cité n.° 4)*; donc,

3.° Que si on prend le signe inférieur, le numérateur de la même fraction sera un polynome réciproque du degré $2(n - \nu)$, c'est-à-dire, du même degré que son dénominateur; ce qui est évident par ce qu'on a dit dans l'*article 23, n.° 1*. Donc, si on retranche de la fraction le premier terme T de la série, la fraction restante, après avoir réduit au même dénominateur, aura encore pour numérateur un polynome réciproque de même degré *(article 23, n.° 3)*; mais ce numérateur doit être divisible par x; donc, il faudra que son premier terme où x n'entre pas soit nul; par conséquent le dernier terme qui renferme $x^{2(n-\nu)}$ & qui a le même

coëfficient que le premier, ſera nul auſſi; effaçant donc les deux termes extrêmes du numérateur, & diviſant les autres par x, on aura un polynome réciproque du degré $2(n - \nu) - 2$ pour le numérateur de la fraction génératrice de la ſérie
$T' - {}'T + (T'' - {}''T)x + (T''' - {}'''T)x^2 +$ &c.

COROLLAIRE III.

(26.) Donc, ſi on diviſe la ſérie (C) du Corollaire II par $1 \mp x$ ou, ce qui revient au même, qu'on la multiplie par la ſérie $1 \pm x + x^2 \pm x^3 + x^4 \pm$ &c. on aura, en prenant ſucceſſivement les ſignes ſupérieurs ou les inférieurs, deux ſéries dont l'une ſera

$$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + t^{IV}x^4 + t^{V}x^5 + \text{\&c.} \ldots (E),$$

dans laquelle

$$t = T + {}'T,$$
$$t' = T' + T + {}'T + {}''T,$$
$$t'' = T'' + T' + T + {}'T + {}''T + {}'''T,$$
$$t''' = T''' + T'' + T' + T + {}'T + {}''T + {}'''T + {}^{IV}T,$$
&c.

& dont l'autre ſera

$$(t) + (t')x + (t'')x^2 + (t''')x^3 + (t^{IV})x^4 + (t^{V})x^5 + \text{\&c.} \ldots (F),$$

dans laquelle

$$(t) = T - {}'T,$$
$$(t') = T' - T + {}'T - {}''T,$$
$$(t'') = T'' - T' + T - {}'T + {}''T - {}'''T,$$
$$(t''') = T''' - T'' + T' - T + {}'T - {}''T + {}'''T - {}^{IV}T,$$
&c.

Et ces deux ſéries auront l'avantage de tirer leur origine de fractions génératrices qui auront pour dénominateur un même polynome réciproque du degré pair $2(n - \nu - 1)$ & pour numérateur des polynomes auſſi réciproques & du degré $2(n - \nu - 1)$.

De même le Corollaire III fournira deux autres ſéries qui auront les mêmes propriétés, & dont l'une ſera la ſérie (D), priſe avec les ſignes ſupérieurs & diviſée par $1 - x^2$, ou ce qui revient au même, multipliée par la ſérie...... $1 + x^2 + x^4 + x^6 +$ &c. & dont l'autre ſera la même ſérie (D), priſe avec les ſignes ſupérieurs & diviſée par x, après en avoir retranché le premier terme T.

Ainſi la première de ces ſéries ſera de la forme

$$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + t^{\text{IV}}x^4 + t^{\text{V}}x^5 + \&c.\ldots (G),$$

où

$$\begin{aligned} t &= T \\ t' &= T' + {}'T, \\ t'' &= T'' + T + {}''T, \\ t''' &= T''' + T' + {}'T + {}'''T, \\ &\&c. \end{aligned}$$

& la ſeconde ſera de la forme

$$(t) + (t')x + (t'')x^2 + (t''')x^3 + (t^{\text{V}})x^4 + (t^{\text{V}})x^5 + \&c.\ldots (H)$$

où

$$\begin{aligned} (t) &= T' - {}'T, \\ (t') &= T'' - {}''T, \\ (t'') &= T''' - {}'''T, \\ (t''') &= T^{\text{IV}} - {}^{\text{IV}}T, \\ &\&c. \end{aligned}$$

On a donc par-là le moyen de transformer une ſérie récurrente d'un ordre quelconque n en d'autres de l'ordre $2(n - \nu)$ qui aient les conditions dont on vient de parler. Or, quoique ces transformées ſoient en elles-mêmes d'un ordre ſupérieur à la propoſée, elles peuvent néanmoins être abaiſſées à un ordre inférieur; car nous allons faire voir, dans le Problème ſuivant, que toute ſérie récurrente dont la fraction génératrice a pour numérateur & pour dénominateur des polynomes réciproques de degrés pairs peut être transformée

en une autre aussi récurrente, mais d'un ordre moindre de la moitié; d'où l'on pourra conclure que les séries transformées de l'ordre $2(n - \nu)$ seront réductibles à d'autres de l'ordre $n - \nu$, lequel, tant que ν n'est pas nul, sera toujours moindre que celui de la série primitive proposée.

IV.me PROPOSITION.

PROBLÈME.

(27.) *Étant donnée une suite récurrente d'un ordre pair, dont la fraction génératrice ait pour dénominateur un polynome réciproque d'un degré pair, & pour numérateur un polynome aussi réciproque d'un degré pair & moindre de deux unités que celui du dénominateur; on propose de transformer cette série en une autre pareillement récurrente, mais d'un ordre moindre de la moitié.*

Soit proposée la série

$$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + t^{IV}x^4 + \&c.$$

dont la fraction génératrice soit représentée par la formule

$$\frac{[0] + [1]x + [2]x^2 + \&c. + [2]x^{2\mu-4} + [1]x^{2\mu-3} + [0]x^{2\mu-2}}{(0) + (1)x + (2)x^2 + \&c. + (2)x^{2\mu-2} + (1)x^{2\mu-1} + (0)x^{2\mu}},$$

en sorte que la série proposée soit de l'ordre 2μ; & supposons que cette série soit transformée en une autre telle que

$$\theta + \theta'y + \theta''y^2 + \theta'''y^3 + \theta^{IV}y^4 + \&c.$$

laquelle ne soit que de l'ordre μ, & dont la fraction génératrice soit représentée par la formule

$$\frac{a + by + cy^2 + \&c. + hy^{\mu-1}}{A + By + Cy^2 + Dy^3 + \&c.\ Ky^\mu},$$

Je fais, pour obtenir cette transformation, $y = \frac{x}{1 + x^2}$, & substituant cette valeur de y dans la dernière fraction, j'ai, après avoir multiplié le haut & le bas par $(1 + x^2)^\mu$,

$$\frac{(1+x^2)[a(1+x^2)^{\mu-1} + bx(1+x^2)^{\mu-2} + cx^2(1+x^2)^{\mu-3} + \&c. + hx^{\mu-1}]}{A(1+x^2)^\mu + Bx(1+x^2)^{\mu-1} + Cx^2(1+x^2)^{\mu-2} + \&c. + Kx^\mu}$$

&

& cette fraction sera par conséquent égale à la série

$$\theta + \frac{\theta' x}{1 + x^2} + \frac{\theta'' x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{\theta''' x^3}{(1 + x^2)^3} + \&c.$$

& divisant tant la fraction que la série par $1 + x^2$, j'aurai cette fraction

$$\frac{a(1 + x^2)^{\mu - 1} + bx(1 + x^2)^{\mu - 2} + cx^2(1 + x^2)^{\mu - 3} + \&c. + hx^{\mu - 1}}{A(1 + x^2)^{\mu} + B(1 + x^2)^{\mu - 1} + C(1 + x^2)^{\mu - 2} + \&c. + Kx^{\mu}},$$

qui sera égale à la série

$$\frac{\theta}{1 + x^2} + \frac{\theta' x}{(1 + x^2)^2} + \frac{\theta'' x^2}{(1 + x^2)^3} + \frac{\theta''' x^3}{(1 + x^2)^4} + \&c.$$

Maintenant si on développe les puissances de $1 + x^2$, tant dans le numérateur, que dans le dénominateur de cette dernière fraction, & qu'on ordonne ensuite par rapport aux puissances de x, on verra que le dénominateur sera un polynome réciproque du degré 2μ, & que le numérateur sera aussi un polynome réciproque du degré $2\mu - 2$; en sorte qu'on pourra comparer terme-à-terme ces polynomes à ceux qui forment la fraction génératrice de la série proposée; & cette comparaison servira à déterminer les μ coëfficiens a, b, c, &c. h, par les coëfficiens $[0]$, $[1]$, $[2]$, &c. $[\mu - 1]$; ainsi que les $\mu + 1$ coëfficiens A, B, C, &c. K, par les coëfficiens (0), (1), (2), &c. (μ).

Les deux fractions étant donc par ce moyen devenues identiques, il faudra que les séries qui en dérivent le soient aussi; mais comme la dernière série n'est pas ordonnée suivant les puissances de x, il faudra pour pouvoir la comparer à la proposée, l'ordonner auparavant suivant ces mêmes puissances; & pour cela il n'y aura qu'à y substituer à la place des fractions $\frac{1}{1 + x^2}$, $\frac{1}{(1 + x^2)^2}$, $\frac{1}{(1 + x^2)^3}$, &c. leurs valeurs

en séries

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \&c.$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = 1 - 2x^2 + 4x^4 - 4x^6 + 5x^8 - \&c.$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^3} = 1 - 3x^2 + 6x^4 - 10x^6 + 15x^8 - \&c.$$

&c.

& après avoir ordonné les termes par rapport à x, on aura la série

$$\theta + \theta' x + (\theta'' - \theta)x^2 + (\theta''' - 2\theta')x^3$$
$$+ (\theta^{IV} - 3\theta'' + \theta)x^4 + (\theta^{V} - 4\theta''' + 3\theta')x^5$$
$$+ (\theta^{VI} - 5\theta^{IV} + 6\theta'' - \theta)x^6 + \&c.$$

dans laquelle chaque terme comme x^λ aura pour coëfficient la quantité

$$\theta^\lambda - (\lambda - 1)\theta^{\lambda-2} + \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{2}\theta^{\lambda-4} - \frac{(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)}{2.3}\theta^{\lambda-6} + \&c.$$

Comparant donc maintenant terme-à-terme cette série avec la série proposée, on aura

$$t = \theta,$$
$$t' = \theta',$$
$$t'' = \theta'' - \theta,$$
$$t''' = \theta''' - 2\theta',$$
$$t^{IV} = t^{IV} - 3\theta'' + \theta,$$
$$t^{V} = \theta^{V} - 4\theta''' + 3\theta',$$

&c.

& en général

$$t^\lambda = \theta^\lambda - (\lambda = 1)\theta^{\lambda-2} + \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{2}\theta^{\lambda-4}$$
$$- \frac{(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)}{2.3}\theta^{\lambda-6} + \&c.$$

D'où l'on tire réciproquement

$\theta = t,$

$\theta^{\mathrm{I}} = t^{\mathrm{I}},$

$\theta^{\mathrm{II}} = t^{\mathrm{II}} + t,$

$\theta^{\mathrm{III}} = t^{\mathrm{III}} + 2t^{\mathrm{I}},$

$\theta^{\mathrm{IV}} = t^{\mathrm{IV}} + 3t^{\mathrm{II}} + 2t,$

$\theta^{\mathrm{V}} = t^{\mathrm{V}} + 4t^{\mathrm{III}} + 5t^{\mathrm{I}},$

$\theta^{\mathrm{VI}} = t^{\mathrm{VI}} + 5t^{\mathrm{IV}} + 9t^{\mathrm{II}} + 5t,$

$\theta^{\mathrm{VII}} = t^{\mathrm{VII}} + 6t^{\mathrm{V}} + 14t^{\mathrm{III}} + 14t^{\mathrm{I}},$

$\theta^{\mathrm{VIII}} = t^{\mathrm{VIII}} + 7t^{\mathrm{VI}} + 20t^{\mathrm{IV}} + 28t^{\mathrm{II}} + 14t,$

$\theta^{\mathrm{IX}} = t^{\mathrm{IX}} + 8t^{\mathrm{VII}} + 27t^{\mathrm{V}} + 48t^{\mathrm{III}} + 42t^{\mathrm{I}},$

&c.

où la loi de la progreſſion eſt évidente; car on voit que le coëfficient de chaque terme, dans un rang horizontal quelconque eſt égal au coëfficient du terme qui lui eſt au-deſſus dans le rang horizontal précédent, plus à celui qui eſt à gauche dans le même rang. Ainſi dans la valeur de θ^{IX}, on a $1 = 1 + 0$, $8 = 7 + 1$, $27 = 20 + 7$, $48 = 28 + 20$, $42 = 14 + 28$; & ainſi des autres.

D'où il eſt facile de conclure qu'on aura en général

$$\theta^{\lambda} = t^{\lambda} + (\lambda - 1)t^{\lambda-2} + \frac{\lambda(\lambda-3)}{2}t^{\lambda-4} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-5)}{2.3}t^{\lambda-6} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-7)}{2.3.4}t^{\lambda-8} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-9)}{2.3.4.5}t^{\lambda-10} + \&c.$$

COROLLAIRE.

(28.) Donc ſi l'on a une ſérie telle que

$$t + t^{\mathrm{I}}x + t^{\mathrm{II}}x^2 + t^{\mathrm{III}}x^3 + t^{\mathrm{IV}}x^4 + \&c.$$

& qu'on demande ſi elle eſt récurrente d'un ordre pair, & produite par une fraction génératrice, dont le numérateur & le dénominateur ſoient l'un & l'autre, des polynomes

réciproques de degrés pairs; au lieu d'employer immédiatement la méthode générale de la *Proposition II*, pour résoudre cette question, il y aura de l'avantage à transformer d'abord cette suite en une autre de la forme

$$\theta + \theta' y + \theta'' y^2 + \theta''' y^3 + \theta^{IV} y^4 + \&c.$$

& à opérer ensuite sur cette dernière série, par la méthode citée : car de cette manière, on aura la moitié moins des opérations à exécuter, puisque cette série sera d'un ordre moindre de la moitié que celui de la série proposée.

Quand on aura trouvé la fraction génératrice de la série transformée, $\theta + \theta' y + \theta'' y^2 +$ &c. il n'y aura qu'à y mettre par-tout $\frac{x}{1 + x^2}$, à la place de y, & diviser ensuite toute la fraction par $1 + x^2$; on aura par ce moyen la fraction génératrice même de la série primitive $t + t'x + t''x^2 +$ &c.

Cette transformation a d'ailleurs encore un autre avantage, c'est qu'elle facilite la recherche du terme général de la série proposée. Car ayant trouvé la fraction génératrice de la série transformée & l'ayant décomposée en ses fractions simples telles que

$$\frac{F}{1 - \pi y} + \frac{G}{1 - \rho y} + \frac{H}{1 - \sigma y} + \&c.$$

il n'y aura qu'à mettre dans chacune de ces fractions, $\frac{x}{1 + x^2}$ à la place de y, & la diviser ensuite par $1 + x^2$; on aura ainsi les fractions

$$\frac{F}{1 - \pi x + x^2} + \frac{G}{1 - \rho x + x^2} + \frac{H}{1 - \sigma x + x^2} + \&c.$$

d'où en faisant

$$\pi' = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right)},\ \rho' = \frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho^2}{4} - 1\right)}$$

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{4} - 1\right)},\ \&c.$$

on aura pour l'expression du terme général $t^{(m)}$,

$$t^{(m)} = \frac{F\pi'^2}{\pi'^2 - 1} \cdot \pi'^m - \frac{F}{\pi'^2 - 1} \cdot \pi'^{-m}$$
$$+ \frac{G\rho'^2}{\rho'^2 - 1} \cdot \rho'^m - \frac{G}{\rho'^2 - 1} \cdot \rho'^{-m}$$
$$+ \frac{H\sigma'^2}{\sigma'^2 - 1} \cdot \sigma'^m - \frac{H}{\sigma'^2 - 1} \cdot \sigma'^{-m}$$
$$+ \text{\&c.}$$

EXEMPLE.

(29.) Soit proposé la série

$$1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 7x^4 + 9x^5 + 11x^6 + 12x^7 + \text{\&c.}$$

on trouvera que la transformée sera

$$1 + 3y + 6y^2 + 12y^3 + 24y^4 + 48y^5 + 96y^6 + 192y^7 + \text{\&c.}$$

laquelle, à commencer du second terme, eſt une progreſſion géométrique dont la raiſon eſt 2; de ſorte qu'on aura ſur le champ la formule $1 + \frac{3y}{1 - 2y}$, c'eſt-à-dire $\frac{1 + y}{1 - 2y}$ pour la fraction génératrice de cette dernière ſérie; d'où l'on voit que cette ſérie, quoique du premier ordre ſeulement, eſt cependant eſſentiellement une ſérie du ſecond ordre, mais dans laquelle le coëfficient du terme y^2 dans l'échelle de relation eſt évanoui *(art. 18)*; de ſorte que la ſérie propoſée ſera néceſſairement du quatrième ordre.

En effet, mettant $\frac{x}{1 + x^2}$ à la place de y, & diviſant enſuite la fraction par $1 + x^2$, on aura celle-ci.... $\frac{1 + x + x^2}{(1 + x^2)(1 - 2x + x^2)}$, pour la fraction génératrice de la ſérie primitive $1 + 3x + 5x^2 +$ &c. & il eſt clair par-là que ſi on avoit voulu opérer immédiatement par cette même ſérie, ſuivant la méthode de la *Propoſition II*, il auroit fallu procéder juſqu'à la quatrième diviſion avant que l'opération fût terminée.

Vme PROPOSITION.

PROBLÈME.

(30.) *Les mêmes choses étant supposées, comme dans la* Proposition IV, *on demande une méthode plus simple que celle de la* Proposition II, *pour trouver immédiatement la fraction génératrice de la série proposée.*

On voit par l'analyse du Problème précédent, que la fraction génératrice de la série *(E)*, laquelle a pour dénominateur un polynome réciproque du degré 2μ, & pour numérateur un polynome réciproque du degré $2\mu - 2$, étant multipliée par $1 + x^2$, peut se transformer par la substitution $y = \frac{x}{1 + x^2}$, en une autre fraction qui ait pour dénominateur un polynome en y du degré μ, & pour numérateur un polynome en y du degré $\mu - 1$.

Or il est clair que par la méthode de la *Proposition II*, cette dernière fraction peut se réduire en une fraction continue de la forme

$$\cfrac{1}{p + qy + \cfrac{y^2}{p' + q'y + \cfrac{y^2}{p'' + q''y + \cfrac{y^2}{p''' + q'''y + \text{\&c.}}}}} \quad + \frac{y^2}{p^{(\mu-1)} + q^{(\mu-1)}y};$$

Donc si on remet dans cette expression $\frac{x^2}{1 + x^2}$ à la place de y, & qu'on la divise par $1 + x^2$, elle deviendra égale & identique à la fraction génératrice de la série donnée *(E)*.

Or, il est facile de voir que par ce moyen la fraction continue précédente, deviendra celle-ci

$$\cfrac{1}{p(1+x^2)+qx+\cfrac{x^2}{p'(1+x^2)+q'x+\cfrac{x^2}{p''(1+x^2)+q''x+\text{\&c.}}}}$$

$$+\frac{x^2}{p^{(\mu-1)}(1+x^2)+q^{(\mu-1)}x}.$$

D'où je conclus que la ſérie *(E)* peut ſe réduire elle-même auſſi en une fraction continue de cette forme, c'eſt-à-dire dans laquelle les quotiens provenans des diviſions ſucceſſives, au lieu d'être ſimplement de la forme $p+qx$, $p'+q'x$, $p''+q''x$, &c. comme dans la *Propoſition II*, ſoient de la forme $p+qx+px^2$, $p'+q'x+p'x^2$, $p''+q''x+p''x^2$ &c. & comme les termes px^2, $p'x^2$, $p''x^2$, &c. dont ces quotiens diffèrent de ceux de la propoſition citée, n'influent point dans l'opération de la diviſion ſur les termes précédens $p+qx$, $p'+q'x$, &c. il s'enſuit que pour réduire la ſérie *(E)* en une fraction continue de la forme ci-deſſus, il n'y aura qu'à faire ſur cette ſérie les mêmes opérations que dans la *Propoſition II*, avec cette ſeule différence qu'après avoir trouvé les deux premiers termes de chaque quotient, il faudra y ajouter encore le premier terme multiplié par x^2 & tenir compte enſuite de ce nouveau terme dans la ſouſtraction. De cette manière, l'opération ſe terminera après μ diviſions, au lieu qu'en employant la méthode de la *Propoſition II*, elle exigera 2μ diviſions.

COROLLAIRE.

(31.) Lorſqu'on aura ainſi trouvé les quotiens ſucceſſifs $p+qx+px^2$, $p'+q'x+p'x^2$, $p''+q''x+p''x^2$, &c. on pourra en déduire la fraction génératrice de la ſérie par la méthode de l'*art. 2*, en prenant ces quotiens à la place des quotiens $p+qx$, $p'+q'x$, $p''+q''x$, &c.

Mais il ſera encore plus ſimple & plus commode de prendre pour quotiens les ſimples quantités

$p+qy$, $p'+q'y$, $p''+q''y$, &c. $p^{(\mu-1)}+q^{(\mu-1)}y$;

car ayant formé par leur moyen la fraction en y, il n'y aura plus qu'à y substituer $\frac{x}{1 + x^2}$, à la place de y, & à la diviser ensuite par $1 + x^2$, comme on l'a vu dans l'*article 28.*

Remarque I.

(32.) La méthode précédente est donc très-utile pour reconnoître si une série quelconque proposée est récurrente, & dûe à une fraction génératrice dont le numérateur & le dénominateur soient des polynomes réciproques de degrés pairs; car elle réduit à la moitié le nombre des opérations que demanderoit la méthode générale de la *Proposition II.*

Si la fraction génératrice de la série devoit avoir pour dénominateur un polynome réciproque de degré pair, & pour numérateur le produit d'un polynome réciproque de degré pair, par un polynome quelconque donné, alors on pourroit encore résoudre la question par la même méthode, avec cette seule différence, qu'au lieu de prendre l'unité pour le premier dividende, comme dans les opérations de la *Proposition II,* il faudroit prendre pour premier dividende le polynome même donné; car il est visible que de cette manière toute la fraction continue se trouvera multipliée par ce même polynome, & que par conséquent la fraction résultante de la réduction de cette fraction, le sera aussi. C'est pourquoi après avoir trouvé dans ce cas les quotiens des divisions successives, il n'y aura qu'à chercher, à l'aide de ces quotiens, la fraction génératrice de la série, en faisant abstraction du polynome donné; & ensuite multiplier le numérateur de cette fraction par le polynome dont nous parlons.

Exemple.

(33.) Je prendrai pour exemple la suite que nous avons déjà examinée dans l'*article 29*, d'après la méthode de la *Proposition IV;* savoir,

$1 +$

$1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 7x^4 + 9x^5 + 11x^6 + 12x^7 + 13x^8 + 15x^9 + 17x^{10} + 18x^{11} + 19x^{12} + 21x^{13} + \&c.$

& voici comment je procède.

Je commence par diviser l'unité par la série donnée . . . $1 + 3x + 5x^2 + \&c.$ que j'appelle s, & je trouve dans le quotient le terme 1, à la place duquel j'écris tout de suite $1 + x^2$; je multiplie $1 + x^2$ par la série s, & je soustrais le produit de l'unité, ce qui me donne le reste

$- 3x - 6x^2 - 9x^3 - 12x^4 - 15x^5 - 18x^6 - 21x^7 - \&c.$

Je continue à diviser ce reste par la série s; & il me vient dans le quotient le nouveau terme $- 3x$, qui étant multiplié par le diviseur s, & soustrait du reste précédent, donne le reste

$3x^2 + 6x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 12x^7 + \&c.$

Ainsi le premier quotient est $1 - 3x + x^2$. Maintenant je divise le dernier reste par son premier terme $3x^2$ pour avoir la série

$1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 4x^6 + \&c.$

que j'appelle s', & par laquelle je divise la série s, qui a servi de diviseur dans l'opération précédente.

Cette division me donne d'abord le quotient 1 à la place duquel j'écris de nouveau $1 + x^2$; la multiplication & la soustraction faites, j'ai le reste

$x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \&c.$

qui étant divisé de rechef par la série s, produit dans le quotient le terme x; & ce terme étant multiplié par le diviseur s, & soustrait du reste précédent ne laisse plus rien; d'où je conclus que l'opération est terminée, & que la série proposée est récurrente du quatrième ordre, en sorte que sa fraction génératrice a pour dénominateur un polynome réciproque du quatrième degré, & pour numérateur un polynome réciproque du second degré.

En vertu de l'opération précédente, la série proposée s est

donc égale à la fraction continue

$$s = \cfrac{1}{1 - 3x + x^2 + \cfrac{3x^2}{1 + x + x^2}};$$

laquelle en mettant y à la place de $\frac{x}{1 + x^2}$, c'est-à-dire, $y(1 + x^2)$ à la place de x, se réduit à celle-ci,

$$s = \cfrac{1}{(1 + x^2)(1 - 3y) + \cfrac{3(1 + x^2)^2 y^2}{(1 + x^2)(1 + y)}};$$

savoir

$$s = \left(\cfrac{1}{1 - 3y + \cfrac{y^2}{1 + y}}\right) : (1 + x^2);$$

D'où l'on voit que l'expression de s en y est la même que celle en x, en réduisant les quotiens $1 - 3x + x^2$, $1 + x + x^2$, aux deux premiers termes $1 - 3x$, $1 + x$; changeant ensuite x en y, & divisant le tout par $1 + x^2$.

Ainsi, pour avoir la fraction génératrice, on considérera les quotiens $1 - 3x$, $1 + x$, avec le premier terme $3x^2$ du reste de la première division, par lequel ce reste a été divisé; & on en formera (*article 13*) les quantités

$\xi = 1, \xi' = 1 + x, \xi'' = (1 - 3x)\xi' + 3x^2\xi = 1 - 2x;$

on changera x en y dans la fraction $\frac{\xi'}{\xi''}$, & la divisant ensuite par $1 + x^2$, on aura celle-ci $\frac{1 + y}{(1 + x^2)(1 - 2y)}$ pour la fraction cherchée, dans laquelle il n'y aura plus qu'à mettre $\frac{x}{1 + x^2}$ à la place de y, ce qui la transformera en $\frac{1 + x + x^2}{(1 + x^2)(1 - 2x + x^2)}$; ce qui s'accorde avec le résultat de l'*article 29*).

REMARQUE II.

(34.) Si dans le cas du Problème précédent il arrivoit

que la fraction génératrice eût pour numérateur un polynome réciproque d'un degré égal ou plus grand que celui du dénominateur, alors la série auroit au commencement un certain nombre de termes irréguliers, comme on l'a vu dans l'*art. 18;* or, si on se contentoit d'effacer ces termes, la série restante seroit à la vérité régulière, mais elle n'auroit plus une fraction génératrice dont le numérateur & le dénominateur fussent des polynomes réciproques de degrés pairs comme auparavant. Comme il peut néanmoins être quelquefois utile de conserver à la série cette propriété, nous allons voir ce qu'il faudra faire pour cet effet.

Considérons donc la fraction

$$\frac{a+bx+cx^2+\&c.+cx^{2(\nu+\rho-1)-2}+bx^{2(\nu+\rho-1)-1}+ax^{2(\nu+\rho-1)}}{A+Bx+Cx^2+\&c.+Cx^{2\nu-2}+Bx^{2\nu-1}+Ax^{2\nu}},$$

laquelle soit supposée donner naissance à la série

$$t+t'x+t''x^2+t'''x^3+t^{\text{IV}}x^4+\&c.$$

Je dis que l'on peut diviser le numérateur de cette fraction par son dénominateur ; en sorte que tant le quotient que le reste soient aussi des polynomes réciproques de degrés pairs; en effet, si on suppose que le quotient soit

$$P+Qx+Rx^2+\&c.+Rx^{2(\rho-1)-2}+Qx^{2(\rho-1)-1}+Px^{2(\rho-1)}$$

& que le reste soit

$$x^\rho(p+qx+rx^2+\&c.+rx^{2(\nu-1)-2}+qx^{2(\nu-1)-1}+px^{2(\nu-1)},$$

il est facile de prouver qu'en multipliant ce quotient par le diviseur $A+Bx+Cx^2+\&c.$ & y ajoutant ensuite le reste, il viendra un polynome réciproque du degré $2(\nu+\rho-1)$, & comme le nombre des coëfficiens indéterminés P, Q, R, &c. est ρ, & celui des coëfficiens indéterminés p, q, r, &c. est $\nu\rho$; le polynome dont il s'agit contiendra $\nu+\rho$, quantités indéterminées ; par conséquent ce polynome sera comparable au polynome .... $a+bx+cx^2+\&c.$ où le nombre des coëfficiens donnés a, b, c, &c. est aussi $\nu+\rho$.

Maintenant, puiſque le reſte eſt diviſible par x^ρ, il eſt clair que les ρ premiers termes de la ſérie $t + t'x + t''x^2 + \&c.$ devront être les mêmes que les ρ premiers termes du quotient $P + Qx + Rx^2 + \&c.$ afin que ces termes étant effacés de part & d'autre, ce qui reſtera ſoit tout diviſible par x^ρ; on aura donc ainſi $P = t$, $Q = t'$, $R = t''$, &c. donc, après avoir effacé ce qui ſe détruit, & diviſé le tout par x^ρ, on aura l'équation

$$t^{(\rho)} + t^{(\rho+1)}x + t^{(\rho+2)}x^2 + t^{(\rho+3)}x^3 + \&c.$$
$$= t^{(\rho-2)} + t^{(\rho-3)}x + t^{(\rho-4)}x^2 + \&c. + tx^{\rho-2}$$
$$+ \frac{p + qx + rx^2 + \&c. + rx^{2(\nu-1)-2} + qx^{2(\nu-1)-1} + px^{2(\nu-1)}}{A + Bx + Cx^2 + \&c. + Cx^{2\nu-2} + Bx^{2\nu-1} + Ax^{2\nu}};$$

d'où il s'enſuit qu'on aura

$$t^{(\rho)} - t^{(\rho-2)} + (t^{(\rho+1)} - t^{(\rho-3)})x + (t^{(\rho+2)} - t^{(\rho-4)})x^2 + \&c.$$
$$= \frac{p + qx + rx^2 + \&c. + rx^{2(\nu-1)-2} + qx^{2(\nu-1)-1} + px^{2(\nu-1)}}{A + Bx + Cx^2 + \&c. + Cx^{2\nu-2} + Bx^{2\nu-1} + Ax^{2\nu}}.$$

On voit donc par-là que pour rendre la ſérie

$$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + \&c.$$

régulière, & en même temps originaire d'une fraction qui ait pour numérateur & pour dénominateur des polynomes réciproques de degrés pairs, il faut non-ſeulement y effacer les ρ premiers termes, & diviſer les reſtans par x^ρ, mais encore retrancher des coëfficiens de ceux-ci les coëfficiens de ceux des premiers termes qui ſont également éloignés du terme ρ^{eme}; c'eſt-à-dire, en retrancher reſpectivement les coëfficiens des termes effacés diſpoſés à rebours, à commencer par le pénultième.

Si la ſérie propoſée avoit pour fraction génératrice la fraction ci-deſſus, mais dont le numérateur fût de plus multiplié par $1 + x$, ce qui le rendroit un polynome réciproque

du degré $2(\nu + \rho - 1) + 1$; on trouveroit par un raisonnement semblable, que pour débarrasser la série des termes irréguliers, & conserver en même temps à sa fraction génératrice la même forme, il faudroit y effacer les ρ premiers termes, diviser les autres par x^ρ, & retrancher ensuite respectivement des coëfficiens de ceux-ci, ceux des termes effacés, disposés à rebours, à commencer par le dernier; c'est le cas de la seconde des deux séries *(C)* de l'*article 24*.

Mais si le numérateur de la fraction au lieu d'être multipliée par $1 + x$, devoit l'être par $1 - x$, ce qui est le cas de la première des mêmes séries *(C)*, alors on opéreroit comme dans le cas précédent, mais en changeant la soustraction en addition.

Enfin si on avoit le cas de la première des séries *(D)* de l'*art. 25*, où le numérateur de la fraction doit être multiplié par $1 - x^2$, il est facile de voir, qu'après avoir effacé les ρ premiers termes, & divisé les autres par x^ρ, il faudroit ajouter respectivement aux coëfficiens de ceux-ci, à commencer seulement par le second, les coëfficiens des termes effacés disposés à rebours.

VI.me PROPOSITION.

PROBLÈME.

Étant donnée une suite de nombres dont la loi de la progression soit inconnue; on propose de trouver si chaque terme de cette suite peut être représenté par la somme d'un certain nombre de sinus d'angles qui varient d'un terme à l'autre par des différences constantes quelconques; chacun de ces sinus étant d'ailleurs multiplié par un coëfficient constant quelconque.

Les principes posés ci-dessus fournissent différentes manières de résoudre ce Problème.

PREMIÈRE SOLUTION.

(35.) De ce qu'on a démontré dans les *articles 5 & 6*, il s'ensuit que pour que la suite proposée soit de la nature dont il s'agit, il faut qu'elle soit récurrente d'un ordre pair, & que de plus la fraction génératrice ait pour dénominateur un polynome réciproque d'un degré pair, lequel soit résoluble en facteurs trinomes de la forme $1 - 2\cos.\alpha.x + x^2$, $1 - 2\cos.\beta.x + x^2$, &c.

Ainsi pour résoudre le Problème proposé, il n'y aura qu'à faire usage de la méthode générale de la *II.e Proposition*, & chercher par son moyen la fraction génératrice de la série. Cette fraction, si la série en a une, étant trouvée, il n'y aura plus qu'à voir si elle a pour dénominateur un polynome qui ait les propriétés dont nous venons de parler; c'est de quoi on pourra s'assurer aisément par les formules de l'*art. 6*: car, 1.° il faudra qu'en égalant le dénominateur à zéro, on ait une équation réciproque de la forme

$$1 + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + \&c. + (3)x^{2\nu-3} + (2)x^{2\nu-2} + (1)x^{2\nu-1} + x^{2\nu} = 0;$$

ensuite il faudra que la transformée

$$z^\nu + [(1)]x^{\nu-1} + [(2)]z^{\nu-2} + [(3)]z^{\nu-3} + \&c. + [(\nu)] = 0$$

ait toutes ses racines réelles, inégales & comprises entre les limites $+2$ & -2. On trouve dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour les *années 1767 & 1768*, des méthodes directes & faciles pour reconnoître si cette condition a lieu, & pour trouver en même temps la valeur de chaque racine aussi approchée que l'on veut.

Supposons que π, ρ, σ, &c. soient les racines dont nous parlons, on fera $\cos.\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos.\beta = \frac{\rho}{2}$, $\cos.\gamma = \frac{\sigma}{2}$, &c. & on en conclura sur le champ que le terme général $T^{(m)}$ de la série proposée sera de la forme

$$A\sin.(a + m\alpha) + B\sin.(b + m\beta) + C\sin.(c + m\gamma) + \&c.$$

m étant l'expoſant du rang, & A, B, C, &c. a, b, c, &c. des conſtantes qu'on déterminera aiſément par les méthodes connues.

En effet, il eſt clair, par les formules de l'*art.* 6, que le dénominateur de la fraction génératrice aura alors pour facteur les trinomes $1 - 2\,\text{coſ.}\,\alpha \,.\, x + x^2$, $1 - 2\,\text{coſ.}\,\beta \,.\, x + x^2$, &c. en ſorte qu'on pourra par les méthodes connues, décompoſer cette fraction en autant de fractions partielles, telles que

$$\frac{F + Gx}{1 - 2\,\text{coſ.}\,\alpha \,.\, x + x^2} + \frac{H + Ix}{1 - 2\,\text{coſ.}\,\beta \,.\, x + x^2} + \text{\&c.}$$

Or on ſait, & il eſt d'ailleurs très-facile de démontrer que toute fraction de la forme $\frac{1}{1 - 2\,\text{coſ.}\,\alpha \,.\, x + x^2}$, donne une ſérie dont le terme général eſt $\frac{\text{ſin.}\,(m+1)\alpha}{\text{ſin.}\,\alpha}\, x^m$; donc la fraction $\frac{F + Gx}{1 - 2\,\text{coſ.}\,\alpha \,.\, x + x^2}$, produira une ſérie qui aura pour terme général la quantité $\frac{F\,\text{ſin.}\,(m+1)\alpha + G\,\text{ſin.}\,m\alpha}{\text{ſin.}\,\alpha}\, x^m$; mais $\text{ſin.}\,(m+1)\alpha = \text{ſin.}\,m\alpha \times \text{coſ.}\,\alpha + \text{coſ.}\,m\alpha \times \text{ſin.}\,\alpha$; donc ſi on fait $F = A\,\text{ſin.}\,a$, & $\frac{F\,\text{coſ.}\,\alpha + G}{\text{ſin.}\,\alpha} = A\,\text{coſ.}\,a$, & par conſéquent

$$\text{tang.}\,a = \frac{F\,\text{ſin.}\,\alpha}{F\,\text{coſ.}\,\alpha + G}, \quad \& \quad A = \frac{\sqrt{(F^2 + 2FG\,\text{coſ.}\,\alpha + G^2)}}{\text{ſin.}\,\alpha},$$

le terme général de la ſérie provenante de la fraction.... $\frac{F + Gx}{1 - 2\,\text{coſ.}\,\alpha \,.\, x + x^2}$, ſe réduira à la forme $A\,\text{ſin.}\,(a + m\alpha)x^m$. Ainſi on connoîtra les valeurs des conſtantes A & a; & on déterminera de même celles des conſtantes B & b, à l'aide des quantités H, I, & ſin. β, coſ. β; & ainſi des autres.

SECONDE SOLUTION.

(36.) Puiſque la queſtion eſt de ſavoir ſi la ſuite propoſée réſulte d'une fraction génératrice, dont le dénominateur ſoit un polynome réciproque d'un degré pair 2ν; ſuppoſons que

cela ſoit ainſi, & il eſt clair qu'on aura dans ce cas *(art. 24)* $P = \Pi$, & $n = 2\nu$; par conſéquent $p' = 1$, $Q' = 1$, & $P = Q$. D'où il s'enſuit que chacune des ſéries tranſformées de l'*art. 26*, ſera de l'ordre $2(2\nu - \nu) = 2\nu$, c'eſt-à-dire, du même ordre que la propoſée; en ſorte que par la méthode de la *IVe propoſition*, on pourra les transformer de nouveau en d'autres qui ne ſeront que de l'ordre ν, & par conſéquent d'un ordre moindre de la moitié de celui de la ſérie propoſée; moyennant quoi la recherche de la fraction génératrice deviendra beaucoup plus ſimple & plus facile.

Soit donc T un des termes du milieu de la ſuite propoſée, & ſoient T', T'', T''', &c. les termes qui ſuivent celui-là, $'T$, $''T$, $'''T$, &c. ceux qui le précèdent. On formera par les formules de l'*art. 26* les deux ſéries transformées *(E)* & *(F)*, ou bien les deux autres *(G)* & *(H)*, qu'on repréſentera comme dans l'*article cité*, de cette manière:

$$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + t^{\text{IV}}x^4 + \&c.$$
$$(t) + (t')x + (t'')x^2 + (t''')x + (t^{\text{IV}})x^4 + \&c.$$

enſuite on transformera par les formules de l'*art. 27* ces deux ſéries dans ces deux-ci:

$$\theta + \theta' y + \theta'' y^2 + \theta''' y^3 + \theta^{\text{IV}} y^4 + \&c. \ldots (I)$$
$$(\theta) + (\theta')y + (\theta'')y^2 + (\theta''')y^3 + (\theta^{\text{IV}})y^4 + \&c. \ldots (K),$$

& on opérera ſur l'une ou l'autre de ces deux dernières ſéries, ſuivant la méthode de la *IIe Propoſ.* pour trouver ſa fraction génératrice, ſi elle en a une. Cette fraction étant trouvée pour l'une des deux ſéries dont il s'agit, il ſera facile d'avoir la fraction de l'autre ſérie, puiſque les deux fractions génératrices doivent avoir le même dénominateur (ſur quoi voyez la *Remarque I,* à l'*article 38)*, car la difficulté ne conſiſtera qu'à trouver le numérateur de la fraction inconnue; & pour cela il eſt clair qu'il n'y aura qu'à multiplier la ſérie elle-même par le dénominateur déjà trouvé, & prendre pour numérateur autant des premiers termes de ce produit qu'il y en a dans le dénominateur, moins un, les termes ſuivans devant d'ailleurs

s'évanouir

s'évanouir d'eux-mêmes, ce qui peut servir de confirmation à la bonté du calcul.

Connoissant ainsi les fractions génératrices des deux séries *(I)* & *(K)*, il faudra examiner d'abord si leur dénominateur commun étant égalé à zéro, donne, en y faisant $y = \frac{1}{z}$, une équation en z de la même nature que celle de l'*article 35*, c'est-à-dire, dont les racines soient toutes réelles inégales, & comprises entre les limites 2 & -2, en sorte qu'on puisse les supposer égales à $2 \cos. \alpha$, $2 \cos. \beta$, $2 \cos. \gamma$, &c. auquel cas on pourroit décomposer les fractions dont il s'agit dans les fractions partielles

$$\frac{F}{1 - 2 \cos. \alpha . y} + \frac{G}{1 - 2 \cos. \beta . y} + \frac{H}{1 - 2 \cos. \gamma . y} + \&c.$$

$$\frac{(F)}{1 - 2 \cos. \alpha . y} + \frac{(G)}{1 - 2 \cos. \beta . y} + \frac{(H)}{1 - 2 \cos. \gamma . y} + \&c.$$

On mettra ensuite dans ces fractions $\frac{x}{1 + x^2}$ à la place de y, & on les divisera par $1 + x^2$, ce qui les changera en celles-ci,

$$\frac{F}{1 - 2 \cos. \alpha . x + x^2} + \frac{G}{1 - 2 \cos. \beta . x + x^2} + \frac{H}{1 - 2 \cos. \gamma . x + x^2} + \&c.$$

$$\frac{(F)}{1 - 2 \cos. \alpha . x + x^2} + \frac{(G)}{1 - 2 \cos. \beta . x + x^2} + \frac{(H)}{1 - 2 \cos. \gamma . x + x^2} + \&c.$$

qui seront par conséquent égales aux séries

$$t + t' x + t'' x^2 + t''' x^3 + \&c.$$

&

$$(t) + (t') x + (t'') x^2 + (t''') x^3 + \&c.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas, suivant que ces séries répondent aux séries *(E)* & *(F)*, ou aux séries *(G)* & *(H)* de l'*article 26*.

Dans le premier cas, il n'est pas difficile de voir que si on multiplie la série

$$t + t' x + t'' x^2 + t''' x^3 + \&c.$$

par $1 - x$, & la série

$$(t) + (t') x + (t'') x^2 + (t''') x^3 + \&c.$$

par $1 + x$, & qu'on les ajoute enſemble, il en réſultera celle-ci,

$$2T + 2T'x + 2T''x^2 + 2T'''x^3 + \&c.$$

On aura donc dans ce cas

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{IV}x^4 + \&c.$$

$$= \frac{\frac{F+(F)}{2} - \frac{F-(F)}{2}x}{1 - 2\operatorname{cof}.\alpha.x + x^2} + \frac{\frac{G+(G)}{2} - \frac{G-(G)}{2}x}{1 - 2\operatorname{cof}.\beta.x + x^2} + \&c.$$

D'où l'on tirera aiſément l'expreſſion du terme général $T^{(m)}$, comme dans la ſolution précédente.

Dans le ſecond cas, la ſérie

$$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + \&c.$$

étant multipliée par $1 - x^2$, & enſuite ajoutée à la ſérie

$$(t) + (t')x + (t'')x^2 + (t''')x^3 + \&c.$$

multipliée par x, donnera celle-ci:

$$T + 2T'x + 2T''x^2 + 2T'''x^3 + \&c.$$

en ſorte que l'on aura

$$\frac{T}{2} + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{IV}x^4 + \&c.$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{F + (F)x - Fx^2}{1 - 2\operatorname{cof}.\alpha.x + x^2} + \frac{1}{2}.\frac{G + (G)x - Gx^2}{1 - 2\operatorname{cof}.\beta.x + x^2} + \&c.$$

Or ſi on fait dans cette équation $x = 0$, on a $\frac{T}{2} = \frac{F}{2} + \frac{G}{2} + \&c.$ Donc, ajoutant cette équation à celle-là, il viendra

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + T^{V}x^4 + \&c.$$

$$= \frac{F + [\frac{1}{2}(F) - F\operatorname{cof}.\alpha]x}{1 - 2\operatorname{cof}.\alpha.x + x^2} + \frac{G + [\frac{1}{2}(G) - G\operatorname{cof}.\beta]x}{1 - 2\operatorname{cof}.\beta.x + x^2} + \&c.$$

D'où il eſt facile de trouver pour le terme général $T^{(m)}$, l'expreſſion

$$F\operatorname{cof}.m\alpha + \frac{(F)}{2\operatorname{fin}.\alpha}\operatorname{fin}.m\alpha + G\operatorname{cof}.m\beta + \frac{(G)}{2\operatorname{fin}.\beta}\operatorname{fin}.m\beta + \&c.$$

qu'on réduira aiſément à la forme

$$A\operatorname{fin}.(a + m\alpha) + B\operatorname{fin}.(b + m\beta) + \&c.$$

en faisant

$$\text{tang.}\, a = \frac{2\, F \text{ sin.}\, \alpha}{(F)},\ A = \sqrt{(F^2 + \frac{(F)^2}{4 \text{ sin.}\, \alpha^2})},$$

$$\text{tang.}\, b = \frac{2\, G \text{ sin.}\, \beta}{(G)},\ B = \sqrt{(G^2 + \frac{(G)^2}{4 \text{ sin.}\, \beta^2})},$$

&c.

TROISIÈME SOLUTION.

(37.) Ayant nommé, comme ci-dessus, &c. $'''T, ''T, 'T, T, T', T'', T'''$, &c. les termes de la suite proposée, on en formera ces deux séries *(article 24)*

$$\left.\begin{array}{l} T + 'T + (T' + ''T)x + (T'' + '''T)x^2 + (T''' + {}^{\text{IV}}T)x^3 + \&c. \\ T - 'T + (T' - ''T)x + (T'' + '''T)x^2 + (T''' - {}^{\text{IV}}T)x^3 + \&c. \end{array}\right\} \ldots (C)$$

ou bien ces deux-ci *(article 25)*

$$\left.\begin{array}{r} T + (T' + 'T)x + (T'' + ''T)x^2 + (T''' + '''T)x^3 + \&c. \\ T' - 'T + (T'' - ''T)x + (T''' + '''T)x^2 + \&c. \end{array}\right\} \ldots (D)$$

ensuite on opérera sur une quelconque de ces quatre séries, suivant la méthode de la *V.ème Proposition*, en ayant seulement attention *(article 32)* de prendre pour premier dividende, au lieu de l'unité, la quantité $1 - x$ si on choisit la première des deux séries *(C)*, la quantité $1 + x$ si on choisit la seconde de ces séries, ou la quantité $1 - x^2$ si on veut opérer sur la première des deux séries *(D)*; mais à l'égard de la seconde des séries *(D)*, il ne faudra prendre que l'unité, comme à l'ordinaire.

On pourra donc trouver par cette méthode la fraction génératrice de la série, si elle en a une; & pour cela il faudra se souvenir de multiplier ensuite le numérateur de la fraction qu'on aura trouvée directement, par la même quantité qui aura servi de premier dividende pour avoir la véritable fraction génératrice cherchée *(article cité)*.

Ayant trouvé ainsi la fraction génératrice de l'une des deux séries *(C)* ou *(D)*, il faudra chercher encore celle de la série compagne, & pour cela on pourra, si l'on veut, s'y prendre de la même manière; mais comme on sait d'avance

que ces fractions doivent avoir le même dénominateur, il ſuffira de chercher le numérateur de la nouvelle fraction, en multipliant la ſérie correſpondante par le dénominateur déjà trouvé, & ne prenant dans le produit qu'un nombre de termes moindre d'une unité que celui du dénominateur; on pourra même ſe contenter de chercher ainſi les ν premiers termes du produit, ($2\nu + 1$ étant ſuppoſé le nombre des termes du dénominateur); car comme on ſait que les deux ſéries *(C)* doivent avoir pour numérateurs de leurs fractions génératrices des polynomes réciproques du degré $2\nu - 2$ multipliés par $1 - x$ ou par $1 + x$, il s'enſuit que la ſeconde des ſéries *(C)* aura pour numérateur un polynome réciproque du degré $2\nu - 1$, & que la première aura pour numérateur un polynome du même degré $2\nu - 1$, dont les termes extrêmes, ainſi que les équidiſtans des extrêmes auront les mêmes coëfficiens, mais avec des ſignes contraires, polynome qu'on pourra appeler *anti-réciproque;* de même, puiſque la première des deux ſéries *(D)* doit avoir pour numérateur de ſa fraction génératrice un polynome réciproque du degré $2\nu - 2$, multiplié par $1 - x^2$, il eſt facile de voir que ce numérateur ne ſera autre choſe qu'un polynome *anti-réciproque* du degré 2ν; & quant à la ſeconde des mêmes ſéries *(D)*, elle aura naturellement pour numérateur un polynome réciproque du degré $2\nu - 2$. D'où l'on voit qu'il ſuffira toujours de connoître la première moitié des termes du numérateur cherché, puiſque les termes reſtans ſeront les mêmes avec les mêmes ſignes, ou avec des ſignes contraires. Sur quoi voyez encore ci-deſſous la *Remarque II (article 39)*.

Dès qu'on connoîtra les fractions génératrices des deux ſéries *(C)* ou *(D)*, on pourra achever la ſolution du Problème, comme dans l'article précédent. Car, il eſt viſible qu'en faiſant $\frac{x}{1 + x^2} = y$, on pourra mettre les deux fractions génératrices des ſéries *(C)* ſous la forme

$$\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\frac{V}{Y},\quad \frac{1+x}{1+x^2}\cdot\frac{(V)}{Y},$$

& les deux fractions génératrices des séries *(D)*, sous la forme

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{V}{Y},\quad \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{(V)}{Y}.$$

V, *(V)* & *Y* étant des polynomes en *y*, dont les deux premiers seront du degré $\nu - 1$, & le dernier du degré ν; & il est facile de se convaincre que les fractions $\frac{V}{Y}$ & $\frac{(V)}{Y}$ ne seront autre chose que les fractions génératrices des séries *(I)* & *(K)* de la seconde solution; en sorte qu'en opérant sur ces fractions, comme nous l'avons enseigné dans cet endroit, on en tirera pour l'expression du terme général $M^{(m)}$ les mêmes formules que nous avons trouvées à la fin de la solution précédente, en remarquant que le premier des deux cas que nous y avons distingués, répond à celui où l'on aura employé les séries *(C)*, & que le second répond à celui où l'on aura fait usage des séries *(D)*.

Remarque I.

(38.) Nous avons dit, dans la seconde solution du Problème précédent, que les fractions génératrices des deux séries *(I)* & *(K)* doivent avoir le même dénominateur. Cela est vrai en général, comme on peut s'en convaincre en relisant les *articles 24, 25* & *26*; mais il peut arriver que le dénominateur ait un facteur commun avec le numérateur d'une de ces fractions, auquel cas ce facteur s'évanouira de lui-même, & la fraction deviendra plus simple. Dans ce cas donc, si on multiplie par ce dénominateur, l'autre fraction, on aura encore après la multiplication une fraction dont le numérateur sera le même qu'auparavant, & dont le dénominateur sera le facteur commun qui s'étoit évanoui dans la première fraction. Par conséquent cette fraction donnera aussi une série récurrente, mais dans laquelle il y aura au

commencement autant de termes irréguliers qu'il y a d'unités dans le degré du polynome par lequel elle aura été multipliée *(article 17).* D'où il eſt facile de conclure que ſi après avoir trouvé la fraction génératrice de l'une des ſéries *(I)* ou *(K),* on multiplie l'autre ſérie par le dénominateur de cette fraction, & qu'après avoir pris autant de termes de ce produit qu'il y en a dans le multiplicateur, moins un, on trouve que les termes ſuivans ne ſont pas nuls, ce ſera une marque que la fraction trouvée eſt dans le cas dont nous venons de parler; alors il faudra conſidérer ces derniers termes, & après les avoir diviſés par la puiſſance de y qui multiplie le premier d'entr'eux, on cherchera de nouveau, par la méthode générale, la fraction génératrice de la ſérie qui en eſt formée; on multipliera enſuite cette fraction par la puiſſance de y, par laquelle on avoit diviſé les termes de la ſérie, & on y ajoutera les premiers termes dont on a parlé; on aura ainſi, après avoir réduit le tout au même dénominateur, une fraction qui étant encore diviſée par le dénominateur de la première fraction trouvée, ſera la véritable fraction génératrice de l'autre ſérie en queſtion.

Remarque II.

(39.) Il eſt viſible que la même difficulté qui vient de faire l'objet de la *Remarque précédente,* pourra ſe rencontrer auſſi dans la troiſième Solution; & cela arrivera lorſque les termes du produit de la ſérie par le dénominateur trouvé, ne formeront pas un polynome réciproque ou anti-réciproque, comme nous l'avons ſuppoſé dans cette ſolution. Dans ce cas donc il faudra chercher de nouveau la fraction génératrice de la ſérie formée par le produit dont nous parlons, mais comme cette ſérie contiendra au commencement autant de termes irréguliers, moins un, qu'il y en a dans le dénominateur déjà trouvé, il faudra ſe débarraſſer de ces termes par la méthode de l'*article 34.* Voici donc comment on s'y prendra. Ayant trouvé la fraction génératrice de l'une des deux ſéries *(C)* ou *(D),* pour avoir celle de la ſérie

compagne, on multipliera cette férie par le dénominateur de la fraction trouvée, & retenant les premiers termes de ce produit, on retranchera des termes fuivans ce qu'il faut pour qu'il en réfulte un polynome réciproque ou anti-réciproque de la forme & du degré dont devroit être le numérateur de la fraction cherchée, fi elle avoit le même dénominateur que l'autre fraction. On divifera tous les termes de cette partie retranchée par la puiffance de x qui en affecte le premier terme, & on opérera enfuite fur la férie réfultante, comme on auroit opéré fur la férie elle-même, fi on en avoit cherché directement la fraction génératrice, fans fuppofer fon dénominateur connu.

Dès qu'on aura trouvé la fraction génératrice de la férie en queftion, il n'y aura plus qu'à la multiplier par la même puiffance de x, par laquelle on avoit divifé auparavant tous fes termes, & à y ajouter enfuite le polynome réciproque ou anti-réciproque dont on vient de parler; la fraction qui en réfultera, après avoir réduit le tout au même dénominateur & multiplié de plus ce dénominateur par celui de la première fraction déjà trouvée, fera la fraction génératrice de la férie compagne de la première.

Cette règle fe démontre facilement par les principes de l'article cité; nous ne nous y arrêterons pas d'autant que dans la pratique, il paroît beaucoup plus utile d'employer toujours la méthode directe pour l'une & l'autre férie; car quoique de cette manière le calcul devienne un peu plus long, il y a néanmoins cet avantage que l'opération qu'on fera fur la feconde férie fervira de preuve à celle qu'on aura faite pour la première, puifqu'il faut néceffairement que le dénominateur de la fraction génératrice de celle-ci, foit le même que celui de la fraction génératrice de celle-là, ou qu'il en foit du moins un divifeur exact.

Conclusion.

(40.) Comme la troifième Solution mérite d'être employée de préférence à caufe de fa fimplicité & de fa facilité, je

vais, pour la commodité de ceux qui voudront en faire uſage, récapituler en peu de mots les procédés qu'elle demande. Pour cela je diſtinguerai les deux cas qui répondent aux ſéries *(C)* ou *(D)*, ſur leſquelles on eſt libre d'opérer; ce qui fournira deux méthodes différentes de réſoudre le Problème.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Soit T un des termes du milieu de la ſérie propoſée, T', T'', T''', &c. les termes ſuivans, & $'T$, $''T$, $'''T$, $^{\text{IV}}T$, les précédens, on en formera d'abord la ſérie des ſommes

$$T + 'T + (T' + ''T)x + (T'' + '''T)x^2 + (T''' + {}^{\text{IV}}T)x^3 + \text{\&c.}$$

& pour rendre le calcul plus commode, on commencera par diviſer tous les termes de cette ſérie par ſon premier terme $T + 'T$, que j'appellerai en général p, en ſorte que la ſérie réſultante que je nommerai s ait pour premier terme l'unité.

Cette préparation faite, on diviſera $1 - x$ par s, & au lieu de 1 on écrira d'abord $1 + x^2$ dans le quotient; enſuite après la multiplication & la ſouſtraction ordinaire, on continuera la diviſion, & il viendra dans le quotient un terme de la forme qx; après quoi on aura un reſte dont le premier terme ſera de la forme $p'x^2$.

On diviſera ce reſte par ſon premier terme $p'x^2$, pour avoir un polynome dont le premier terme ſoit l'unité, & qu'on nommera s'; après quoi on diviſera s par s', & au lieu de 1, on écrira de nouveau $1 + x^2$ au quotient; enſuite continuant la diviſion, comme à l'ordinaire, on aura dans le quotient un terme tel que $q'x$, & il viendra un reſte dont le premier terme ſera de la forme $p''x^2$.

On diviſera donc auſſi ce reſte par ſon premier terme $p''x^2$, & on déſignera le polynome réſultant par s''; on diviſera maintenant s' par s'', en écrivant d'abord au quotient $1 + x^2$ au lieu de 1; on continuera la diviſion, & l'on aura dans le quotient un nouveau terme de la forme $q''x$; enſuite de quoi, le reſte aura pour premier terme $p'''x^2$.

On

On opérera ſur ce reſte comme ſur les précédens, & on continuera ainſi, juſqu'à ce que l'on parvienne à un reſte qui ſoit exactement ou à très-peu près nul; dans le premier cas, on aura une ſolution exacte; dans le ſecond, on n'en aura qu'une approchée.

Maintenant, ſoit n le nombre des quotiens trouvés, en ſorte que l'on ait les deux ſuites de nombres $p, p', p'', p''',$ &c. $p^{(n-1)}$, & $q, q', q'', q''',$ &c. $q^{(n-1)}$; on fera

$\psi = 1$

$\psi' = 1 + q^{(n-1)} y,$

$\psi'' = (1 + q^{(n-2)} y)\psi' + p^{(n-1)} y^2 \psi,$

$= 1 + (q^{(n-1)} + q^{(n-2)}) y + (q^{(n-1)} . q^{(n-2)} + p^{(n-1)}) y^2,$

$\psi''' = (1 + q^{(n-3)} y)\psi'' + p^{(n-2)} y^2 \psi',$

$= 1 + (q^{(n-1)} + q^{(n-2)} + q^{(n-3)}) y + (q^{(n-1)} q^{(n-2)},$
$+ q^{(n-1)} q^{(n-3)} + q^{(n-2)} q^{(n-3)}) y^2 + (q^{(n-1)} q^{(n-2)} q^{(n-3)},$
$+ q^{(n-1)} p^{(n-2)} + q^{(n-3)} p^{(n-1)}) y^3,$

&c.

$\psi^{(n)} = (1 + qy)\psi^{(n-1)} + p' y^2 \psi^{(n-2)}.$

Et on conſidérera la fraction $\frac{p\psi^{(n-1)}}{\psi^{(n)}}$, dont le dénominateur $\psi^{(n)}$ ſera toujours un polynome en y du degré n, dans lequel le premier terme ſera l'unité; en ſorte qu'il pourra être réſolu en n facteurs ſimples de la forme $1 - \pi y$, $1 - \rho y$, &c. On cherchera donc ces facteurs par les méthodes connues, & enſuite on décompoſera la fraction elle-même, en autant de fractions ſimples, telles que

$$\frac{F}{1 - \pi y} + \frac{G}{1 - \rho y} + \text{\&c.}$$

Ces opérations achevées, on reprendra la ſérie propoſée,

& on en formera la série des différences

$$T - T' + (T' - {}^{''}T)x + (T'' - {}^{'''}T)x^2 + (T''' - {}^{IV}T)x^3 + \&c.$$

qu'on traitera de la même manière qu'on l'a fait à l'égard de la série précédente des sommes, avec cette seule différence qu'au lieu de prendre $1 - x$ pour premier dividende, il faudra prendre maintenant $1 + x$.

En suivant donc les mêmes procédés, on parviendra aussi à une fraction telle que $\frac{p\psi^{(n-1)}}{\psi^{(n)}}$, dont le dénominateur $\psi^{(n)}$ devra être exactement ou à très-peu-près le même que celui de la fraction trouvée d'après la première série; ce qui pourra servir de confirmation à la bonté du calcul. Ainsi on pourra décomposer pareillement cette dernière fraction en n fractions partielles de la forme

$$\frac{(F)}{1 - \pi y} + \frac{(G)}{1 - \rho y} + \&c.$$

Ayant trouvé de cette manière les valeurs des quantités π, ρ, &c. F, G, &c. (F), (G), &c. il n'y aura plus qu'à faire

$$\text{cos.}\,\alpha = \frac{\pi}{2},\ \text{tang.}\,a = \frac{F + (F)}{(F)\,\text{cot.}\,\frac{\alpha}{2} - F\,\text{tang.}\,\frac{\alpha}{2}},$$

$$A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(F^2\,\text{sec.}\,\frac{\alpha^2}{2} + (F)^2\,\text{cosec.}\,\frac{\alpha^2}{2}\right)},$$

$$\text{cos.}\,\beta = \frac{\rho}{2},\ \text{tang.}\,b = \frac{G + (G)}{(G)\,\text{cot.}\,\frac{\beta}{2} - G\,\text{tang.}\,\frac{\beta}{2}},$$

$$B = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(G^2\,\text{sec.}\,\frac{\beta^2}{2} + (G)^2\,\text{cosec.}\,\frac{\beta^2}{2}\right)},$$

&c.

& l'on aura pour le terme général $T^{(m)}$ de la série proposée, l'expression suivante,

$$T^{(m)} = A\,\text{sin.}\,(a + m\alpha) + B\,\text{sin.}\,(b + m\beta) + \&c$$

SECONDE MÉTHODE.

On formera d'abord la férie des fommes

$$T + (T' + {}'T)x + (T'' + {}''T)x^2 + (T''' + {}'''T)x^3 + \&c.$$

& on opérera fur cette férie fuivant les mêmes procédés prefcrits ci-deffus, en ayant feulement attention de prendre $1 - x^2$ pour premier dividende. On trouvera ainfi les fractions partielles

$$\frac{F}{1 - \pi y} + \frac{G}{1 - \rho y} + \&c.$$

On formera enfuite cette autre férie des différences

$$T' - {}'T + (T'' - {}''T)x + (T''' - {}'''T)x^2 + \&c.$$

& la traitant de même que la précédente, mais en prenant fimplement l'unité pour premier dividende, on obtiendra pareillement ces fractions partielles

$$\frac{(F)}{1 - \pi y} + \frac{(G)}{1 - \rho y} + \&c.$$

enfuite on fera

$$\text{cof.}\,\alpha = \frac{\pi}{2},\ \text{tang.}\,a = \frac{2F\,\text{fin.}\,\alpha}{(F)},\ A = \sqrt{\left(F^2 + \frac{(F)^2}{4\,\text{fin.}\,\alpha^2}\right)},$$

$$\text{cof.}\,\beta = \frac{\rho}{2},\ \text{tang.}\,b = \frac{2G\,\text{fin.}\,\beta}{(G)},\ B = \sqrt{\left(G^2 + \frac{(G)^2}{4\,\text{fin.}\,\beta^2}\right)},$$

&c.

& l'on aura comme ci-devant,

$$T^{(m)} = A\,\text{fin.}\,(a + m\alpha) + B\,\text{fin.}\,(b + m\beta) + \&c.$$

I.er EXEMPLE.

(41.) Pour montrer l'ufage des méthodes précédentes, par un exemple relatif à l'Aftronomie, je prendrai la Table de l'équation du temps de Mayer *(Tabulæ folares, &c.* pag. 111), dont la marche eft affez irrégulière, & fuppofant qu'on ne me donne qu'un certain nombre de termes de cette Table pris à des intervalles égaux, je me propofe de trouver la loi de

ces termes, & de connoître par-là la formule générale d'après laquelle la Table est formée.

Supposons que les termes donnés soient ceux qui répondent à 0^s, $2^s\,10^d$, $4^s\,20^d$, 4^s, $9^s\,10^d$, &c. dont l'intervalle constant est $2^s\,10^d$, & réduisant les minutes en secondes, on aura la série des nombres suivans *(voyez la planche ci-jointe, case 1)*,

456, — 168, 274, — 933, 220, 631, — 232, 349, — 823, — 72, 772, — 237, 358, — 657, — 360, 860, — 181, 305, — 457, — 616, &c.

dont il s'agira de trouver la loi.

Pour y parvenir, je suivrai donc les procédés détaillés ci-dessus *(article 40)*, & j'employerai la première méthode en opérant sur les séries formées des sommes & des différences des termes de la proposée équidistans du milieu.

Prenant donc le terme 772, qui répond à $11^s\,10^d$ pour T, & les suivans — 237, 258, &c. pour T', T'', &c. ainsi que les précédens — 72, — 823, &c. pour $`T$, $``T$, &c. il faudra chercher les sommes $T + `T$, $T' + ``T$, &c. & les différences $T - `T$, $T' - ``T$, &c. & pour les trouver plus aisément & sans craindre de se tromper, il n'y aura qu'à écrire de nouveau les mêmes termes, comme on le voit dans les lignes 3.me & 4.me de la première case, & prendre ensuite les sommes d'un côté & les différences de l'autre. On aura ainsi cette série des sommes

700, — 1060, 707, — 889, 271, 1080, — 1114, 579, — 625, — 160, &c.

& cette autre série des différences,

844, 586, 9, — 425, — 991, 640, 752, 31, — 289, — 1072, &c.

sur chacune desquelles il faudra opérer séparément.

PREMIÈ

0ˢ	2ˢ 10ᵈ	4ˢ 20ᵈ	7ˢ	9ˢ 10ᵈ	11ˢ 20ᵈ	2ˢ	4ˢ 10ᵈ	6ˢ 20ᵈ	9ˢ
7′ 36″	− 2′ 48″	4′ 34″	− 15′ 33″	3′ 40″	10′ 31″	− 3′ 52″	5′ 49″	− 13′ 43″	− 1′ 12″
456.	− 168.	274.	− 933.	220.	631.	− 232.	349.	− 823.	− 72.
− 616.	− 457.	305.	− 181.	860.	− 360.	− 657.	358.	− 237.	772.
Somme − 160.	− 625.	579.	− 1114.	1080.	271.	− 889.	707.	− 1060.	700.

DEUXIÈ

700.	2.8450980.	9.7111996.	0,51428.		
− 1060.	3.0253059.	0.1802079.	1,51428.	9.8914075.	0,77877.
707.	2.8494194.	0.0043214.	1,01000.	9.7155210.	0,51943.
− 889.	2.9489018.	0.1038038.	1,27000.	9.8150034.	0,65314.
271.	2.4329693.	9.5878713.	0,38714.	9.2990709.	0,19910.
1080.	3.0334238.	0.1883258.	1,54286.	9.8995254.	0,79346.
− 1114.	3.0468852.	0.2017872.	1,59143.	9.9129868.	0,81844.
579.	2.7626786.	9.9175806.	0,82714.	9.6287802.	0,42539.
− 625.	2.7958800.	9.9507820.	0,89286.	9.6619816.	0,45918.
− 160.	2.2041200.	9.3590220.	0,22857.		

TROISIÈ

844.	2.9263424.	9.4852812.	0,30569.		
586.	2.7678976.	9.8415552.	0,69431.	9.3268364.	0,21224.
9.	0.9542425.	8.0279001.	0,01066.	7.5131813.	0,00326.
− 425.	2.6283889.	9.7020465.	0,50355.	9.1873277.	0,15393.
− 991.	2.9960737.	0.0697313.	1,17417.	9.5550125.	0,35893.
640.	2.8061800.	9.8798376.	0,75829.	9.3651188.	0,23180.
752.	2.8762178.	9.9448754.	0,89100.	9.4351566.	0,27237.
31.	1.4913617.	8.5650193.	0,03673.	8.0503005.	0,01123.
− 289.	2.4608978.	9.5345554.	0,34242.	9.0198366.	0,10467.
− 1072.	3.0301948.	0.1038524.	1,27014.		

E CASE.

11ˢ 10ᵈ	1ˢ 20ᵈ	4ˢ	6ˢ 10ᵈ	8ˢ 20ᵈ	11ˢ	1ˢ 10ᵈ	3ˢ 20ᵈ	6ˢ	8ˢ 10ᵈ
12′ 52″	− 3′ 57″	5′ 58″	− 10′ 57″	− 6′ 0″	14′ 20″	− 3′ 1″	5′ 5″	− 7′ 37″	− 10′ 16″
772.	− 237.	358.	− 657.	− 360.	860.	− 181.	305.	− 457.	− 616.
− 72.	− 823.	349.	− 232.	631.	220.	− 933.	274.	− 168.	456.
844.	586.	9.	− 425.	− 991.	640.	752.	31.	− 289.	Différence. − 1072.

E CASE.

− 1,23123.	0.0903392.	9.5121772.	0,32522.		
2,26485.	0.3550395.	0.2647003.	1,83950.	9.7768775.	0,59824.
− 0,74400.	9.8715729.	9.7812337.	0,60427.	9.2934109.	0,19652.
− 0,47196.	9.6739052.	9.5835660.	0,38332.	9.0957432.	0,12466.
0,41083.	9.6136621.	9.5233229.	0,33367.	9.0355001.	0,10853.
− 1,55156.	0.1907685.	0.1004293.	1,26017.	9.6126065.	0,40983.
2,05890.	0.3136353.	0.2232961.	1,67223.	9.7354733.	0,54384.
− 0,13939.	9.1432316.	9.0528924.	0,11295.		

E CASE.

− 1,22290.	0.0873909.	9.7288892.	0,53566.		
− 0,19402.	9.2878465.	9.2004556.	0,15865.	8.9293448.	0,08498.
1,31744.	0.1197209.	0.0323300.	1,07730.	9.7612192.	0,57706.
0,10419.	9.0178260.	8.9304351.	0,08519.	8.6593243.	0,04563.
0,05137.	8.7107096.	8.6233187.	0,04201.	8.3522079.	0,02250.
− 1,06739.	0.0283232.	9.9409323.	0,87284.	9.6698215.	0,46755.
− 0,55981.	9.7480406.	9.6606497.	0,45777.	9.3895389.	0,24521.
1,33808.	0.1264721.	0.0390812.	1,09416.		

QUATRI

1.er quotient..	$1 + x^2 + 0{,}51428\,x$					
1.er diviseur...	1	$-\ 1{,}51428\,x$	$+\ 1{,}01000\,x^2$	$-\ 1{,}27000\,x^3$	$+\ 0{,}38714\,x^4$	$+\ 1{,}5$
1.er dividende	1	$-\ x$				
	$-\ 1$	$+\ 1{,}51428\,x$	$-\ 2{,}01000\,x^2$	$+\ 2{,}78428\,x^3$	$-\ 1{,}39714\,x^4$	$-\ 0{,}2$
		$-\ 1{,}51428$	$+\ 0{,}77877$	$-\ 0{,}51943$	$+\ 0{,}65314$	$-\ 0{,}1$
1.er reste......	*	*	$-\ 1{,}23123\,x^2$	$+\ 2{,}26485\,x^3$	$-\ 0{,}74400\,x^4$	$-\ 0{,}4$
2.e quotient..	$1 + x^2 + 0{,}32522\,x$					
2.e diviseur...	1	$-\ 1{,}83950\,x$	$+\ 0{,}60427\,x^2$	$+\ 0{,}38332\,x^3$	$+\ 0{,}33367\,x^4$	$+\ 1{,}2$
2.e dividende	1	$-\ 1{,}51428\,x$	$+\ 1{,}01000\,x^2$	$-\ 1{,}27000\,x^3$	$+\ 0{,}38714\,x^4$	$+\ 1{,}5$
	$-\ 1$	$+\ 1{,}83950$	$-\ 1{,}60427$	$+\ 1{,}45618$	$-\ 0{,}27060$	$-\ 1{,}6$
	*	$0{,}32522\,x$	$-\ 0{,}59427\,x^2$	$+\ 0{,}18618\,x^3$	$+\ 0{,}11654\,x^4$	$-\ 0{,}1$
		$-\ 0{,}32522$	$+\ 0{,}59824$	$-\ 0{,}19652$	$-\ 0{,}12466$	$+\ 0{,}1$
2.e reste.....	*	*	$0{,}00397\,x^2$	$-\ 0{,}01034\,x^3$	$-\ 0{,}00812\,x^4$	$+\ 0{,}0$

CINQUI

1.er quotient..	$1 + x^2 + 0{,}30569\,x$					
1.er diviseur...	1	$+\ 0{,}69431\,x$	$+\ 0{,}01066\,x^2$	$-\ 0{,}50355\,x^3$	$-\ 1{,}17417\,x^4$	$+\ 0{,}7$
1.er dividende	1	$+\ x$				
	$-\ 1$	$-\ 0{,}69431\,x$	$-\ 1{,}01066\,x^2$	$-\ 0{,}19076\,x^3$	$+\ 1{,}16351\,x^4$	$-\ 0{,}2$
		$-\ 0{,}30569$	$-\ 0{,}21224$	$-\ 0{,}00326$	$+\ 0{,}15393$	$+\ 0{,}3$
1.er reste......	*	*	$-\ 1{,}22290\,x^2$	$-\ 0{,}19402\,x^3$	$+\ 1{,}31744\,x^4$	$+\ 0{,}1$
2.e quotient..	$1 + x^2 + 0{,}53566\,x$					
2.e diviseur...	1	$+\ 0{,}15865\,x$	$-\ 1{,}07730\,x^2$	$-\ 0{,}08519\,x^3$	$-\ 0{,}04201\,x^4$	$+\ 0{,}8$
2.e dividende	1	$+\ 0{,}69431\,x$	$+\ 0{,}01066\,x^2$	$-\ 0{,}50355\,x^3$	$-\ 1{,}17417\,x^4$	$+\ 0{,}7$
	$-\ 1$	$-\ 0{,}15865$	$+\ 0{,}07730$	$-\ 0{,}07346$	$+\ 1{,}11931$	$-\ 0{,}7$
	*	$0{,}53566\,x$	$+\ 0{,}08796\,x^2$	$-\ 0{,}57701\,x^3$	$-\ 0{,}05486\,x^4$	$-\ 0{,}0$
		$-\ 0{,}53566$	$-\ 0{,}08498$	$+\ 0{,}57706$	$+\ 0{,}04563$	$+\ 0{,}0$
2.e reste......	*	*	$0{,}00298\,x^2$	$+\ 0{,}00005\,x^3$	$-\ 0{,}00923\,x^4$	$-\ 0{,}0$

ME CASE.

$36\,x^5 - 1{,}59143\,x^6 + 0{,}82714\,x^7 - 0{,}89286\,x^8 - 0{,}22857\,x^9$

$36\,x^5 + 1{,}20429\,x^6 - 2{,}37000\,x^7 + 2{,}48429\,x^8 - 0{,}59857\,x^9$

$0 \quad - 0{,}79346 \quad + 0{,}81844 \quad - 0{,}42539 \quad + 0{,}45918$

$96\,x^5 - 0{,}41083\,x^6 - 1{,}55156\,x^7 + 2{,}05890\,x^8 - 0{,}13939\,x^9$

$7\,x^5 - 1{,}67223\,x^6 + 0{,}11295\,x^7$

$6\,x^5 - 1{,}59143\,x^6 + 0{,}82714\,x^7$

$9 \quad + 2{,}00590 \quad - 1{,}37312$

$3\,x^5 + 0{,}41447\,x^6 - 0{,}54598\,x^7$

$3 \quad - 0{,}40983 \quad + 0{,}54384$

$0\,x^5 - 0{,}00464\,x^6 - 0{,}00214\,x^7$

ME CASE.

$9\,x^5 + 0{,}89100\,x^6 + 0{,}03673\,x^7 - 0{,}34242\,x^8 - 1{,}27014\,x^9$

$74\,x^5 + 0{,}28317\,x^6 - 0{,}79502\,x^7 - 0{,}54858\,x^8 + 1{,}23341\,x^9$

$93 \quad - 0{,}23180 \quad - 0{,}27237 \quad - 0{,}01123 \quad + 0{,}10467$

$9\,x^5 + 0{,}05137\,x^6 - 1{,}06739\,x^7 - 0{,}55981\,x^8 + 1{,}33808\,x^9$

$34\,x^5 + 0{,}45777\,x^6 - 1{,}09416\,x^7$

$29\,x^5 + 0{,}89100\,x^6 + 0{,}03673\,x^7$

$55 \quad - 0{,}41576 \quad + 0{,}22132$

$36\,x^5 + 0{,}47524\,x^6 + 0{,}25805\,x^7$

$50 \quad - 0{,}46755 \quad - 0{,}24521$

$86\,x^5 + 0{,}00769\,x^6 + 0{,}01284\,x^7$

Opération sur la première série.

Cette série sera donc représentée ainsi;

$$700 - 1060x + 707x^2 - 889x^3 + 271x^4 + 1080x^5 - 1114x^6 + 579x^7 - 625x^8 - 160x^9 \ \&c.$$

& l'on aura d'abord $p = 700$; ensuite divisant tous les termes par p, & faisant le calcul par les logarithmes, comme on le voit dans la 2.e *case*, on aura la nouvelle série

$$(s) \ldots 1 - 1{,}51428x - 1{,}01000x^2 - 1{,}27000x^3 + 0{,}38714x^4 + 1{,}54186x^5 - 1{,}59143x^6 + 0{,}82714x^7 - 0{,}89286x^8 - 0{,}228857x^9,$$

par laquelle il faudra diviser le binome $1 - x$. Le procédé de cette division est détaillé dans la 4.e *case*, & les calculs subsidiaires pour les multiplications se trouvent dans la 2.e *case*.

On a donc ce premier quotient $1 + x^2 + 0{,}51428x$, en sorte que $q = 0{,}51428$; ensuite on a le reste $- 1{,}23123x^2 + 2{,}26485x^3 -$ &c. donc ..... $p' = - 1{,}23113$; & comme ce reste n'est ni nul ni fort petit, il faut continuer l'opération.

On divisera donc tous les termes du reste dont il s'agit par p', & l'on aura la série

$$(s') \ldots 1 - 1{,}51428x + 1{,}01000x^2 + 0{,}38332x^3 - 0{,}33367x^4 + 1{,}26017x^5 - 1{,}67213x^6 + 0{,}11295x^7,$$

qui devra maintenant servir de diviseur à la série s.

Les 4.e & 2.e *cases* contiennent aussi le détail de cette nouvelle division, ainsi que les calculs subsidiaires qu'elle demande; & l'on voit que le quotient est $1 + x^2 + 0{,}32522x$, ce qui donne $q' = 0{,}32522$; & que le reste est $0{,}00397x^2 - 0{,}01034x^3 - 0{,}00812x^4 + 0{,}00790x^5 - 0{,}00464x^6 - 0{,}00214x^7$.

Or, comme les coëfficiens numériques ſont ici fort petits, on pourra négliger ce reſte & regarder l'opération comme achevée ; on aura de cette manière non la véritable loi de la ſérie, mais une loi fort approchée qu'il ſera facile de rectifier enſuite.

La première ſérie donne donc ces valeurs

$$p = 700, \qquad q = 0{,}51428,$$
$$p' = -1{,}23123, \qquad q' = 0{,}32522.$$

qu'il faudra ſubſtituer dans les formules de l'*article 40 ;* mais auparavant nous chercherons celles qui doivent réſulter de l'autre ſérie.

Opération ſur la ſeconde ſérie.

Cette ſérie ſera repréſentée ainſi,

$$844 + 586x + 9x^2 - 425x^3 - 991x^4 + 640x^5 + 752x^6 + 31x^7 - 289x^8 - 1072x^9 \text{ \&c.}$$

en ſorte qu'on aura d'abord $p = 844$; diviſant donc tous les termes par p, & faiſant le calcul par les logarithmes, comme on le voit dans la *3.e caſe,* on aura cette nouvelle ſérie

$$(s) \ldots 1 + 0{,}69431x + 0{,}01066x^2 - 0{,}50355x^3 - 1{,}17417x^4 + 0{,}75829x^5 + 0{,}89100x^6 + 0{,}03663x^7 - 0{,}34242x^8 - 0{,}27014x^9,$$

par laquelle il faudra diviſer le binome $1 + x$.

On trouve dans la *5.e caſe* le détail de cette diviſion, & dans la *3.e caſe,* les calculs ſubſidiaires qu'elle demande; & l'on voit que le quotient eſt $1 + x^2 + 0{,}30569x$, ce qui donne $q = 0{,}30569$, & que le reſte eſt... $- 1{,}22290x^2 - 0{,}19402x^3 +$ &c. de ſorte que l'on aura $p' = -1{,}22290$.

Continuant donc l'opération, on diviſera ce reſte par p',

& l'on aura la nouvelle série

$(s') \ldots 1 + 0{,}15865x - 1{,}07730x^2 - 0{,}08519x^3$
$- 0{,}4201x^4 + 0{,}87284x^5 + 0{,}45777x^6 - 1{,}09416x^7$,

par laquelle il faudra diviser la série s.

La division faite comme on le voit dans la 5.e *case*, on aura le quotient $1 + x^2 + 0{,}53566x$, par conséquent $q' = 0{,}53566$; & ensuite on aura ce reste,

$$0{,}00298x^2 + 0{,}0005x^3 - 0{,}00923x^4 - 0{,}00686x^5 + 0{,}00769x^6 + 0{,}01284x^7,$$

lequel n'ayant que des coëfficiens fort petits, pourra être négligé, en sorte qu'on pourra regarder l'opération comme finie.

Ainsi les valeurs résultantes de la seconde série seront

$$p = 844, \qquad q = 0{,}30569,$$
$$p' = -1{,}22290, \qquad q' = 0{,}53566.$$

Résultats déduits des valeurs précédentes.

Puisque nous n'avons eu que deux quotiens dans chaque opération, on fera $n = 2$, & la fraction à considérer sera $\frac{p\psi'}{\psi''}$, dans laquelle on aura

$$\psi' = 1 + q'y,$$
$$\psi'' = 1 + (q + q')y + (qq' + p')y^2.$$

Or si on représente par $1 - \pi y$, $1 - \rho y$ les deux facteurs simples du trinome ψ'', on aura, comme l'on sait

$$\pi = -\frac{q + q'}{2} + \frac{\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']}}{2},$$

$$\rho = -\frac{q + q'}{2} + \frac{\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']}}{2},$$

& la fraction $\frac{p\psi'}{\psi''}$ se décomposera en ces deux-ci

$$\frac{F}{1 - \pi y} + \frac{G}{1 - \rho y},$$

en faisant

$$F = -\frac{p(q' + \pi)}{p - \pi} = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{q - q'}{\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']}}\right),$$

$$G = -\frac{p(q' + \rho)}{\pi - \rho} = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{q - q'}{\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']}}\right).$$

Introduisons maintenant dans ces formules les valeurs trouvées ci-dessus, & prenons d'abord celles qui résultent de la première série.

On aura donc

$q + q' = 0{,}83950.$

$q - q' = 0{,}18906.$ log. $9{,}2765997.$ 2 log. $8{,}5531994.$

$(q - q') = 0{,}03574.$

$- 4p' = 4{,}92492.$

$4{,}96066.$ log. $0{,}6955394.$ $\frac{1}{2}$ log. $0{,}3477697.$

$\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 2{,}22725.$

$q + q' = 0{,}83950.$

Somme $3{,}06675.$

Diff. $1{,}38775.$

donc

$$\pi = 0{,}69387, \qquad \rho = -1{,}53337;$$

de plus

$l.q - q' = 9{,}2765997.$

$l.\sqrt{([q - q')^2 - 4p']} = 0{,}3477697.$

Diff. $0{,}9288300,$ n.° $0{,}08488.$

$l.0{,}91512 = 9{,}9614780.$

$l.1{,}08488 = 0{,}0353818.$

$l\frac{p}{2} = l.350 = 2{,}5440680.$

$lF = 2{,}5055460.$

$lG = 2{,}5794498.$

donc

$$F = 320{,}30. \qquad G = 379{,}70.$$

Employons maintenant les valeurs données par la seconde série,

série, & l'on aura

$$q + q' = 0{,}84135.$$

$$q - q' = 0{,}22997.\ \text{log. } 9{,}3616712.\ 2\ \text{log. } 8{,}7233424.$$

$$(q - q')^2 = 0{,}05288.$$

$$-4p' = 4{,}89160.$$

$$4{,}94448.\ \text{log. } 0{,}6941206.\ \tfrac{1}{2}\ \text{log. } 0{,}3470603.$$

$$\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 2{,}22362.$$

$$q + q' = 0{,}84135.$$

$$\text{Somme } 3{,}06497.$$

$$\text{Diff. } 1{,}38227.$$

donc

$$\pi = 0{,}69113, \qquad \rho = -1{,}53248.$$

ensuite

$$l.q' - q = 9{,}3616712.$$

$$l.\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 0{,}3470603.$$

$$\text{Diff. } 9{,}0146109,\ \text{n.}^{\circ}\ 0{,}10342.$$

$$l.1{,}10342 = 0{,}0427409.$$

$$l.0{,}89658 = 9{,}9525890.$$

$$l.\frac{p}{2} = l.422 = 2{,}6253125.$$

$$l(F) = 2{,}6680534,$$

$$l(G) = 2{,}5779015.$$

donc

$$(F) = 465{,}64. \qquad (G)\ 378{,}36.$$

Il faudra maintenant ſubſtituer ces valeurs dans les formules de l'*article 40*, pour en déduire celles de α, β; a, b; A, B; mais auparavant il eſt bon de remarquer à l'égard des quantités π & ρ, que les valeurs trouvées d'après les réſultats de la première opération ne ſont pas tout-à-fait les mêmes que celles qui réſultent de la ſeconde opération; ce qui ne doit pas paroître ſurprenant, attendu que les reſtes que l'on a négligés comme nuls, ne l'étoient pas, mais étoient ſeulement très-petits. On peut même obſerver que comme les coëfficiens numériques de ces reſtes n'ont de chiffres ſignificatifs que dans la troiſième place décimale & dans les ſuivantes, les

valeurs de π & ρ ne peuvent être exactes que jusqu'à la troisième place décimale exclusivement ; aussi voit-on que les deux valeurs de π, ainsi que celles de ρ, s'accordent entr'elles dans les deux premières décimales.

Nous donnerons au reste à π & à ρ des valeurs moyennes entre celles qu'on a trouvées ci-dessus; ainsi on aura

$$\pi = 0{,}69250, \text{ cos. } \alpha = \frac{\pi}{2} = 0{,}34625.$$

$$\rho = -1{,}53292, \text{ cos. } \beta = \frac{\rho}{2} = -0{,}76646.$$

donc

$$\alpha = 69^d\ 45', \quad \beta = 180^d - 39^d\ 58' = 140^d\ 2'.$$

Maintenant on aura

$$l.\text{cot.}\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}1567915.$$
$$l.(F) = 2{,}6680534.$$
$$2{,}8248449, \text{ n.° } 668{,}10.$$

$$l.\text{tang.}\ \frac{\alpha}{2} = 9{,}8432085.$$
$$l.F = 2{,}5055460.$$
$$2{,}3487545, \text{ n.° } 223{,}23.$$
$$\text{Diff. } 444{,}87.$$

$$F = 320{,}30.$$
$$(F) = 465{,}64.$$
$$785{,}94, \text{ log. } 2{,}8953894.$$
$$\text{ôtez log. } 444{,}87 = 2{,}6482331.$$
$$0{,}2471563 = l.\text{ tang. } a$$

donc

$$a = 60^d\ 30'.$$

Ensuite on aura

$$l.\text{sec.}\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}0859736.$$
$$l.F = 2{,}5055460.$$
$$2{,}5915196.$$
$$\text{double } 5{,}1830392, \text{ n.° } 152419.$$

$$l.\text{cosec.}\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}2427650.$$
$$l.(F) = 2{,}6680534.$$
$$2{,}9108184.$$
double $5{,}8216368$, n.° $663188.$

$$4A^2 = 815607.$$
$$2A = 903. \qquad A = 451.$$

On aura de même

$$l.\text{cot.}\ \frac{\beta}{2} = 9{,}5606727.$$
$$l.(G) = 2{,}5779015.$$
$2{,}1385742$, n.° $137{,}58.$

$$l.\text{tang.}\ \frac{\beta}{2} = 0{,}4393273.$$
$$l.G = 2{,}5794498.$$
$3{,}0187771$, n.° $1044{,}18.$

Diff. — $906{,}60.$

$$G = 379{,}70.$$
$$(G) = 378{,}36.$$
$758{,}06$, log. $2{,}8797036.$

ôtez log. $906{,}60 = 2{,}9574157.$

$$9{,}9222879 = l - \text{tang.}\ b.$$

donc

$$b = 180^d - 39^d\ 54' = 1110^d\ 6'.$$

ensuite

$$l.\text{sec.}\ \frac{\beta}{2} = 0{,}4662956.$$
$$l.G = 2{,}5794498.$$
$$3{,}0457354.$$
double $6{,}0914908$, n.° $1234500.$

$$l.\text{cosec.}\ \frac{\beta}{2} = 0{,}0269682.$$
$$l.G = 2{,}5779015.$$
$$2{,}6048697.$$
double $5{,}2097394$, n.° $162084.$

$$4B^2 = 1396584.$$
$$2B = 1182, \qquad B = 591.$$

Connoiſſant donc les angles $a, b; \alpha, \beta$, & les coëfficiens A, B, on aura pour le terme général de la ſérie propoſée l'expreſſion

$$A \text{ſin.} (a + m\alpha) + B \text{ſin.} (b + m\beta),$$

où m eſt la diſtance d'un terme quelconque au terme 772 qu'on a pris pour T; c'eſt-à-dire le quantième à compter depuis ce même terme.

EXEMPLE II.

(42.) Je reprendrai la ſérie de l'Exemple précédent, & je la traiterai ſuivant la ſeconde méthode de l'*article 40*, afin que l'on ait en même temps un exemple de l'uſage de cette méthode & une confirmation de ſa bonté par la comparaiſon de ſes réſultats avec ceux de la première méthode; mais je n'entrerai pas dans le détail des opérations & des calculs qu'il faut faire, parce qu'on le trouve dans les deux planches ci-jointes.

La *1.re caſe* contient les termes de la ſérie propoſée écrits deux fois les uns au-deſſous des autres, pour pouvoir en prendre aiſément les ſommes & les différences, & en former les deux ſéries

$$772, -309, -465, -308, -592, \&c.$$
$$-165; 1181, -1006, -128, 229, \&c.$$

Enſuite la *4.e caſe* contient le tableau des opérations qu'on doit faire ſur la première de ces deux ſéries, & la *2.e caſe* contient tous les calculs ſubſidiaires que ces opérations demandent.

On s'eſt arrêté ici, comme dans l'Exemple précédent, après la ſeconde diviſion, parce que le ſecond reſte n'a que des coëfficiens numériques très-petits, qu'on peut par conſéquent négliger ſans erreur ſenſible.

Les réſultats des opérations faites ſur la première ſérie, ſont donc

$$p = 772, \qquad q = 0{,}40026.$$
$$p' = -1{,}23746, \qquad q' = 0{,}44043.$$

PREMIÈ

0ˢ	2ˢ 10ᵈ	4ˢ 20ᵈ	7ˢ	9ˢ 10ᵈ	11ˢ 20ᵈ	2ˢ	4ˢ 10ᵈ	6ˢ 20ᵈ	9ˢ	11ˢ
7′ 36″	− 2′ 48″	4′ 34″	− 15′ 33″	3′ 40″	10′ 31″	− 3′ 52″	5′ 49″	− 13′ 43″	− 1′ 12″	12′
456.	− 168.	274.	− 933.	220.	631.	− 232.	349.	− 823.	− 72.	77
881.	− 616.	− 457.	305.	− 181.	860.	− 360.	− 657.	358.	− 237.	
Somme 1337.	− 784.	− 183.	− 628.	39.	1491.	− 592.	− 308.	− 465.	− 309.	77

DEUXIÈ

772.	2.8876173.	9.6023412.	0,40026.		
− 309.	2.4899585.	9.6023412.	0,40026.	9.2046824.	0,16021.
− 465.	2.6674530.	9.7798357.	0,60233.	9.3821769.	0,24109.
− 308.	2.4885507.	9.6009334.	0,39896.	9.2032746.	0,15969.
− 592.	2.7723217.	9.8847044.	0,76684.	9.4870456.	0,30693.
1491.	3.1734776.	0.2858603.	1,93135.	9.8882015.	0,77304.
39.	1.5910646.	8.7034473.	0,05051.	8.3057885.	0,02022.
− 628.	2.7979596.	9.9103423.	0,81340.	9.5126835.	0,32560.
− 183.	2.2624511.	9.3748338.	0,23705.	8.9771750.	0,09488.
− 784.	2.8943161.	0.0066988.	1,01554.	9.6090400.	0,40648.
1337.	3.1261314.	0.2385141.	1,73186.		

TROISIÈ

− 165.	2.2174839.	0.8547660.	7,15758.		
1181.	3.0722499.	0.8547660.	7,15758.	1.7095320.	51,23091.
− 1006.	3.0025980.	0.7851141.	6,09697.	1.6398801.	43,63954.
− 128.	2.1072100.	9.8897261.	0,77576.	0.7444921.	5,55254.
229.	2.3598355.	0.1423516.	1,38788.	0.9971176.	9,93385.
− 401.	2.6031444.	0.3856605.	2,43030.	1.2404265.	17,39509.
1238.	3.0927206.	0.8752367.	7,50303.	1.7300027.	53,70353.
− 731.	2.8639174.	0.6464335.	4,43030.	1.5011995.	31,71025.
− 448.	2.6512780.	0.4337941.	2,71515.	1.2885601.	19,43390.
425.	2.6283889.	0.4109050.	2,57575.		

E *C A S E.*

d	1ˢ 20ᵈ	4ˢ	6ˢ 10ᵈ	8ˢ 20ᵈ	11ˢ	1ˢ 10ᵈ	3ˢ 20ᵈ	6ˢ	8ˢ 10ᵈ	10ˢ 20ᵈ
″	− 3′ 57″	5′ 58″	− 10′ 57″	− 6′ 0″	14′ 20″	− 3′ 1″	5′ 5″	− 7′ 37″	− 10′ 16″	14′ 41″
	− 237.	358.	− 657.	− 360.	860.	− 181.	305.	− 457.	− 616.	881.
	− 72.	− 823.	349.	− 232.	631.	220.	− 933.	274.	− 168.	456.
	− 165.	1181.	− 1006.	− 128.	229.	− 401.	1238.	− 731.	− 448.	Diférence. 425.

E *C A S E.*

- 1,23746.	0.0925313.	9.6438769.			
1,04031.	0.0171628.	9.9246315.	0,84069.	9.5685084.	0,37026.
1,52886.	0.1843678.	0.0918365.	1,23543.	9.7357134.	0,54414.
- 1,22546.	0.0882993.	9.9957680.	0,99030.	9.6396449.	0,43616.
- 0,05671.	8.7536596.	8.6611283.	0,04582.	8.3050052.	0,02018.
- 1,13817.	0.0562072.	9.9636759.	0,91976.	9.6075528.	0,40509.
0,51214.	9.7093887.	9.6168574.	0,51386.	9.2607343.	0,18228.
1,92382.	0.2841644.	0.1916331.	1,45465.	9.8355100.	0,68472.
- 1,08833.	0.0367606.	9.9442293.	0,87948.		

E *C A S E.*

44,13394.	1.6447727.	0.8002619.			
37,25772.	1.5712163.	9.9264436.	0,84420.	0.7267055.	5,32973.
10,26163.	1.0112163.	9.3664436.	0,23251.	0.1667055.	1,46793.
6,72779.	0.8278724.	9.1830997.	0,15244.	9.9833616.	0,96241.
8,50418.	0.9296326.	9.2748599.	0,18830.	0.0751218.	1,18884.
46,84293.	1.6706440.	0.0258713.	1,06138.	0.8261332.	6,70090.
26,92237.	1.4301132.	9.7853405.	0,61002.	0.5856024.	3,85135.
21,28845.	1.3271441.	9.6823714.	0,48125.		

QUA

1.er quotient..	$1 + x^2 + 0{,}40026\,x$				
1.er diviseur...	1	$-\,0{,}40026\,x$	$-\,0{,}60233\,x^2$	$-\,0{,}39896\,x^3$	$-\,0{,}76684\,x^4$
1.er dividende	1	*	$-\,x^2$		
	$-\,1$	$+\,0{,}40026\,x$	$-\,0{,}39767\,x^2$	$+\,0{,}79722\,x^3$	$+\,1{,}36917\,x^4$
		$-\,0{,}40026$	$+\,0{,}16021$	$+\,0{,}24109$	$+\,0{,}15969$
1.er reste......	*	*	$-\,1{,}23746\,x^2$	$+\,1{,}04031\,x^3$	$+\,1{,}52886\,x^4$
2.e quotient..	$1 + x^2 + 0{,}44043\,x$				
2.e diviseur...	1	$-\,0{,}84069\,x$	$-\,1{,}23543\,x^2$	$+\,0{,}99030\,x^3$	$+\,0{,}04582\,x^4$
2.e dividende	1	$-\,0{,}40026\,x$	$-\,0{,}60233\,x^2$	$-\,0{,}39896\,x^3$	$-\,0{,}76684\,x^4$
	$-\,1$	$+\,0{,}84069$	$+\,0{,}23543$	$-\,0{,}14961$	$+\,1{,}18961$
	*	$0{,}44043\,x$	$-\,0{,}36690\,x^2$	$-\,0{,}54857\,x^3$	$+\,0{,}42277\,x^4$
		$-\,0{,}44043$	$+\,0{,}37026$	$+\,0{,}54414$	$-\,0{,}43616$
2.e reste......	*	*	$0{,}00336\,x^2$	$+\,0{,}00443\,x^3$	$-\,0{,}01339\,x^4$

CIN

1.er quotient..	$1 + x^2 + 7{,}15758\,x$				
1.er diviseur...	1	$-\,7{,}15758\,x$	$+\,6{,}09697\,x^2$	$+\,0{,}77576\,x^3$	$-\,1{,}38788\,x^4$
1.er dividende	1	*	*		
	$-\,1$	$+\,7{,}15758\,x$	$-\,7{,}09697\,x^2$	$+\,6{,}38182\,x^3$	$-\,4{,}70909\,x^4$
		$-\,7{,}15758$	$+\,51{,}23091$	$-\,43{,}63954$	$-\,5{,}55254$
1.er reste......	*	*	$44{,}13394\,x^2$	$-\,37{,}25772\,x^3$	$-\,10{,}26163\,x^4$
2.e quotient..	$1 + x^2 - 6{,}31338\,x$				
2.e diviseur...	1	$-\,0{,}84420\,x$	$-\,0{,}23251\,x^2$	$+\,0{,}15244\,x^3$	$-\,0{,}18830\,x^4$
2.e dividende	1	$-\,7{,}15758\,x$	$+\,6{,}09697\,x^2$	$+\,0{,}77576\,x^3$	$-\,1{,}38788\,x^4$
	$-\,1$	$+\,0{,}84420$	$-\,0{,}76749$	$+\,0{,}69176$	$+\,0{,}42081$
	*	$-\,6{,}31338\,x$	$+\,5{,}32948\,x^2$	$+\,1{,}46752\,x^3$	$-\,0{,}96707\,x^4$
		$+\,6{,}31338$	$-\,5{,}32973$	$-\,1{,}46793$	$+\,0{,}96241$
2.e reste......	*	*	$-\,0{,}00025\,x^2$	$-\,0{,}00041\,x^3$	$-\,0{,}00466\,x^4$

RIÈME CASE.

$+ 1{,}93135\,x^5 + 0{,}05051\,x^6 - 0{,}81340\,x^7 - 0{,}23705\,x^8 - 1{,}01554\,x^9 + 1{,}73186\,x^{10}$

$- 1{,}53239\,x^5 + 0{,}71633\,x^6 - 1{,}11795\,x^7 + 0{,}18624\,x^8 + 1{,}82894\,x^9 - 1{,}49481\,x^{10}$
$+ 0{,}30693 \quad - 0{,}77304 \quad - 0{,}02022 \quad - 0{,}32560 \quad + 0{,}09488 \quad + 0{,}40648$
$- 1{,}22546\,x^5 - 0{,}05671\,x^6 - 1{,}13817\,x^7 + 0{,}51214\,x^8 + 1{,}92382\,x^9 - 1{,}08833\,x^{10}$

$+ 0{,}91976\,x^5 - 0{,}41386\,x^6 - 1{,}55465\,x^7 + 0{,}87948\,x^8$
$+ 1{,}93135\,x^5 + 0{,}05051\,x^6 - 0{,}81340\,x^7 - 0{,}23705\,x^8$
$- 1{,}91106 \quad + 0{,}36804 \quad + 0{,}63489 \quad - 0{,}46562$
$+ 0{,}02029\,x^5 + 0{,}41855\,x^6 - 0{,}17851\,x^7 - 0{,}70267\,x^8$
$- 0{,}02018 \quad - 0{,}40509 \quad + 0{,}18228 \quad + 0{,}68472$
$+ 0{,}00011\,x^5 + 0{,}01346\,x^6 + 0{,}00377\,x^7 - 0{,}01795\,x^8$

UIÈME CASE.

$+ 2{,}43030\,x^5 - 7{,}50303\,x^6 + 4{,}43030\,x^7 + 2{,}71515\,x^8 - 2{,}57575\,x^9$

$- 3{,}20606\,x^5 + 8{,}89091\,x^6 - 6{,}86060\,x^7 + 4{,}78788\,x^8 - 1{,}85455\,x^9$
$+ 9{,}93385 \quad - 17{,}39509 \quad + 53{,}70353 \quad - 31{,}71025 \quad - 19{,}43390$
$+ 6{,}72779\,x^5 - 8{,}50418\,x^6 + 46{,}84293\,x^7 - 26{,}92237\,x^8 - 21{,}28845\,x^9$

$+ 1{,}06138\,x^5 - 0{,}61002\,x^6 - 0{,}48125\,x^7$
$+ 2{,}43030\,x^5 - 7{,}50303\,x^6 + 4{,}43030\,x^7$
$- 1{,}21382 \quad + 0{,}79832 \quad - 0{,}58013$
$+ 1{,}21648\,x^5 - 6{,}70471\,x^6 + 3{,}85017\,x^7$
$- 1{,}18884 \quad + 6{,}70090 \quad - 3{,}85135$
$+ 0{,}02764\,x^5 - 0{,}00381\,x^6 - 0{,}00118\,x^7$

De même la 5.e *case* contient le tableau des opérations à faire sur la seconde série, & la 3.e *case*, les calculs subsidiaires; on voit aussi que le second reste n'a que des coëfficiens très-petits, en sorte qu'il peut être négligé, & que l'opération peut être regardée comme achevée après la seconde division.

Il résulte donc de cette série les valeurs suivantes,

$$p = -165, \qquad q = 7{,}15758.$$
$$p' = 44{,}13394, \qquad q' = -6{,}31338.$$

Ayant trouvé ces valeurs, on cherchera par leur moyen celles des quantités π, ρ; F, G; (F), (G), comme on l'a fait dans l'Exemple précédent, & en employant les mêmes formules.

On aura donc, en prenant d'abord les valeurs résultantes de la première série

$q + q' = 0{,}84069.$

$q - q' = -0{,}04017$, log. 8,6039018. 2 log. 7,2078036.

$(q - q')^2 = 0{,}00161.$

$-4p' = 4{,}94984.$

$4{,}95145$, log. 0,6947323, $\frac{1}{2}$ log. 0,3473661.

$\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 2{,}22522.$

$q + q' = 0{,}84069.$

somme 3,06591.

Diff. 1,38453.

Donc

$$\pi = 0{,}69226, \qquad \rho = -1{,}53295.$$

De plus

$l.q - q' = 8{,}6039018.$

$l.\sqrt{[q - q')^2 - 4p')]} = 0{,}3473661.$

Diff. 8,2565357, n.° $-0{,}01805$.

$l.1{,}01805 = 0{,}0077692.$

$l.0{,}98195 = 9{,}9920894.$

$l.\frac{p}{2} = l.386 = 2{,}5865773.$

$l.F = 2{,}5943565.$

$l.G = 2{,}5786767.$

donc

$$F = 392{,}97. \qquad G = 379{,}03.$$

Employant maintenant les valeurs trouvées d'après la seconde série, on aura

$$q + q' = 0{,}84420.$$
$$q - q' = 13{,}47096, \text{ log. } 1{,}1293986, \text{ 2 log. } 2{,}2587972.$$
$$(q - q')^2 = 181{,}46720.$$
$$-4p' = -176{,}53576,$$
$$4{,}93144, \text{ log. } 0{,}6929746, \tfrac{1}{2} \text{ log. } 0{,}3464872.$$
$$\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 2{,}22069.$$
$$q + q' = 0{,}84420.$$
$$\text{Somme } 3{,}06489.$$
$$\text{Diff. } 1{,}37649.$$

Donc

$$\pi = 0{,}68824, \qquad \rho = -1{,}53244.$$

Ensuite

$$l.q - q' = 2{,}1293986.$$
$$l.\sqrt{[(q-q')^2 - 4p']} = 0{,}3464873.$$
$$\text{Diff. } 0{,}7829113, \text{ n.° } 6{,}06612.$$
$$l. - 5{,}06612 = 0{,}7046755.$$
$$l.7{,}06612 = 0{,}8491800.$$
$$l.\frac{p}{2} = l - 82{,}5 = 1{,}9164539.$$
$$l.(F) = 2{,}6211294.$$
$$l.(G) = 2{,}7656339.$$

Donc

$$(F) = 417{,}95, \qquad (G) = -522{,}95.$$

Ayant trouvé deux valeurs de π & deux de ρ, qui ne sont pas tout-à-fait identiques, comme elles le devroient être si la solution étoit rigoureuse, au lieu qu'elle n'est qu'approchée, nous prendrons, comme dans l'Exemple précédent, les moyennes arithmétiques; moyennant quoi, on aura,

$$\pi = 0{,}69025, \qquad \rho = -1{,}53269.$$

Donc

$$\text{cof.}\,\alpha = \frac{\pi}{2} = 0{,}34512. \qquad \text{cof.}\,\beta = \frac{\rho}{2} = -0{,}76634.$$

& de-là

$$\alpha = 69^d\ 49'$$

$$\beta = 180^d - 39^d\ 59' = 140^d\ 1',$$

valeurs qui s'accordent, à quelques minutes près, avec celles de l'Exemple précédent.

On ſubſtituera donc ces valeurs ainſi que celles de F, G; $(F)\ (G)$, dans les formules de la ſeconde méthode de l'*art.* 40, pour en déduire les valeurs de A, B; a & b.

On fera donc le calcul ſuivant,

$$\begin{array}{rl} l.F = & 2,5943565. \\ l.2\ \text{ſin.}\ \alpha = & \underline{0,2735075.} \\ & 2,8678640. \\ l(F) = & \underline{2,6211294.} \\ & 2,2467346 = l\ \text{tang.}\ \alpha. \end{array}$$

Donc

$$\alpha = 60^d\ 28'.$$

Enſuite on aura

$$\begin{array}{rll} 2l.F = & 5,1887120, & \text{n.° } 154423. \\ 2l.(F) = & 5,2422588. & \\ 2l.2\ \text{ſin.}\ \alpha = & \underline{0,5470150.} & \\ & 4,6952438 & \text{n.° } \underline{\ 49573.} \\ & & 203996 = A^2. \end{array}$$

Donc

$$A = 451.$$

On aura de même

$$\begin{array}{rl} l.G = & 2,5786767. \\ l.2\ \text{ſin.}\ \beta = & \underline{0,1089469.} \\ & 2,6876236. \\ l - (G) = & \underline{2,7656339.} \\ & 9,9219897 = l. - \text{tang.}\ b. \end{array}$$

Donc

$$b = 180^d - 39^d\ 53' = 140^d\ 7'.$$

Enſuite

$$2\,l.\,G = 5{,}1573534 \text{ n.}^{\circ}\ 143666.$$
$$2\,l. - (G) = 5{,}5312678.$$
$$2\,l.\,2\,\text{ſin.}\,\beta = \underline{0{,}2178938.}$$
$$5{,}3133740 \text{ n.}^{\circ}\ \underline{205766.}$$
$$349432 = B^2.$$

Donc

$$B = 591.$$

On voit donc que les valeurs de a, b; A, B, s'accordent auſſi avec celles de l'Exemple précédent; ce qui prouve l'exactitude de nos deux méthodes.

REMARQUE I.

(43.) Au reſte, il eſt clair que les valeurs qu'on vient de trouver ne peuvent être qu'approchées; de ſorte qu'il eſt néceſſaire de chercher les moyens de les rectifier; mais il eſt bon de remarquer que les coëfficiens A, B, & les angles a, b n'exigent pas une auſſi grande exactitude que les angles α & β; parce que ces derniers angles ſe trouvant multipliés par le nombre des termes m, dans l'expreſſion du terme général, les erreurs qu'on y peut commettre doivent aller en augmentant d'un terme à l'autre; au lieu que les erreurs des coëfficiens A, B, & des angles a, b, demeurent les mêmes.

Ainſi on doit ſur-tout tâcher de déterminer avec préciſion les angles α & β; c'eſt de quoi on pourra venir à bout lorſqu'on connoîtra un grand nombre de termes de la ſérie propoſée; il ſe préſente différens moyens pour cela, mais celui que je vais employer me paroît tout-à-la-fois le plus ſimple & le plus exact; il eſt fondé ſur cette conſidération que ſi on cherche les valeurs des angles a & b pour des termes de la même ſérie, aſſez diſtans entr'eux, & qu'on nomme, par exemple, a', b' les valeurs de a, b pour le terme $T^{(\lambda)}$ pris à la place de T, & à a'', b'' les valeurs de a, b pour le terme

terme $T^{(\mu)}$ pris de même à la place de T, on aura nécessairement $a' = a + \lambda\alpha$, $b' = b + \lambda\beta$, & de même $a'' = a + \mu\alpha$, $b'' = b + \mu\beta$; donc....... $a'' - a' = (\mu - \lambda)\alpha$, $b'' - b' = (\mu - \lambda)\beta$; & de-là

$$\alpha = \frac{a'' - a'}{\mu - \lambda}, \; \beta = \frac{b'' - b'}{\mu - \lambda};$$

d'où l'on voit que les erreurs qui pourront se trouver dans les valeurs de α & β, ne seront qu'à la $(\mu - \lambda)^{eme}$ partie de celles des valeurs de a', a''; b', b''; ainsi l'exactitude de ces déterminations sera d'autant plus grande que le nombre $\mu - \lambda$ sera plus grand, c'est-à-dire, que la distance entre les termes $T^{(\lambda)}$ & $T^{(\mu)}$ sera plus grande.

Pour trouver les valeurs de a', b', & de a'', b'', il faudra faire un double calcul, en suivant l'une des deux méthodes ci-dessus; & il sera bon de préférer la seconde, qui est en quelque manière plus simple. D'ailleurs, il ne sera pas nécessaire de faire le calcul en entier, comme dans l'Exemple II, en opérant successivement sur les deux séries; mais il suffira d'opérer sur la série des sommes, & d'en déduire les valeurs de F & de G; car, comme les coëfficiens A & B sont déjà connus, on peut s'en servir pour trouver les valeurs de tang. a & tang. b, sans connoître celles de (F) & de (G); en effet, on aura par les formules de la seconde méthode *(art. 40)*,

$$\text{tang.}\, a = \frac{F}{\sqrt{(A^2 - F^2)}}, \; \text{tang.}\, b = \frac{G}{\sqrt{(B^2 - G^2)}};$$

d'où l'on tire

$$\text{sin.}\, a = \frac{F}{A}, \; \text{sin.}\, b = \frac{G}{B}.$$

De plus, comme on sait déjà que l'opération ne doit pas aller au-delà de la seconde division, & qu'il est clair que

chaque diviſion n'emporte que deux termes de la ſérie ſur laquelle on opère, il s'enſuit qu'il ſuffira, dans le cas préſent, d'avoir quatre termes de la ſérie des ſommes, de ſorte qu'on n'aura beſoin que de ſept termes conſécutifs de la ſérie propoſée, dont celui du milieu ſera pris pour T, & les adjacens de part & d'autre pour T', T'', T''', & $`T$, $``T$, $```T$, pour avoir la ſérie des ſommes T, $T' + `T$, $T'' + ``T$, $T''' + ```T$.

On choiſira donc à volonté ſept des premiers termes de la ſérie donnée, & ſept des derniers, & pour avoir une plus grande exactitude, on aura ſoin de les choiſir de manière que ceux du milieu ſoient les plus grands qu'il eſt poſſible; car il eſt facile de démontrer que l'on aura toujours des réſultats plus approchés lorſque le terme du milieu T ſera un *maximum*, que dans tout autre cas, & c'eſt auſſi pour cette raiſon que dans l'Exemple II, nous avons pris pour T le terme 772, qui eſt un des plus grands de la ſérie.

Nous prendrons donc les ſept premiers termes 456, — 168, 274, — 933, 220, 631, — 232, & les ſept autres 358, — 657, — 360, 360, — 181, 305, — 447; & on en formera les deux ſéries des ſommes — 933, 494, 463, 224, & 860, — 541, — 352, — 99, ſur chacune deſquelles on opérera comme on l'a pratiqué dans l'Exemple II. La planche ci-jointe contient les détails & les réſultats de ces opérations; les trois premières caſes appartiennent à la première ſérie, & les trois dernières à la ſeconde, où l'on voit que la première ſérie donne ces valeurs,

$$p = -933, \qquad q = 0{,}52948.$$
$$p' = -1{,}22341, \qquad q' = 0{,}31332.$$

& que la ſeconde donne celles-ci

$$p = 860, \qquad q = 0{,}62907.$$
$$p' = 1{,}19493, \qquad q' = 0{,}20920.$$

Première Case.

456.	− 168.	274.	− 933.	220.	631.	− 232.
				274.	− 168.	456.
			− 933.	494.	463.	224.

Deuxième Case.

− 933.	2.9698816.				
494.	2.6937269.	9.7238453.	0,52948.	9.4476906.	0,28034.
463.	2.6655810.	9.6956994.	0,49625.	9.4195447.	0,26275.
224.	2.3502480.	9.3803664.	0,24008.		
− 1,22341.	0.0875722.				
1,03231.	0.0138101.	9.9262379.	0,84380.		

Troisième Case.

1.er quotient...	$1 + x^2 + 0,52948\,x$
1.er diviseur...	$1 - 0,52948\,x - 0,49625\,x^2 - 0,24008\,x^3$
1.er dividende.	$1 \quad * \quad - x^2$
	$-1 + 0,52948\,x - 0,50375\,x^2 + 0,76956\,x^3$
	$- 0,52948 \quad + 0,28034 \quad + 0,26275$
1.er reste....	$* \quad * - 1,22341\,x^2 + 1,03231\,x^3$
2.e quotient....	$1 + x^2 + 0,31332\,x$
2.e diviseur....	$1 - 0,84380\,x$
2.e dividende...	$1 - 0,52948\,x$
	$-1 + 0,84380\,x$
	$* \quad 0,31332\,x$

QUATRIÈME CASE.

358.	− 657.	− 360.	860.	− 181.	305.	− 457.
				− 360.	− 657.	358.
			860.	− 541.	− 352.	− 99.

CINQUIÈME CASE.

860.	2.9344985.				
− 541.	2.7331973.	9.7986988.	0,62907.	9,5973976.	0,39673.
− 352.	2.5465427.	9.6120442.	0,40930.	9,4107430.	0,25748.
− 99.	1.9956352.	9.0611367.	0,11512.		
1,19493.	0.0773425.				
1,00167.	0.0007245.	9.9233820.	0,83827.		

SIXIÈME CASE.

1.er quotient...	$1 + x^2 + 0{,}62907\,x$			
1.er diviseur...	1	$-\ 0{,}62907\,x$	$-\ 0{,}40930\,x^2$	$-\ 0{,}11512\,x^3$
1.er dividende..	1	*	$-\ x^2$	
	$-\ 1$	$+\ 0{,}62907\,x$	$-\ 0{,}59070\,x^2$	$+\ 0{,}74419\,x^3$
		$-\ 0{,}62907$	$+\ 0{,}39573$	$+\ 0{,}25748$
1.er reste....	*	*	$-\ 1{,}19497\,x^2$	$+\ 1{,}00167\,x^3$
2.e quotient....	$1 + x^2 + 0{,}20920\,x$			
2.e diviseur....	$1 - 0{,}83827\,x$			
2.e dividende...	$1 - 0{,}62907\,x$			
	$-\ 1 + 0{,}83827$			
	* $0{,}20920\,x$			

Ainsi on aura, 1.°

$q + q' = 0,84280.$

$q - q' = 0,21616$, log. $9,3347753$, 2 log. $8,6695506$.

$(q - q')^2 = 0,04673.$

$- 4p' = 4,89364.$

$4,94037$, log. $0,6937595$, $\frac{1}{2}$ log. $0,3468797$.

$\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 2,22269.$

$q + q' = 0,84280.$

Somme $3,06549.$

Diff. $1,37989.$

Donc

$$\pi = 0,68994, \qquad \rho = - 1,53274.$$

Ensuite

$$l. q - q' = 9,3347753.$$
$$l. \sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 0,3468797.$$

Diff. $8,9878956$, n.° $0,097251$.

$$l. 0,902749 = 9,9555670.$$
$$l. 1,097251 = 0,0403060.$$
$$l. \frac{p}{2} = l. -466,5 = 2,6688516.$$
$$l. - F = 2,6244186 \quad F = - 421.$$
$$l. - G = 2,7091596 \quad G = - 512.$$

Or on a *(art. 42)*

$$A = 451 \quad l. A = 2,6541765.$$
$$B = 591 \quad l. B = 2,7715875.$$

Donc

$$l. - \frac{A}{F} = 9,9702421 = l. - \text{sin. } a'.$$
$$l. - \frac{G}{B} = 9,9375721 = l. - \text{sin. } b'.$$

Donc

$a' = 180^d + 69^d\, 2' = 249^d\, 2'$, ou $360^d - 69^d\, 2' = 290^d\, 58'$,
$b' = 180^d + 60^d = 240^d$ ou $360^d - 60^d = 300^d$.

A quoi on pourra encore ajouter ou en retrancher tel multiple de 360 degrés qu'on voudra.

On aura, 2.°

$$q + q' = 0,83827.$$
$$q - q' = 0,41887, \text{ log. } 9,6220793, \text{ 2 log. } 9,2441786.$$
$$(q - q')^2 = 0,17546.$$
$$- 4p' = 4,77972.$$
$$4,95518, \text{ log. } 0,6950594, \tfrac{1}{2} \text{ log. } 0,3475297.$$
$$\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 2,22603.$$
$$q + q' = 0,83827.$$
$$\text{Somme } 3,06430.$$
$$\text{Diff. } 1,38776.$$

Donc

$$\pi = 0,69388, \qquad \rho = - 1,53215.$$

Ensuite

$$l.q - q' = 9,6220793.$$
$$l.\sqrt{[(q - q')^2 - 4p']} = 0,3475297.$$
$$\text{Diff. } 9,2745496, \text{ n.° } 0,18816.$$
$$l.0,81184 = 9,9094704.$$
$$l.1,18816 = 0,0748750.$$
$$l.\frac{p}{a} = l.430 = 2,6334685.$$
$$l.F = 2,5429389.$$
$$l.G = 2,7083435.$$

& de-là

$$l.\frac{F}{A} = 9,8867624 = l.\text{ſin.}\,a'',$$
$$l.\frac{G}{B} = 9,9367560 = l.\text{ſin.}\,b''.$$

Donc

$$a'' = 50^d\ 48' \text{ ou } 180^d - 50^d\ 43' = 129^d\ 17'.$$
$$b'' = 59^d\ 50' \text{ ou } 180^d - 59^d\ 50' = 120^d\ 10'.$$

A quoi on pourra auſſi ajouter ou en retrancher des multiples quelconques de 360 degrés.

Maintenant je remarque que ſi on rapporte les deux termes moyens ci-deſſus — 933 & 860, au terme moyen 722 de l'Exemple II, on aura, en nommant ce dernier T, &

ces deux-là $T^{(\lambda)}, T^{(\mu)}$, on aura dis-je, $\lambda = 7$, & $\mu = 5$, parce que dans la férie propofée, le terme — 933 précède de fept places le terme 772, & que le terme 860 le fuit au contraire de cinq places; d'où il s'enfuit que fi les valeurs de α, β, & de a, b, trouvées dans l'Exemple II étoient tout-à-fait exactes, & que celles de a', b'; a'', b'' qu'on vient de trouver le fuffent auffi, on devroit avoir

$$a - 7\alpha = a', \quad b - 7\beta = b',$$
$$a + 5\alpha = a'', \quad b + 5\beta = b'';$$

or, on a, après les fubftitutions,

$$a - 7\alpha = -428^d\,15' = -2.360^d + 291^d\,45',$$
$$b - 7\beta = -840. \quad = -3.360. + 240,$$
$$a + 5\alpha = \quad 409.\,33. = \quad 360. + \;49.\,33,$$
$$b + 5\beta = \quad 840.\,12. = \quad 2.360. + 120.\,12,$$

D'où l'on voit 1.° que ces valeurs diffèrent un peu de celles de a', b'; a'', b''; 2.° que les valeurs de ces dernières quantités doivent être exprimées ainfi,

$$a' = -2.360^d + 290^d\,58',$$
$$b' = -3.360. + 240,$$
$$a'' = \quad 360. + \;50.\,43,$$
$$b'' = \quad 2.360. + 120.\,10.$$

De forte qu'en faifant ces fubftitutions dans les formules ci-deffus, on aura, à caufe de $\mu = 5$, $\lambda = -7$, & par conféquent $\mu - \lambda = 12$,

$$\alpha = \frac{a'' - a'}{12} = \frac{839^d\,45'}{12} = 69^d\;59',$$
$$\beta = \frac{b'' - b'}{12} = \frac{1680^d\,10'}{12} = 140^d\;\;1'.$$

Cette valeur de β eft la même que celle qu'on a trouvée directement dans l'Exemple II; mais la valeur de α diffère de 10 minutes de cet Exemple; or on verra, dans la *Remarque fuivante*, que les valeurs de α & β, qu'on vient de trouver, ne diffèrent que de 1 minute de la vérité, ce qui prouve l'utilité de la méthode précédente.

Ayant ainſi déterminé aſſez exactement les valeurs de α & β, on pourra s'en ſervir pour approcher davantage des véritables valeurs de a & b; car, puiſqu'on a $a - 7\alpha = a'$, $b - 7\beta = b'$; $a + 5\alpha = a''$, $b + 5\beta = b''$; on aura $2(a - \alpha) = a' + a''$, $2b - \beta) = b' + b''$; d'où $a = \alpha + \frac{a' + a''}{2}$, $b = \beta + \frac{b' + b''}{2}$; c'eſt-à-dire,

$$a = 69^d\ 59' - \frac{18^d\ 19'}{2} = 60^d\ 50',$$

$$b = 140^d\ 1' - \frac{10'}{2} = 139^d\ 56,$$

& ces valeurs ſont auſſi plus conformes à la vérité que celles qu'on a trouvées dans l'Exemple II, comme on le verra ci-après.

REMARQUE II.

(44.) Pour pouvoir maintenant juger de l'exactitude des réſultats précédens, il faut réduire en formule la Table de l'équation du temps d'où la ſérie propoſée eſt tirée.

Pour cela je remarque que l'équation du temps n'eſt autre choſe que la différence entre la longitude moyenne du Soleil & ſon aſcenſion droite, convertie en temps à raiſon de 15 degrés par heure. Or, ſoit φ la longitude vraie du Soleil, t la longitude moyenne, x l'aſcenſion droite vraie, α le lieu de l'apogée, e l'excentricité du Soleil, & ω l'angle de l'obliquité de l'écliptique; on aura d'abord, comme l'on ſait,

$$t = \int \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}\, d\varphi}{[1 - e \operatorname{cof.}(\varphi - \alpha)]^2},$$

& enſuite,

$$\text{tang.}\, x = \operatorname{cof.} i \times \text{tang.}\, \varphi;$$

ainſi il n'y aura qu'à déduire de ces formules les valeurs de t & x en φ, & la différence $x - t$ (laquelle ne contiendra plus que des coſinus d'angles multiples de φ), étant multipliée par l'arc égal au rayon, lequel eſt $57^d\ 17'\ 44''$, & diviſée enſuite par 15 degrés, donnera la valeur de l'équation du

temps en heures, pour la longitude φ du Soleil; par conséquent, si on multiplie la valeur de $-x$ par $\frac{206264}{15}$, dont le logarithme est 4,1383338; on aura l'équation du temps en secondes de temps, comme nous l'avons employée dans les Exemples ci-dessus.

Je commence par chercher la valeur de t, & pour y parvenir d'une manière générale, je remarque que l'on a

$$\frac{dy}{1 - n \operatorname{cos}.y} + d. \frac{n \operatorname{sin}.y}{1 - n \operatorname{cos}.y} = \frac{(1 - n^2)\, dy}{(1 - n \operatorname{cos}.y)^2};$$

d'où il s'ensuit que

$$\int \frac{(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}\, dy}{(1 - n \operatorname{cos}.y)^2} = \int \frac{\sqrt{(1 - n^2)}\, dy}{1 - n \operatorname{cos}.y} + \frac{n\sqrt{(1 - n^2)} \operatorname{sin}.y}{1 - n \operatorname{cos}.y};$$

Or, on sait que la fraction $\frac{\sqrt{(1 - n^2)}}{1 - n \operatorname{cos}.y}$ se réduit en une série de la forme

$$1 + 2K \operatorname{cos}.y + 2K^2 \operatorname{cos}.2y + 2K^3 \operatorname{cos}.3y + \&c.$$

en faisant pour abréger

$$K = \frac{1 - \sqrt{(1 - n^2)}}{n};$$

ainsi on aura, 1.° en multipliant par dy, & intégrant

$$\int \frac{\sqrt{(1 - n^2)}\, dy}{1 - n \operatorname{cos}.y} = y + 2K \operatorname{sin}.y + \frac{2K^2}{2} \operatorname{sin}.2y + \frac{2K^3}{3} \operatorname{sin}.3y + \&c.$$

2.° En multipliant par $n \operatorname{sin}.y$, on aura

$$\frac{n\sqrt{(1 - n^2)} \operatorname{sin}.y}{1 - n \operatorname{cos}.y} = n(1 - K^2)(\operatorname{sin}.y + K \operatorname{sin}.2y + K^2 \operatorname{sin}.3y + \&c.);$$

donc réunissant ces deux séries, on aura

$$y + [2K + n(1 - K^2)] \operatorname{sin}.y + \left[\frac{2K}{2} + n(1 - K^2)\right] K \operatorname{sin}.2y + \left[\frac{2K}{3} + n(1 - K^2)\right] K^2 \operatorname{sin}.3y + \&c.$$

pour la valeur de l'intégrale $\int \frac{(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}\, dy}{(1 - n \operatorname{cos}.y)^2}$.

Maintenant, il eſt viſible que l'on aura la valeur de la longitude moyenne t, ſi on met dans la ſérie précédente e à la place de n, & $\varphi - \alpha$ à la place de y, & qu'enſuite on y ajoute la conſtante α, qui eſt la longitude de l'apogée; on aura donc en faiſant

$$K = \frac{1 - \sqrt{(1 - e^2)}}{e} = \frac{e}{1 + \sqrt{(1 - e^2)}},$$

& obſervant que $K^2 = \frac{2K}{e} - 1$, on aura, dis-je, cette formule,

$$t = \varphi + 2e \operatorname{fin.} (\varphi - \alpha) + 2\left(e - \frac{K}{2}\right) K \operatorname{fin.} 2(\varphi - \alpha)$$
$$+ 2\left(e - \frac{2K}{3}\right) K^2 \operatorname{fin.} 3(\varphi - \alpha) + \&c.$$

Il ne reſte donc plus qu'à trouver la valeur de l'angle x exprimée par une formule ſemblable; or l'équation

$$\operatorname{tang.} x = \operatorname{cof.} \omega \times \operatorname{tang.} \varphi$$

donne celle-ci, $dx = \frac{\operatorname{cof.} \varphi\, d. \operatorname{tang.} \varphi}{1 + \operatorname{cof.} \varphi^2 \operatorname{tang.} \varphi^2}$

$$= \frac{\operatorname{cof.} \omega\, d\varphi}{\operatorname{cof.} \varphi^2 + \operatorname{cof.} \omega^2 \operatorname{fin.} \varphi^2} = \frac{2 \operatorname{cof.} \omega\, d\varphi}{1 + \operatorname{cof.} \omega^2 + \operatorname{fin.} \omega^2 \operatorname{cof.} 2\varphi};$$

de ſorte qu'en faiſant pour abréger

$$A = \frac{\operatorname{cof.} \omega}{1 + \operatorname{cof.} \omega^2}, \quad B = \frac{\operatorname{fin.} \omega^2}{1 + \operatorname{cof.} \omega^2},$$

on aura $dx = \frac{2A\, d\varphi}{1 + B \operatorname{cof.} 2\varphi}$.

Cette formule ſe rapporte évidemment à celle que nous avons intégrée ci-deſſus; & il eſt clair qu'en faiſant $B = -n$ & $y = 2\varphi$, on aura ſur le champ

$$x = \frac{2A}{\sqrt{(1 - n^2)}} \left(\varphi + K \operatorname{fin.} 2\varphi + \frac{K^2}{2} \operatorname{fin.} 4\varphi\right.$$
$$\left. + \frac{K^3}{3} \operatorname{fin.} 6\varphi + \&c.\right);$$

mais puiſque $n = -B = -\frac{\operatorname{fin.} \omega^2}{1 + \operatorname{cof.} \omega^2}$, on aura

$$\sqrt{(1 - n^2)} = \frac{\sqrt{(1 + 2\operatorname{cof.} \omega^2 + \operatorname{cof.} \omega^4 - \operatorname{fin.} \omega^4)}}{1 + \operatorname{cof.} \omega^2} = \frac{2 \operatorname{cof.} \omega}{1 + \operatorname{cof.} \omega^2};$$

donc

donc $\frac{A}{\sqrt{(1 - n^2)}} = \frac{1}{2}$; de plus, on aura $K = \frac{1 - \sqrt{(1 - n^2)}}{n}$
$= - \frac{(1 - \text{cos}.\,\omega)^2}{\text{sin}.\,\omega^2} = - \frac{1 - \text{cos}.\,\omega}{1 + \text{cos}.\,\omega} = - \text{tang}.\,\frac{\omega}{2}$.

Donc enfin on aura

$$x = \varphi - (\text{tang}.\,\frac{\omega}{2})^2\,\text{sin}.\,2\,\varphi + \frac{1}{2}(\text{tang}.\,\frac{\omega}{2})^4\,\text{sin}.\,4\,\varphi$$
$$- \frac{1}{3}(\text{tang}.\,\frac{\omega}{2})^6\,\text{sin}.\,6\,\varphi + \&c.$$

Donc l'équation du temps ſera repréſentée par ces deux ſéries, où j'ai fait pour abréger $i = \frac{206264}{15}$,

$$-2\,i\,e\,\text{sin}.\,(\varphi - \alpha) - i\,(\text{tang}.\,\frac{\omega}{2})^2\,\text{sin}.\,2\,\varphi$$
$$-2\,i\,(e - \frac{K}{2})\,K\,\text{sin}.\,2\,(\varphi - \alpha) + \frac{i}{2}\,(\text{tang}.\,\frac{\omega}{2})^4\,\text{sin}.\,4\,\varphi$$
$$-2\,i\,(e - \frac{2K}{3})\,K^2\,\text{sin}.\,3\,(\varphi - \alpha) + \frac{i}{3}\,(\text{tang}.\,\frac{\omega}{2})^6\,\text{sin}.\,6\,\varphi$$
$$+ \&c.$$

& il ne s'agira plus que de ſubſtituer dans cette formule les valeurs numériques des quantités i, e, & des angles α & ω.

Or, je trouve par la Table de l'équation du centre du Soleil de Mayer, que l'excentricité du Soleil eſt . . . . . $= 0{,}0168022 = e$, dont le logarithme eſt 8,2253662; ajoutant donc à ce logarithme celui de $2\,i$ qui eſt 4,4393638, on aura le logarithme de $2\,i\,e = 2{,}6647300$, auquel répond le nombre 462.

Enſuite on a $\omega = 23^d\ 28'\ 15''$, & par conſéquent $\frac{\omega}{2} = 11^d\ 44'\ 7''$; d'où $l\,\text{tang}.\,\frac{\omega}{2} = 9{,}3175040$, & $l.\,(\text{tang}.\,\frac{\omega}{2})^2 = 8{,}6350080$, à quoi ajoutant le logarithme $i = 4{,}1383338$, on aura 2,7733418, auquel répond le nombre 593.

Ainſi les deux premiers termes de notre formule ſeront

$$-462\,\text{sin}.\,(\varphi - \alpha) - 593\,\text{sin}.\,2\,\varphi,$$

où α longitude de l'apogée eſt $= 3^f\, 9^d = 99^d$, & φ eſt la longitude vraie du Soleil.

Or, il eſt facile de ſe convaincre que ces deux termes répondent préciſément à ceux que nous avons trouvés *à poſteriori,* d'après nos calculs. En effet, ayant pris pour T dans les Exemples ci-deſſus le terme de la Table de l'équation du temps qui répond à la longitude $11^f\, 10^d$, & ayant mis 70 degrés de diſtance entre un terme & l'autre, il eſt clair que l'on aura pour un terme quelconque dont le quantième eſt m, $\varphi = 11^f\, 10^d + m \,.\, 70^d$; ainſi on aura $\varphi - \alpha = 8^f\, 1^d + m \,.\, 70^d$; donc ſin. $(\varphi - \alpha) = -$ ſin. $(61^d + m \,.\, 70^d)$; & $2\varphi = 22^f 20^d + m \,.\, 140^d$; d'où ſin. $2\varphi = -$ ſin. $(140^d + m \,.\, 140^d)$; de ſorte qu'on aura la formule

$$462 \text{ ſin.} (61^d + m \,.\, 70^d) + 593 \text{ ſin.} (140^d + m \,.\, 140^d).$$

Or la formule trouvée *à poſteriori*, eſt

$$A \text{ ſin.} (a + m\alpha) + B \text{ ſin.} (b + m\beta),$$

c'eſt-à-dire, à cauſe de $A = 451$, $B = 591$ *(art. 42)*, & $\alpha = 69^d\, 59'$, $\beta = 140^d\, 1'$, $a = 60^d 50'$, $b = 139' 56'$ *(article 44)*,

$$451 \text{ ſin.} (60^d\, 50' + m \,.\, 69^d\, 59') + 591 \text{ ſin.} (130^d\, 56' + m \,.\, 140^d\, 1'),$$

laquelle s'accorde, comme l'on voit, à très-peu près avec la précédente.

On voit auſſi par-là que les vraies valeurs de A, B; a, b; α & β ſont

$$A = 462, B = 593; a = 61^d, b = 140^d; \alpha = 70^d, \beta = 140^d,$$

d'où l'on peut juger combien les réſultats de nos méthodes approchent de la vérité.

A l'égard des autres termes de la formule ci-deſſus, il eſt facile de ſe convaincre d'abord qu'ils ſeront néceſſairement très-petits vis-à-vis des deux premiers, puiſque ces termes décroiſſent dans des raiſons moindres que $1 : e$ & $1 : (\text{tang.} \frac{\omega}{2})^2$.

En effet, si on suppose $e = \text{sin.}\,\varepsilon$, on aura $K = \frac{\text{sin.}\,\varepsilon}{1 + \text{cos.}\,\varepsilon}$ $= \text{tang.}\,\frac{\varepsilon}{2}$; or ayant $l.e = 8{,}2253662$, on trouvera $\varepsilon = 56' 46''$, d'où $l.K = \text{tang.}\,28' 23'' = 7{,}9167994$, & de-là on aura pour le coëfficient de $\text{sin.}\,2\,(\varphi - \alpha)$ le nombre 2, 9; ensuite on trouvera pour celui du terme $\text{sin.}\,4\,\varphi$ le nombre 12,8; d'où l'on voit que ce dernier terme est le plus considérable après les deux premiers, mais qu'en même temps il est extrêmement petit à leur égard, de sorte qu'on sera en droit de négliger tous les suivans; c'est pourquoi l'équation du temps pourra être représentée avec toute l'exactitude requise par cette formule

$$- 462''\,\text{sin.}\,(\varphi - \alpha) - 593''\,\text{sin.}\,2\,\varphi$$
$$- 3''\,\text{sin.}\,2\,(\varphi - \alpha) + 13''\,\text{sin.}\,4\,\varphi.$$

REMARQUE III.

(45.) Puisque dans les Exemples ci-dessus, on n'a poussé le calcul que jusqu'à la seconde division, & qu'on a ensuite négligé le reste de cette division comme nul, quoiqu'il ne fût que très-petit, il n'est pas surprenant que les valeurs trouvées par ce moyen diffèrent un peu des véritables; en effet, on voit, par la formule précédente, qu'outre les deux équations proportionnelles à $\text{sin.}\,(\varphi - \alpha)$ & à $\text{sin.}\,2\,\varphi$, qui sont les plus considérables, il y en a encore deux qui montent à quelques secondes, & dont l'une est proportionnelle à $\text{sin.}\,4\,\varphi$, & l'autre à $\text{sin.}\,2\,(\varphi - \alpha)$; il est vrai que cette dernière, outre qu'elle est très-petite, peut être combinée avec la seconde, de manière qu'il n'en résulte qu'une seule de la forme $- P\,\text{sin.}\,(p + 2\,\varphi)$; car puisque $\text{sin.}\,2\,(\varphi - \alpha)$ $= \text{sin.}\,\varphi \cdot \text{cos.}\,2\,\alpha - \text{cos.}\,2\,\varphi \cdot \text{sin.}\,2\,\alpha$, il n'y aura qu'à faire pour cela $P\,\text{cos.}\,p = 593'' + 3''\,\text{cos.}\,2\,\alpha$ & $P\,\text{sin.}\,p =$ $- 3''\,\text{sin.}\,2\,\alpha$, ce qui donne $\text{tang.}\,p = - \frac{3\,\text{sin.}\,2\,\alpha}{593 + 3\,\text{cos.}\,2\,\alpha}$, &

$$P = \sqrt{[(593)^2 + 2 \cdot 593 \cdot 3\,\text{cos.}\,2\,\alpha + 3^2]};$$

& en faiſant le calcul on trouve $p = 5' 24''$, & $P = 590$;
de ſorte qu'au lieu du terme 593 ſin. $(140^d + m . 140^d)$ *(remarque précédente)*, il faudra mettre celui-ci:

$$590 \text{ ſin. } (140^d 5' + m . 140^d),$$

ce qui altère un peu les valeurs de B & de b, & les change en celles-ci: $B = 590$, & $b = 140^d 5'$.

Il ne reſtera donc ainſi que l'équation $13''$ ſin. 4φ; & il eſt clair que pour trouver cette équation *à poſteriori*, il auroit fallu continuer l'opération, & en venir à une troiſième diviſion, on auroit pu par-là trouver les trois équations à la fois, avec toute l'exactitude requiſe; mais il y a ici une obſervation importante à faire.

Lorſque les termes donnés d'une ſérie récurrente ſont exacts & rigoureux, on eſt aſſuré de trouver toujours par nos méthodes la vraie loi générale de ces termes; c'eſt de quoi on a vu pluſieurs Exemples dans tout le cours de ce Mémoire; mais il n'en eſt pas toujours de même lorſque les valeurs des termes donnés ne ſont qu'approchées; car, dans ce cas, il eſt clair qu'il doit y avoir des limites au-delà deſquelles l'opération ne ſauroit être continuée ſans craindre de s'égarer; & voici comment on pourra déterminer ces limites.

Suppoſons, pour plus de généralité, que les termes de la ſérie ſur laquelle il s'agit d'opérer ſoient compoſés d'entiers & de décimales, & que leur exactitude s'étende juſqu'à la λ.ᵉᵐᵉ décimale incluſivement; ſuppoſons de plus que le premier terme p de la ſérie, par lequel on diviſe préalablement tous les autres *(article 40)* pour avoir la ſérie s, dont le premier terme ſoit l'unité; ſuppoſons, dis-je, que ce terme p ait une valeur qui ſoit renfermée entre 10^{π} & $10^{\pi+1}$, ce qu'on peut connoître d'abord par la place de ſon premier chiffre ſignificatif; il eſt clair qu'après la diviſion par p, les termes de la ſérie s ne ſeront exacts que juſqu'à la place décimale $(\lambda + \pi)^{\text{ème}}$ incluſivement. Ainſi, tant le quotient

que le reſte de la première diviſion ne ſeront exacts que juſqu'à cette limite.

Soit maintenant le coëfficient p' du premier terme du reſte dont nous parlons, renfermé entre $10^{\pi'}$ & $10^{\pi'+1}$, & comme ce coëfficient doit ſervir de diviſeur à tous les autres, il s'enſuit qu'après la diviſion, les termes de la nouvelle ſérie s', ſur laquelle on devra opérer, ſeront exacts juſqu'à la $(\lambda + \pi + \pi')^{eme}$ place décimale, mais non pas au-delà, de ſorte que le ſecond quotient, ainſi que le ſecond reſte, n'auront pas non plus une exactitude plus grande; & ainſi de ſuite.

De-là il ſera facile de juger, dans chaque cas particulier, juſqu'où on peut continuer l'opération avec ſûreté; car il eſt clair qu'il faudra néceſſairement s'arrêter dès qu'on ſera parvenu à un reſte dont les termes ne contiendront plus que des chiffres douteux.

Il eſt clair que les termes de la Table de l'équation du temps ne ſont qu'approchés, puiſqu'ils ſont exprimés en nombre ronds de ſecondes; ainſi, les ſéries que nous avons examinées dans les Exemples précédens, ſont dans le cas dont nous venons de parler. Conſidérons le cas de l'Exemple II, & l'on aura d'abord $\lambda = 0$; enſuite, dans la première ſérie, on a (à cauſe de $p = 772$), $\pi = 2$, d'où il s'enſuit que le premier reſte n'eſt exact que juſqu'à la ſeconde place décimale incluſivement; de plus (à cauſe de $p' = -1,23...$) on a $\pi' = 0$; de ſorte que le ſecond reſte n'aura auſſi que le même degré d'exactitude; mais la plupart des termes de ce ſecond reſte ne contiennent de chiffres ſignificatifs que dans la troiſième place; donc ce reſte doit être regardé comme douteux, & par conſéquent doit être rejeté. On appliquera le même raiſonnement aux autres cas; & on en conclura que l'on ne doit pas aller au-delà de la ſeconde diviſion, de crainte que l'opération ne donne faux.

REMARQUE IV.

(46.) L'inconvénient que nous venons d'expoſer, empêche donc ſouvent qu'on ne puiſſe trouver directement la loi exacte d'une ſérie propoſée; c'eſt pourquoi il eſt très-important de chercher des moyens d'y remédier. Un des meilleurs eſt de tâcher de ſimplifier la ſérie, en la dégageant de la partie dont la loi eſt déjà à très-peu près connue, ainſi qu'on l'a déjà fait voir dans la *Remarque* de l'*article 20.*

Ce moyen réuſſira d'autant mieux que comme le dénominateur de la ſérie ne dépend que des angles α, β, &c. il ſuffira de connoître avec préciſion quelques-uns de ces angles pour pouvoir détruire dans la ſérie la partie qui dépend de ces mêmes angles; or, nous avons donné dans la *I.re Remarque* une méthode pour approcher autant que l'on veut de la vraie valeur de ces angles; ainſi on pourra toujours employer avec ſuccès la transformation dont nous venons de parler.

Lorſqu'on emploie la première ou la ſeconde ſolution des *articles 35, 36,* alors il n'y a qu'à faire uſage de la méthode de l'*article 20,* ſans aucune préparation; mais il n'en eſt pas de même quand on emploie la troiſième ſolution de l'*art. 37,* ou (ce qui eſt la même choſe) les méthodes de l'*article 40,* ainſi que nous l'avons fait dans les exemples ci-deſſus. Dans ce cas, il faudra modifier la règle de l'*article 20,* d'après ce que nous avons démontré dans l'*article 34.*

Pour cela on remarquera que les ſéries des ſommes ou des différences dont il s'agit dans les deux méthodes de l'*art. 40*, ont des fractions génératrices dont le dénominateur commun eſt un polynome réciproque formé du produit des trinomes

$$1 - 2\,\text{coſ.}\,\alpha\,.\,x + x^2,\; 1 - 2\,\text{coſ.}\,\beta\,.\,x + x^2,\; 1 - 2\,\text{coſ.}\,\gamma\,.\,x + x^2, \text{\&c.}$$

& dont les numérateurs ſont auſſi des polynomes réciproques d'un degré moindre de deux unités, mais qui ſont en même temps multipliés par $1 - x$, s'il s'agit de la ſérie des ſommes

de la première méthode; par $1 - x$, s'il s'agit de la série des différences de la même méthode; & par $1 - x^2$, s'il s'agit de la série des sommes de la seconde méthode. Donc, si on suppose qu'on connoisse déjà assez exactement la valeur de quelques-uns des angles α, β, γ, &c. & que le nombre de ces angles connus soit ρ, il n'y aura qu'à former le produit des trinomes correspondans

$1 - 2\cos.\alpha . x + x^2$, $1 - 2\cos.\beta . x + x^2$, &c.

que j'apellerai, pour plus de simplicité, Π, & on multipliera par ce polynome connu Π, la série des sommes ou des différences qu'on se propose d'employer; ce qui donnera, après avoir ordonné tous les termes par rapport aux puissances de x, une nouvelle série, qu'on partagera en deux parties, l'une que je désigne par R, & qui contiendra les ρ premiers termes; l'autre, que je désignerai par $x^\rho S$, & qui contiendra les termes suivans, lesquels seront tous divisibles par x^ρ, en sorte qu'après cette division, on aura la série S.

On formera maintenant le polynome contraire au polynome R *(article 23)*, & le dénotant par (R), on distinguera quatre cas, suivant la forme de la série que l'on aura employée.

1.° Si l'on fait usage de la série des sommes de la première méthode, on ajoutera le polynome (R) à la série S, & la série résultante $S + (R)$ sera de la même nature que la série primitive des sommes, mais elle en sera plus simple, puisqu'elle sera débarrassée de la partie qui dépendroit des angles connus α, β, &c. On traitera donc cette nouvelle série suivant les règles prescrites pour la série des sommes de la première méthode, & on en déduira la fraction en y $\frac{r\downarrow^{(n-1)}}{\downarrow^{(n)}}$, que nous désignerons ici par $\frac{V}{Y}$. Ayant trouvé cette fraction en y pour avoir celle de la série primitive, on prendra la différence $R - (R)x^\rho$ des deux

polynomes R & $(R)\, x^{\rho}$, laquelle sera nécessairement divisible par $1 - x$ (*art.* 23, *n.*° 5); & après la division on aura un polynome réciproque du degré $\rho - 2$, que nous désignerons par P, en sorte que $P(1 - x) = R - (R)\, x^{\rho}$; on considérera maintenant la fraction $\frac{P}{\Pi}$, dont le numérateur est un polynome réciproque du degré $2\rho - 2$, & dont le dénominateur en est un du degré 2ρ, & l'ayant multiplié par $1 + x^2$, on le transformera, par la substitution de y à la place de $\frac{x}{1 + x^2}$, en une simple fraction en y, ayant pour numérateur un polynome Q du degré $\rho - 1$, & pour dénominateur un polynome Ψ du degré ρ (*art.* 27). Pour faire cette transformation avec facilité, il n'y aura qu'à employer les substitutions enseignées dans l'*article 6*, changer ensuite z en y, & multiplier le bas & le haut pàr y^{ρ}; ou bien, ce qui sera encore plus simple, on fera d'abord

$$\Psi = (1 - 2\,\text{cof.}\,\alpha . y)\ (1 - 2\,\text{cof.}\,\beta . y) \ldots\ldots$$

ensuite on retranchera du polynome P les $\rho - 1$ premiers termes, & on mettra dans les ρ derniers, à la place de x^{ρ}, $x^{\rho+1}$, $x^{\rho+2}$, &c. $x^{\rho+\mu}$, les quantités

$$y^{\rho},\ y^{\rho-1}(1 - 2y^2),\ y^{\rho-2}(1 - 3y^2),\ \&c.$$

$$y^{\rho-\mu}\left(1 - \mu y^2 + \frac{\mu(\mu-3)}{2}\, y^4 - \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{2.3}\, y^6 + \&c.\right)$$

& l'on aura le polynome Q; en sorte que $\frac{Q}{\Psi}$ sera la fraction en y qu'on cherche.

Il ne restera plus maintenant qu'à ajouter cette fraction $\frac{Q}{\Psi}$ à la fraction $\frac{V}{Y}$ divisée par Ψ, & la somme, c'est-à-dire, la fraction $\frac{Q\Psi + V}{\Psi Y}$ sera la véritable fraction en y, qui répond à la série des sommes, & qu'on auroit dû trouver directement

directement en faiſant toutes les opérations requiſes. On traitera donc cette fraction de la manière preſcrite à l'égard de la fraction $\frac{p \psi^{(n-1)}}{\psi^{(n)}}$, dans la première méthode de l'*article 40.*

2.° Lorſqu'on ſera uſage de la ſérie des différences de la méthode, il n'y aura d'autres changemens à faire aux procédés qu'on vient d'enſeigner, ſinon qu'à la place de la ſomme $S + (R)$, on prendra la différence $S - (R)$ pour avoir une ſérie de la même nature que la primitive, & ſuſceptible des mêmes opérations; & qu'enſuite à la place de la différence $R - (R) x^p$, il faudra prendre la ſomme $R + (R) x^p$, qu'on diviſera par $1 + x$, pour avoir le polynome réciproque P.

3.° Dans le cas où l'on emploie la nouvelle méthode & où l'on veut opérer ſur la ſérie des ſommes, on ſuivra encore les mêmes procédés, ſi ce n'eſt qu'on prendra $S + (R) x$ pour la ſérie qui doit être de même nature que la primitive & qui doit fournir la fraction en $y \frac{V}{Y}$; & qu'enſuite pour avoir le polynome réciproque P, on prendra le polynome $R - (R) x^{p+1}$, qu'on diviſera par $1 - x^2$.

4.° Enfin, lorſqu'il s'agira de la ſérie des différences de la même méthode, il faudra prendre pour (R) le polynome réciproque de R diminué de ſon dernier terme, c'eſt-à-dire, le polynome réciproque de celui qui eſt formé par les $p - 2$ premiers termes de la ſérie après qu'elle aura été multipliée par Π; enſuite on procédera comme dans le *n.° 2, ci-deſſus*, avec cette ſeule différence qu'il faudra prendre immédiatement $P + (R) x^p$ pour le polynome P.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette matière, & nous ne chercherons pas non plus à l'éclaircir par des exemples, parce que cela nous mèneroit trop loin, & que

d'ailleurs elle ne doit plus être ſujette à aucune difficulté, après tout ce que nous avons démontré dans le cours de ce Mémoire.

REMARQUE V.

(47). Au reſte, quoique les méthodes expoſées ci-deſſus, ſoient principalement deſtinées pour les ſéries compoſées de ſinus & de coſinus d'angles; elles peuvent néanmoins être appliquées en général à toutes ſortes de ſéries récurrentes, & il ſuffit pour cela de remarquer que lorſque parmi les racines π, ρ, σ, &c. qu'on a ſuppoſées égales à $2 \text{ coſ. } \alpha$, $2 \text{ coſ. } \beta$, $2 \text{ coſ. } \gamma$, &c. il s'en trouvera d'égales ou de plus grandes que l'unité ou d'imaginaires; alors la ſérie ne contiendra plus ſimplement des ſinus & coſinus, mais elle contiendra une partie algébrique ou des exponentielles réelles; & il ſera facile de réſoudre ces différens cas par des méthodes connues.

Enfin, je dois remarquer, en finiſſant ce Mémoire, que les différentes méthodes que nous y avons données peuvent auſſi être d'un grand uſage dans la Phyſique, lorſqu'il s'agit de découvrir la loi des phénomènes d'après les réſultats de pluſieurs expériences; & en général, elles pourront ſervir pour réſoudre un grand nombre de queſtions dont on ne pourroit venir à bout qu'en tâtonnant, & d'une manière très-imparfaite ſans le ſecours de ces méthodes.

OBSERVATIONS BOTANICO-MÉTÉOROLOGIQUES,

Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers en Gâtinois, pendant l'année 1771.

Par M. DU HAMEL.

AVERTISSEMENT.

LES Obſervations météorologiques ſont diviſées en ſept colonnes, de même que les années précédentes. On s'eſt toujours ſervi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-deſſous de zéro; quand les degrés ſont au-deſſus, il n'y a point de barre; o déſigne que la température de l'air étoit préciſément au terme de la congélation.

Il eſt bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud pluſieurs jours de ſuite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-deſſus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conſervé une certaine chaleur; c'eſt pourquoi on a mis dans la ſeptième colonne, *Gelée.*

Les Obſervations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du ſoir.

Nota. Les Obſervations du baromètre, à commencer du premier du mois de Janvier, ont été faites ſur un baromètre ca'lé ſur celui de l'Obſervatoire, qui eſt 3 lignes plus haut que celui dont nous nous ſervions les années précédentes.

JANVIER 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin.	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S.	6	9	5	27.	9	beau avec nuages.
2	S.	4	9½	8½	27.	7½	variable avec vent & bruine.
3	S. O.	7	6½	5	27.	6	grand vent & pluie.
4	S. O.	2	4	1	27.	5½	couvert.
5	O.	0	3	1	27.	6	variable avec neige.
6	O.	0	2	−1½	27.	9	grande neige.
7	S. O.	−2½	2	0	27.	8	beau, vent & nébuleux.
8	O.	−2	−1	−2	27.	6	couvert & neige le soir.
9	O.	−4	1	−3½	27.	7½	neige pendant la nuit.
10	O.	−3½	0	−2½	27.	6	beau avec nuages & petite neige.
11	E.	−1½	−1	−1½	28.	3	neige toute la journée.
12	N. E.	0	−2	−1	27.	4½	grande neige la nuit, brouillard le matin.
13	N. E.	−3	−2½	−5	27.	3½	couvert avec neige & frimats.
14	N. E.	−5	−2½	−3½	27.	4	couvert & frimats.
15	N. E.	−5	−3	−4	27.	4	couvert.
16	N. E.	−½	−1½	−3	27.	2½	*idem.*
17	N. E.	−3	−½	−4	27.	3½	couvert & venteux.
18	N. E.	−5	−1	0	27.	2	couvert.
19	E.	−1	3	1½	27.	0	*idem.*
20	N.	1	3	0	27.	1	couvert & brouillard.
21	N. E.	−1½	−½	−1½	27.	6	couvert.
22	N. E.	0	−1	−1	27.	10	couvert & nébuleux.
23	S. O.	−1½	2	1	27.	11	couvert & bruine.
24	S. O.	−½	3	1½	27.	11	variable avec bruine.
25	O.	2½	5	2½	27.	10½	beau temps.
26	S. O.	2½	6	4½	27.	5½	brouillard & venteux.
27	O.	3	4½	2	27.	9	beau avec nuages & vent.
28	S. O.	1½	6	6½	27.	2	pluvieux & venteux.
29	N.	3	3	2½	27.	9	couvert.
30	S.	3½	7	8½	27.	9½	brouillard.
31	S. O.	9½	10½	10	27.	11	couvert & venteux.

Le 1.er, la Boussole 20d 5′; le 7, 20d 4′; le 31, 19d 55′.

Janvier.

Ce mois a été froid, & il eſt tombé beaucoup de neige. Le 5 il n'y en avoit que pour couvrir la terre. Le 6, elle tomba abondamment toute la journée & une partie de la nuit. Le 7, il y en avoit de la hauteur d'un pied en raſe campagne: dans les endroits où le vent l'avoit pouſſée, ainſi que dans les bas, il y en avoit quatre pieds de hauteur, où pluſieurs perſonnes ont péri.

Pendant la neige, on a vu pluſieurs groſſes grives, dites *chachats,* qui ſont venues manger les ſenelles ſur l'épine blanche.

Le 15, le verglas étoit ſi grand depuis quelques jours, que ni les hommes ni les chevaux ne purent ſortir.

Le 25, la neige étoit fondue dans la plaine, il n'y en avoit plus que dans les vallées & aux endroits expoſés au nord, & qui ne recevoient pas les rayons du Soleil.

Le petit ellébore jaune commençoit à fleurir à la fin du mois.

Du 1.er au 20, il s'eſt déclaré beaucoup de fièvres malignes; pluſieurs malades ſont morts le ſeptième jour de la maladie. Il y a eu auſſi des eſquinancies gangréneuſes, dont il eſt mort trois grandes filles dans une même maiſon.

Malgré les pluies, la neige & le brouillard, il n'eſt tombé pendant ce mois que 10 lignes $\frac{45}{48}$ d'eau. Cependant les eaux ont toujours été très-hautes dans les rivières.

FÉVRIER 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S. O.	7½	6	4	28.	0	pluvieux & couvert.
2	O.	4	6½	5	28.	0	beau & venteux.
3	N.	3½	8½	5	28.	1½	beau & couvert.
4	E.	½	6½	2½	28.	½	beau avec brouillard.
5	E.	0	7	1½	28.	½	beau temps, gelée blanche.
6	E.	2½	4½	— ½	27.	11	beau avec vent & nuages.
7	N. E.	—3	—1½	—3	27.	9½	*idem.*
8	N.	—5	0	—3	27.	9½	beau, venteux & couvert.
9	N.	—6	—3½	—5	27.	9	beau avec petite neige.
10	E.	—7½	—4	—6½	27.	8	nébuleux.
11	S. O.	—6	—2	—7	27.	5	variable avec grande neige.
12	S. O.	—3	—3	—7	27.	8	*idem.*
13	S.	—10½	—3	—3½	27.	5	beau & couvert.
14	E.	1	7	1	27.	4½	couvert, brouillard & bruine.
15	S.	1	8	2½	27.	7½	grand brouillard & bruine.
16	S.	3	9½	5	27.	10½	variable ſans pluie.
17	E.	2½	8½	4½	28.	1	beau avec nuages.
18	E.	3½	7	2½	28.	1½	*idem.*
19	E.	0	10	4	27.	11½	beau temps, gelée à glace.
20	E.	½	10	3½	27.	8½	*idem*, aurore boréale.
21	E.	0	9	3½	27.	8½	beau temps, gelée blanche.
22	E.	0	8	4	27.	8	beau temps, grand brouillard.
23	S. E.	½	10	5	27.	8	beau temps.
24	S. E.	0	11½	5	27.	7	beau temps, gelée blanche.
25	E.	3	12	9	27.	5	variable & pluvieux.
26	O.	5	8½	4	27.	10½	beau avec nuages.
27	S. E.	½	10	4½	27.	10	beau temps, gelée blanche & brouillard.
28	E.	2½	10	3	27.	8½	beau avec nuages.

Le 1.er, la Bouſſole 19^{d} 55′; le 21, 19^{d} 52′; le 23, 19^{d} 38′.

Février.

Ce mois a été froid & ſec; il eſt tombé beaucoup de neige au commencement; trois femmes y ont péri. Le 17, il y avoit encore de la neige dans les endroits à l'abri du Soleil, & la terre étoit gelée à fond. Les eaux étoient grandes dans la rivière d'Eſſone, parce qu'on vidoit les étangs dans la forêt d'Orléans, pour les pêcher à la mi-carême.

Le 19, les ellébores jaunes étoient en pleine fleur; les abeilles travailloient deſſus. Les perce-neige ne faiſoient que commencer à fleurir.

Il n'a tombé pendant ce mois que 3 lignes $\frac{36}{48}$ d'eau, tant en pluie qu'en neige, qui quoiqu'abondante, a été conſommée en partie par le vent & par la gelée.

MARS 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin.	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouc.*	*lign.*	
1	N. E.	3½	7½	2	27.	5	nébuleux.
2	E.	0	10	6½	27.	7	variable avec pluie.
3	S. E.	4½	9½	5½	27.	2½	*idem.*
4	E.	4½	9½	6	27.	3½	variable avec bruine.
5	O.	5	8	4½	27.	2½	variable & pluvieux.
6	N. E.	1½	1½	1	27.	1½	pluie & neige.
7	O.	— 1	2½	1	27.	5	variable avec vent & neige.
8	S. O.	— ½	2	0	27.	6	variable avec neige & grêle.
9	S. O.	0	4½	— 1	27.	6	nébuleux.
10	N. E.	— 1	5	1	27.	6½	*idem.*
11	N. E.	0	9	4	27.	8	couvert & variable avec bruine.
12	E.	5	12½	10½	27.	6	brouillard & bruine.
13	S.	8½	13	7½	27.	7	beau avec nuages, tonnerre, aur. boréale.
14	S. O.	4½	12	7½	27.	3½	tonnerre & grande pluie.
15	O.	5	10½	5½	27.	8½	variable avec giboulées & grêlots.
16	E.	6	9	7½	27.	7	pluvieux tout le jour.
17	N. E.	6½	10½	5	27.	10	couvert & venteux.
18	N.	2	3	3	27.	10	*idem.*
19	N.	4	5½	4	28.	0	couvert.
20	N.	3	7½	2½	27.	11½	*idem.*
21	S. O.	3	4	5	27.	8½	couvert, pluvieux & venteux.
22	N.	1	3	0	27.	8	variable & nébuleux.
23	N. O.	— 1	1½	— 1½	27.	6½	giboulées, vent, neige & tonnerre.
24	N.	— 2½	1	— 4	27.	7	giboulées & neigeux.
25	N.	— 3	½	— 3½	27.	7	neigeux & venteux.
26	S. O.	— 3	2½	— 1½	27.	7	nébuleux & neigeux.
27	N.	— 2	3½	— 1	27.	7½	beau avec nuages.
28	E.	— 2	4½	— ½	27.	7½	beau avec vent.
29	N. E.	— 1	5½	0	27.	7½	beau temps.
30	N. E.	— 2	5	0	27.	9½	*idem.*
31	N. E.	— 2	7	½	27.	11	*idem.*

Le 1.er, la bouſſole 19d 38′; le 17, 19d 40′; le 18, 19d 45′; le 23, 19d 47′.

Mars,

Mars.

Ce mois a été froid & humide; il eſt tombé, tant en pluie qu'en neige, 2 pouces $\frac{39}{48}$ de lignes d'eau.

Les oyaux ne faiſoient que commencer à fleurir dans les parterres, & la campagne étoit sèche comme à Noël.

Les vignerons tailloient la vigne & trouvoient la moëlle noire dans beaucoup de ſarmens, ce qui venoit de ce que le bois n'ayant pas mûri l'automne, avoit été gelé l'hiver.

Le 15, les pêchers qui avoient été gelés l'hiver ont épanoui quelques fleurs.

On a travaillé pendant les beaux jours qui ſont venus vers le milieu du mois à ſemer les avoines, mais on les a interrompues le 20 à cauſe de la gelée. La fin du mois a été encore plus froide; la gelée du 24 a gâté le peu de fleurs qui reſtoient aux pêchers. A l'égard des ceriſiers, ils avoient été gelés à moitié dans l'hiver.

AVRIL 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE Matin.	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouc.*	*lign.*	
1	N. E.	— 1	9	2½	27.	10	beau & venteux.
2	N. E.	— ½	10	3	27.	9	beau temps.
3	N.	1½	11	3	27.	10	*idem.*
4	E.	1	13½	5	27.	10	beau temps, gelée blanche.
5	S. O.	3	15	6	27.	8½	beau temps.
6	N.	3½	14	4	27.	9½	beau & venteux.
7	N. E.	2	12	4	27.	8½	beau avec nuages.
8	E.	0	11	4½	27.	7	beau temps.
9	N.	1½	14	5½	27.	7	beau temps.
10	N.	3	11½	4	27.	10	beau temps.
11	N. E.	0	11	4½	27.	8½	beau temps.
12	E.	3	14	6	27.	7	beau avec nuages.
13	N.	3½	10½	5	27.	9	beau & nébuleux.
14	S. O.	3	12½	6	27.	7	beau avec nuages.
15	N.	4	7	— 1	27.	8½	grand vent variable avec gresil.
16	O.	*0	5½	1	27.	8½	couvert & giboul. * (à 6h du m.—2½).
17	N.	*1	8	1½	26.	11½	giboul. gr. vent. *(à 6h du m.—1½),
18	N.	2	10	2	27.	11½	*idem.*
19	N.	1	2½	2	27.	10	grande neige fondue tout le jour.
20	N.	2	8	3	27.	11	gelée à glace, nébuleux.
21	N. O.	5	10	7	27.	10	nébuleux.
22	S. O.	6	14	9½	27.	8½	nébuleux & bruine le soir.
23	O.	8	10½	7	27.	8½	variable & petite pluie.
24	S. O.	6	10	7	27.	7	variable avec vent & bruine.
25	O.	6	10½	4½	27.	11½	variable & grêlots.
26	N.	6	12½	4	28.	1	nébuleux.
27	E.	6	13½	7	27.	11½	beau avec nuages.
28	O.	8	16	9	27.	8	*idem.*
29	E.	8	13	5	27.	6	nébuleux avec une ondée de grêlots.
30	S. O.	6	9½	5½	27.	7	variable & grêlots.

Le 1er bouff. 19d52'; le 5, 20d6'; le 6, 20d7'; le 9, 19d50'; le 19, 19d40'; le 24, 19d56'.

Avril.

Ce mois a été très-beau, ſec & très-froid; il a gelé preſque toutes les nuits; cependant à huit heures du matin, le thermomètre marquoit 3, 5 & 6 degrés au-deſſus de zéro, parce que le Soleil avoit beaucoup de force.

On a été obligé d'interrompre les ſemences des avoines, qui n'étoient faites qu'à la moitié environ. On attendoit de l'eau pour les achever & pour ſemer les pois, les veſces, &c. Le froid & la ſécheresſſe étoient très-contraires aux ſeigles; beaucoup de pieds avoient péri, & ce qui reſtoit montoit en tuyau ſur un ſeul brin très-foible.

Le 3, on a vu des hirondelles voler dans les vallées où elles arrivent quelques jours avant que de ſe répandre dans la plaine.

Le 6, les oyaux doubles & les jacinthes étoient en fleur, ainſi que les iris de Conſtantinople.

Le 12, on entendit le roſſignol chanter dans la vallée, mais on ne l'entendoit point encore dans la plaine.

Le 23, jour de Saint-George, les ceriſiers étoient en fleur. Le 29, les pruniers étoient tous fleuris. A la fin du mois, les groſeilles à grappe étoient en fleur. Les charmilles & les bois ne faiſoient que commencer à donner une teinte de verdure.

Depuis le 1.er juſqu'au 15, il n'a pas tombé une goutte d'eau; & depuis le 15 juſqu'à la fin, il en a tombé 3 lignes $\frac{2}{48}$.

MAI 1771.

Jours du Mois.	VENT.	Thermomètre. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S.	5½	11½	7	27.	8½	variable avec grêle fondue.
2	S.	5	13	6½	27.	11	gelée blanche, beau avec nuages.
3	O.	7	16	11½	27.	10½	*idem.*
4	S.	12	12	9	27.	9	variable avec pluie froide.
5	S.	8	10	8½	27.	7½	couvert, vent & bruine.
6	S. E.	11	19	13	27.	6	beau avec nuages.
7	S.	13	18	13	27.	6	*idem.*
8	S.	13	18	11½	27.	7½	variable avec nuages.
9	E.	13	18	11½	27.	8	variable avec pluie & tonnerre.
10	S.	11	14½	11	27.	9	beau avec nuages & vent.
11	S. O.	11	15½	10	27.	9½	Variable avec pluie & tonnerre.
12	S.	9½	14	10	27.	9½	beau avec nuages.
13	E.	11	17	11½	27.	9	variable avec petite pluie & tonnerre.
14	S. E.	13	22	15½	27.	9	beau temps.
15	S. E.	15	22½	15	27.	7½	variable sans pluie.
16	S. E.	16	19½	14	27.	8	beau avec nuages & grand vent.
17	S.	13½	19	13	27.	8	variable avec pluie & tonnerre.
18	N. O.	12½	17	12	27.	10	variable & nébuleux sans pluie.
19	N.	9	15	10½	27.	10½	beau avec vent froid.
20	N.	10	12	12	27.	10½	beau avec vent & nuages.
21	E.	12	19½	12½	27.	10½	beau avec nuages.
22	N. O.	12½	18	12	28.	0	
23	O.	13½	19	13	28.	1	
24	E.	13	21	15	27.	11	beau temps.
25	S.	16	22	16½	27.	9	*idem.*
26	S.	17½	20	15½	27.	8	variable avec bruine & éclairs le soir.
27	S.	16	20	13	27.	9	variable avec pluie & tonnerre.
28	S.	12½	18	19	27.	11	beau avec nuages.
29	S.	15	21	14½	27.	9	*idem.*
30	O.	14½	11½	9½	27.	10	pluie, vent & tonnerre.
31	S. E.	10	16½	12	27.	9½	beau avec nuages.

Le 1, la Boussole 15d 56'; le 14, 19d 58'; le 15, 20d 3'; le 16, 20d 15'; le 20, 19d 48'.

Mai.

Il n'eſt tombé pendant ce mois qu'un pouce ſix lignes $\frac{3}{48}$ d'eau. Cette ſéchereſſe avec la fraîcheur de l'air faiſoit que la végétation étoit très-retardée. Les avoines ne ſortoient point de terre; les blés étoient fort bas, & les ſainfoins fleuriſſoient au ras de terre; heureuſement il vint ſur la fin du mois de petites pluies qui firent grand bien, & dont on profita pour ſemer des féves & d'autres légumes.

Les vignes de haut plant, comme le mélier & le fromenté montroient peu de raiſins, la moitié des yeux ne s'ouvroient pas; les jeunes vignes des gouas en avoient un peu plus, mais en général il n'y avoit pas lieu d'eſpérer une bonne année. Le vin de la récolte de 1770 ſe vendoit 80 livres le poinçon; celui de 1766 n'avoit point de prix, il s'en eſt vendu juſqu'à 300 livres le poinçon.

Le blé s'eſt vendu 30, 32 & 33 livres le ſac ou le ſetier, meſure de Paris, peſant 240 livres; l'avoine, de 11 à 12 livres 10 ſous le ſac, qui eſt la moitié du ſetier de Paris.

Le 2, les hirondelles, qui depuis leur arrivée n'avoient point quitté les vallées, ont pris poſſeſſion des maiſons pour s'y établir. Les couronnes impériales étoient en fleur.

Le 7, on ſortit les orangers. Il y avoit beaucoup de roſſignols.

JUIN 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	O.	11	15	8	27.	11	grand vent, pluie & tonnerre.
2	N. O.	9	12½	7	28.	1	couvert & venteux.
3	N.	8½	15	10	28.	1	le matin gelée blanche, nébuleux.
4	N.	10½	15½	11	28.	0	beau avec nuages.
5	N.	10½	17	12½	27.	11	*idem.*
6	N.	12	18	14½	27.	9½	*idem.*
7	N. E.	15½	21	14	27.	11	beau temps.
8	E.	14	22	17	27.	10½	beau avec petite bruine.
9	S E.	17	25	17½	27.	9½	beau avec nuages.
10	S. O.	17½	19½	15	27.	9	couvert avec pluie & tonnerre.
11	S.	15	19½	13	27.	9½	variable avec petite pluie.
12	S. O.	13	16	13½	27.	11	*idem.*
13	S. O.	13	16½	13½	27.	11	couvert.
14	O.	14½	17	14	27.	10	variable avec nuages ſans pluie.
15	O.	15	18½	13	27.	8	couvert avec nuages & pluie.
16	O.	10	12	8	27.	3	grand vent avec ondées de pluie.
17	N. O.	7½	9½	9	27.	7	grand vent & grande pluie tout le jour.
18	N. O.	9	10½	10½	27.	10½	variable & pluvieux.
19	O.	11	17	13	28.	½	beau avec nuages.
20	N. O.	12½	16	12	28.	0	*(idem)*
21	N.	12½	16	11½	27.	11½	*(idem)*
22	E.	10½	13	10	28.	0	*(idem)*
23	N.	10½	16	10½	27.	11½	couvert ſans pluie.
24	N. O.	11	16½	12½	27.	10	variable avec pluie.
25	N. E.	13	19	13½	27.	10½	variable avec pluie & tonnerre au loin.
26	E.	14	19	14½	27.	9	couvert.
27	E.	14½	18	12½	27.	7½	variable avec pluie & tonnerre.
28	N. O.	13	14	12	27.	8½	ondées de pluie.
29	N. O.	10½	15½	11½	27.	9½	beau avec nuages.
30	N. E.	11	16	11½	27.	9	nébuleux.

Bouſſ. le 1, 19ᵈ 55′; le 7, 20ᵈ 8′; le 10, 20ᵈ 12′; le 12, 20ᵈ 15′; le 20, 20ᵈ 8′; le 30, 19ᵈ 55′.

Juin.

Ce mois a été froid ; il y a eu plusieurs jours où l'on étoit obligé d'allumer du feu les soirs & même pendant la journée. Il a été assez humide, puisqu'il est tombé 2 pouces 10 lignes $\frac{8}{48}$ d'eau; on commençoit à craindre que ces pluies n'empêchassent de faire la moisson. Le blé s'est toujours soutenu entre 30 & 32 livres le sac.

Les petites pluies qui sont venues depuis le commencement du mois ont fait lever beaucoup des avoines qui étoient restées en terre à cause de la sécheresse; ainsi elles ont fait deux levées, ce qui a obligé de perdre une de ces levées à la récolte. Les pluies ont fait aussi lever dans les avoines une prodigieuse quantité de chardons, & on a été obligé d'échardonner, ce qui occasionne un travail assez considérable. Quelques-uns ont pris le parti de faucher les chardons; mais comme ils coupoient en même temps leurs avoines, cette pratique ne leur a pas réussi. Cependant l'avoine qui avoit monté à 14 & 15 livres le sac, ne valoit plus qu'entre 12 & 13 livres.

Les sainfoins étoient très-bas, l'herbe dans les plus beaux n'avoit pas plus d'un pied de hauteur. Vers le 8 on commença à couper ceux qui étoient en fleur pour les vaches; & du 10 au 15 on faucha ceux qui étoient entre fleur & graine, pour les chevaux.

On mangeoit encore des fraises dans le courant du mois, vers la fin, on commençoit à servir les guignes.

JUILLET 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	N. E.	12½	14	14	27.	8	pluvieux.
2	S. O.	13	15½	11½	27.	9	*idem.*
3	O.	12	15½	11	27.	11	couvert avec nuages.
4	N.	12½	19½	12	28.	½	beau avec nuages.
5	N. O.	12½	19½	15½	28.	0	*idem.*
6	S. O.	14	18½	10½	28.	0	variable avec pluie.
7	N. E.	13	18	11½	28.	0	beau temps.
8	S.	13	20	15	28.	0	beau avec nuages.
9	S. O.	15½	21	14	27.	10½	*idem.*
10	S.	14½	18	14½	27.	11	variable ſans pluie.
11	S.	14½	21½	15	27.	10	beau avec nuages.
12	S. O.	15	21½	14½	27.	10½	*idem.*
13	N.	15	19½	13½	28.	1	
14	N.	15	20	15	28.	1½	
15	E.	14	21	14	28.	0	beau temps.
16	N. E.	15½	22½	16	27.	11	
17	E.	16½	25½	20	27.	10	
18	S. O.	20	26*	19½	27.	9	tonnerre au loin. (* à midi, à 2^h 24^d)
19	O.	15	15	10½	27.	8½	variable avec pluie.
20	O.	12½	16	10	28.	½	venteux avec nuages.
21	O.	11½	16½	14	28.	½	variable & petite bruine.
22	S.	15	15	16	28.	1	beau avec nuages.
23	N.	16	22½	15	28.	1	beau temps.
24	S. E.	17	23½	17	27.	11½	*idem.*
25	O.	18	24½	16½	27.	10	variable avec nuages.
26	S. O.	16½	24	16½	27.	8½	beau & venteux.
27	S.	16	22½	15	27.	10½	beau temps.
28	N.	25	21	13	27.	11	variable avec bruine & tonn. au loin.
29	N. O.	12	19	11	28.	1½	beau avec nuages.
30	S. O.	11	19	14	27.	11	beau temps.
31	S. O.	14	20	13	27.	8	variable avec petite pluie.

Le 1, la Bouſſole 19 degrés 55 min. le 18, 20 degrés 5 min. le 20, 20 degrés 4 min.

Juillet.

Juillet.

Depuis le commencement du mois jusqu'au 25, il a fait fort sec. Il n'est tombé que 5 lignes $\frac{44}{48}$ d'eau. Il y a eu quelques jours fort chauds, ce qui étoit favorable pour le peu de fruit qu'il y avoit aux vignes. On a commencé la moisson des seigles le 23; les fromens commençoient à blondir.

Le phénomène qui a été vu à Paris le 17 de ce mois, ainsi qu'à Rouen, à Orléans, &c. a été vu aussi le même jour à Denainvilliers à la même heure, avec les mêmes circonstances que par-tout ailleurs, chacun s'imaginant que le globe de feu étoit tombé derrière la maison voisine.

AOUST 1771.

Jours du Mois.	Vent.	Thermomètre. Matin	Midi	Soir.	Baromètre		État du ciel.
		Degrés	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	N. O.	11	13	8	27.	10½	variable avec ondées de pluie.
2	O.	10	15	11	27.	11	*idem.*
3	S. O.	11	18	13	28.	0	beau temps.
4	N. O.	12	18	15	28.	0	beau avec nuages.
5	O.	16	20½	16½	27.	10	*idem.*
6	S.	17	22	17	27.	9	beau temps.
7	S.	19	26	17	27.	8½	beau temps; il éclaire le soir.
8	S.	15	17	14½	27.	9	variable & pluvieux.
9	S.	16	21½	16	27.	8½	nébuleux & venteux.
10	S. O.	16	22½	15	27.	11	*idem.*
11	S. O.	14½	21½	14	27.	10	beau avec nuages.
12	S.	13½	16	12½	27.	6	grande pluie & grand vent.
13	O.	13	16	10	27.	8½	grand vent, pluie par ondées, tonnerre.
14	O.	11	13½	11	27.	10½	*idem*, sans tonnerre.
15	S. O.	12	16	13	28.	0	beau & venteux.
16	S. O.	12	19½	15	27.	10	beau temps.
17	O.	13	19½	10½	27.	11	*idem.*
18	S. O.	11½	18	14	27.	9	beau avec nuages.
19	S. O.	12	15½	10	27.	7½	pluvieux tout le jour.
20	O.	15	16	11	27.	9	variable avec pluie.
21	S. O.	12	18	13½	27.	10½	beau avec nuages.
22	E.	12	17½	12	27.	9½	beau; il éclaire à l'Est.
23	E.	14	15	14	27.	6	orageux & pluvieux.
24	S. O.	13	15	10	27.	6	nébuleux, venteux & pluvieux.
25	S. O.	10	13	9	27.	9	couvert, venteux & pluvieux.
26	N. O.	10	14½	8½	28.	½	beau avec nuages.
27	S.	9	12½	11½	27.	11	variable & pluvieux.
28	S. O.	12	12	14½	28.	0	beau avec nuages.
29	N. O.	14	19	14½	28.	0	*idem.*
30	E.	14	18½	14½	27.	11	grand brouillard, beau temps.
31	S.	15	22	16½	27.	9	beau temps.

Le 3, la Boussole 20 degrés 3 min. le 13, 20 degrés, le 21, 20 degrés 10 min.

Août.

On a commencé le 4 de ce mois la moiſſon des fromens; comme ils étoient bas & clairs, il n'y a point de fermier qui n'ait fait faucher environ un quart de ſes blés. Les pluies qui ſont ſurvenues ont interrompu la moiſſon; pluſieurs fermiers n'ont achevé que le 27 & le 28, & même il y en avoit encore ſur pied; au ſurplus, les trois quarts des blés ont été engrangés très-ſecs.

Au commencement du mois, les avoines tardives étoient vertes comme un pré. Les pluies qui ſont ſurvenues, en faiſant grand bien aux orges, ont fait pouſſer en fourrage les avoines tardives, qui à la fin du mois étoient auſſi hautes que les blés; mais elles étoient encore vertes, & on ne comptoit pas pouvoir les faucher avant quinze jours. On n'eſpéroit pas non plus qu'elles duſſent fournir beaucoup de grains; mais on ſe flattoit d'en être dédommagé par le fourrage, qui devoit être cher cette année.

On a mangé pendant ce mois les prunes de la ſaiſon, qui ont été aſſez abondantes. On a ſervi les cerneaux à l'ordinaire vers la Saint-Laurent.

Le 28, il n'y avoit encore que quelques grains de verjus de tournés.

Vers la fin, il a paru une grande quantité de ces papillons blancs qui produiſent la chenille du chou.

Il eſt tombé pendant ce mois 2 pouces 10 lignes $\frac{36}{48}$ d'eau.

Il y a eu une prodigieuſe quantité de fièvres à la ville & à la campagne.

SEPTEMBRE 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouc.*	*lign.*	
1	S. O.	16	22½	15	27.	8½	couvert avec pluie & tonnerre.
2	E.	16	22	16½	27.	9	variable avec tonnerre.
3	S.	16	17½	12	27.	9	variable avec pluie & vent.
4	E.	14	21	14½	27.	10	beau avec nuages.
5	N. O.	15	14½	12	27.	10½	couvert ſans pluie.
6	N. O.	12	15	9½	27.	9½	beau avec nuages.
7	S.	12	14½	10	27.	8	variable avec pluie & vent.
8	O.	10	15	12	27.	10	beau avec nuages.
9	N. O.	11	14	9	27.	11½	couvert & venteux.
10	O.	8½	15	12	27.	11	beau avec nuages.
11	S. O.	12	16½	10½	27.	10	beau avec nuages.
12	S.	10	19	12½	27.	10	beau avec nuages.
13	S.	11	21	15	27.	9	beau & venteux.
14	N. O.	14	11½	10	27.	10½	pluvieux.
15	E.	12	18	12	27.	10	beau temps.
16	S.	12	16	11½	27.	8	pluvieux.
17	N. E.	11½	14½	10	27.	11	beau temps.
18	S. E.	10	17	11	27.	10	*idem.*
19	S. E.	10	18	12	27.	9½	*idem.*
20	E.	10	15	13	27.	8	variable avec une ondée.
21	E.	11	17	10	27.	7½	beau temps.
22	N. E.	10	14½	10	27.	7	beau avec nuages.
23	N.	11	11½	11	27.	5	pluie continuelle.
24	N. O.	10½	12½	11	27.	10	beau avec nuages.
25	N.	11½	14	9	27.	11½	beau avec pluie & tonnerre.
26	E.	8½	12	7½	28.	0	variable ſans pluie.
27	N.	8	11	7	28.	0	beau avec nuages.
28	E.	5	11½	10	27.	11	beau & venteux.
29	E.	4	13	6½	27.	9½	*idem*, gelée blanche.
30	N. E.	5	13	6	27.	8	beau temps, gelée blanche.

Le 1.er, la Bouſſole, 20 degrés 10 minutes.

Septembre.

Il faut obſerver que les premières avoines qui avoient été ſemées dans la terre fraîche ont bien levé; celles qui ont été faites enſuite ont fait deux levées; ſavoir, le grain qui s'eſt trouvé dans la terre fraîche qui a levé, & celui qui s'eſt trouvé dans la terre sèche qui n'a paru qu'après les pluies, ainſi que celui qui avoit été ſemé le dernier: ce qui fait trois eſpèces d'avoine. Les premières ont été bonnes & moiſſonnées les premières; les ſecondes qui ont fait deux levées, étoient en partie mûres & en partie vertes. A l'égard des tardives de la troiſième eſpèce, elles étoient belles en herbe, mais elles n'ont preſque donné que du fourrage.

La nuit du 2 au 3, il éclaira beaucoup le matin; tous les épis d'avoine qui étoient mûrs avec de belles grappes ſe ſont rompues au premier nœud, & il n'eſt reſté ſur pied que l'avoine qui étoit verte, & qui ne devoit mûrir qu'après huit ou quinze jours, ce qui a obligé les fermiers de les faire faucher pour ne pas perdre le premier grain, & tirer du fourrage de l'avoine verte. Ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que ſans vent ni ſans pluie les éclairs aient la propriété de rompre les épis, ce que les fermiers appellent *abattre les avoines*, comme de faire couler le blé noir ou le ſarazin qui ſe trouve en fleur.

Le 6, les fièvres continuoient toujours & même en augmentant, tant à la ville qu'à la campagne. Dans Pithiviers il n'y avoit pas une maiſon qui en fût exempte, & on comptoit que la moitié des habitans en étoient attaqués. Dans des maiſons il y avoit juſqu'à ſix malades; il ſortit en deux jours de chez un fermier douze domeſtiques malades; le fermier, la fermière & les enfans en furent pris. Pluſieurs fermiers ont été contraints de laiſſer faire leurs moiſſons par des étrangers. Ces fièvres étoient bilieuſes, portoient à la tête & cauſoient, pendant l'accès, un *coma;* pluſieurs, malgré les purgatifs réitérés, ont dégénéré en fièvres putrides. Cette

maladie étoit épidémique locale; car il n'y en a point eu en Beauce que celles qui ont été communiquées par les domestiques malades qui sont retournés chez eux.

On a semé pendant ce mois les seigles, & donné les labours à demeure; mais les ouvrages étoient fort retardés par les maladies.

Aux vignes, les raisins n'étoient qu'à moitié tournés; il y en avoit beaucoup de pourris.

A la fin du mois, on ne voyoit plus d'hirondelles.

Il est tombé pendant ce mois 3 pouces 4 lignes $\frac{47}{48}$ d'eau.

OCTOBRE 1771.

Jours du Mois.	Vent.	Thermomètre. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre.		État du ciel.
		Degrés	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	N. E.	6	13 ½	6 ½	27.	8 ½	beau & venteux.
2	N. E.	6	12	5	27.	8 ½	beau temps.
3	E.	4	13	9 ½	27.	4	variable avec pluie.
4	N. O.	8	11	5 ½	27.	8	variable & venteux.
5	S. O.	2	10	7	28.	0	beau temps, gelée blanche.
6	S.	4	12	6 ½	27.	11	beau temps.
7	S.	7 ½	15	9	27.	10 ½	beau avec nuages.
8	S.	8	17	14	27.	8	beau avec nuages & vent.
9	S.	8	17	14	27.	8	variable avec vent.
10	O.	14	16 ½	9	27.	11 ½	*idem.*
11	S.	8 ½	13 ½	10	27.	11	pluvieux.
12	S. O.	8 ½	13 ½	8 ½	27.	11	variable & nébuleux.
13	S.	9	13 ½	12	27.	5	couvert.
14	S. O.	9 ½	13	8	27.	6	variable & venteux.
15	S.	8	11	9	27.	5	variable.
16	O.	6 ½	11	5	28.	0	nébuleux & venteux.
17	S.	3 ½	11 ½	8	27.	10 ½	gelée blanche, nébuleux & venteux.
18	O.	11	12	9	27.	11	pluvieux.
19	S. O.	10	14 ½	10 ½	27.	11	brouillard & pluvieux.
20	O.	11	14	7 ½	28.	0	beau avec nuages.
21	E.	6	11 ½	7	27.	11 ½	grand brouillard.
22	S.	7	12 ½	8 ½	27.	10 ½	*idem.*
23	S.	6	14 ½	10 ½	27.	9	beau temps.
24	S. E.	7	12	8	27.	11 ½	variable avec brouillard.
25	O.	8	12	5 ½	27.	10	*idem.*
26	N. O.	8	9	3	28.	0	variable avec pluie & vent.
27	S. O.	4 ½	9 ½	6	28.	2	beau avec nuages.
28	E.	4 ½	11	5	28.	1	beau temps.
29	S. E	2	11	6	28.	0	gelée blanche, beau temps.
30	N O.	5	8	6 ½	28.	3	brouillard.
31	N. E.	4	9	3 ½	28.	2	beau temps.

La Bouſſole, le 9, 19 degrés 50 minutes; le 26, 19 degrés 55 minutes.

Octobre.

Le temps a été fort variable pendant ce mois. Le baromètre a eu de grandes variations ſans qu'il ait fait beau pendant que le mercure étoit haut, ni qu'il ait fait fort mauvais pendant qu'il étoit bas.

Le temps a été favorable pour les ſemences dans les terres qui étoient meubles, mais on a eu bien de la peine à enſemencer les terres noires. Quelques Laboureurs qui ont été obligés de ſemer des blés qui avoient été mouillés pendant la moiſſon, ont un peu augmenté la quantité de ſemence. Les ſemailles étoient retardées par les maladies des domeſtiques & par les pluies, pendant leſquelles la terre étoit trop molle pour labourer à demeure.

Le 4, on a commencé la vendange, qu'on a continuée le 7 & le 8. Les raiſins étoient verds & la plupart rouges; il n'y en avoit preſque point de parfaitement mûrs, mais ils ne faiſoient plus rien aux vignes, & il y en avoit beaucoup de pourris, à cauſe de l'humidité produite par les dernières pluies. Le 17, on a entonné les vins vendangés; le 7 & le 8, le vin a peu bouilli. Il a pouſſé les premiers jours une écume blanchâtre qui n'a pas duré long-temps. Lorſqu'on a tiré le vin, il avoit peu de force & peu de couleur; cependant il n'étoit pas auſſi verd qu'on auroit cru, attendu le peu de maturité des raiſins.

Le 8, les chenilles provenues des papillons blancs qui ont paru au mois d'Août, s'étoient jetées ſur les choux & les mangeoient à force.

Le 12, on a vendu au marché les premières allouettes. Le 16, on a ſerré les orangers.

Le 21, on voyoit encore quelques fleurs de ſafran qui avoient commencé à fleurir avant la Saint-Denys.

Les fièvres continuoient, mais ce n'étoit que des rechutes de ceux qui les avoient eues.

Il n'eſt tombé pendant ce mois que 10 lignes $\frac{30}{48}$ d'eau.

NOVEMBRE.

NOVEMBRE 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre.	ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc. lign.	
1	E.	2	9	4	27. 11 ½	gelée blanche, beau temps.
2	S.	3	8 ½	4	27. 11 ½	grand brouillard, beau temps.
3	S. O.	5	9	6 ½	27. 11	beau avec nuages.
4	S. O.	6	9	4	27. 9 ½	pluvieux.
5	O.	1	4 ½	½	27. 11	gelée, beau temps.
6	S. O.	0	5	2 ½	27. 8 ½	gelée, variable & couvert.
7	O.	3	7	3	27. 10 ½	variable avec vent & petites ondées.
8	N.	— 1	4	0	28. 3	beau avec nuages.
9	N. O.	— 2	3 ½	— ½	28. 2	beau temps.
10	E.	— 2 ¼	4	0	28. 0	*idem.*
11	S. E.	— 2	7	5	27. 8	*idem.*
12	S.	4	11	10	27. 7 ½	variable & venteux.
13	N.	8	8 ½	2	27. 11	couvert, aurore boréale rayonnante.
14	E.	0	6	1	28. 1	beau temps.
15	S. E.	1 ½	6 ½	2	28. 0	brouillard, beau temps.
16	S.	— 1	9	3	28. ½	beau temps.
17	S. O.	3	10	8	27. 10 ½	beau avec bruine.
18	N.	4	4	1	28. 2	beau & venteux.
19	N.	— 1 ½	4	1	28. 2	beau temps.
20	N. E.	3	6 ½	9	28. 2	nébuleux.
21	N.	2	5	— ½	28. 2	couvert.
22	S. O.	— 1	3 ½	3	28. 0	variable & couvert ſans pluie.
23	S. O.	5	7	6	27. 11	couvert & bruine.
24	N.	5	0	5	28. 0	beau temps.
25	N. E.	1	4	½	28. 1	*idem.*
26	S. O.	2	5	4	28. ½	couvert & bruine.
27	O.	3	6	4	28. 1	couvert.
28	E.	4	5	4	28. 0	*idem.*
29	E.	0	4	1	27. 11	variable ſans pluie.
30	E.	— 2	4 ½	1 ½	27. 11	gelée à glace, beau temps.

Le 3, la Bouſſole, 19^d 50′; le 10, 19^d 45′; le 16, 19^d 50′.

Novembre.

Le baromètre a toujours été aſſez haut; il a fait froid & le temps a été beau.

On a tiré les échalas des vignes, on a achevé de ſemer les blés tardifs, & on a commencé à donner les labours d'entre-hiver.

Le ſafran a été de fort bonne qualité, & quoiqu'il y en aît eu fort peu, il a été à bon marché, puiſqu'il n'a pas valu plus de 21 livres, ce qui vient de ce que les guerres règnant dans le Nord, où il s'en conſomme la plus grande partie dans les ragoûts, on n'en demande point de ces pays.

Il y a eu beaucoup de ceux qui avoient été malades des fièvres qui ont eu des rechutes; elles ſe ſont tournées en fièvres irrégulières & la plupart en quartes.

Il n'eſt tombé que 11 lignes $\frac{20}{48}$ d'eau pendant ce mois.

DÉCEMBRE 1771.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin.	Midi.	Soir.	Baromètre pouc.	lign.	ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.			
1	S.	1 ¼	9	3 ½	27.	10 ½	beau temps.
2	E.	3	9 ½	3 ½	27.	9	*idem.*
3	N.	3	9	8 ½	27.	7	variable avec petite pluie.
4	E.	3	9	5 ½	27.	4	beau avec nuages.
5	S. E.	3	10	5	27.	6 ½	couvert.
6	S. E.	4	10	6 ½	27.	4	beau temps.
7	S. E.	7 ½	8	5	27.	5	couvert & pluvieux.
8	S. E.	4	7	4	27.	7 ½	grand brouillard.
9	S.	4 ½	8	7	27.	4	grand vent & bruine.
10	S. O.	6	1 ½	4 ½	27.	9 ½	couvert.
11	S. O.	6	10	10	27.	10	pluvieux & venteux.
12	S. O.	0	9 ½	6	27.	10	couvert & pluvieux.
13	N.	3	6 ½	2	27.	11	beau avec nuages.
14	E.	— 1	4	1 ½	27.	7	couvert.
15	S. O.	4	6	5 ½	27.	1	brouillard, grand vent & pluie.
16	S.	4	7	4 ½	26.	11 ¾	variable avec vent & bruine.
17	S. O.	3 ½	4	3	27.	2	couvert.
18	N.	4	6	1	27.	6	nébuleux.
19	S.	½	3	1	27.	5	gelée blanche, brouillard & pluie.
20	S.	— ½	3	5	27.	7	*idem.*
21	S.	8	9 ½	8	27.	3 ½	couvert & pluvieux.
22	S.	4	3	4	27.	3	pluvieux & venteux.
23	S. O.	4	7	7	27.	5	couvert & pluvieux.
24	S. O.	4	6 ½	4	27.	3 ½	variable avec bruine.
25	S. O.	½	4	2 ½	27.	8	brouillard.
26	S.	2 ½	44	5	27.	10	grand brouillard & pluie.
27	S. O.	6 ½	9	4 ½	27.	8 ½	couvert, venteux & pluvieux.
28	O.	1	4	1	27.	9	variable avec pluie & grêle.
29	N. O.	— ½	2	1	27.	10	couvert & neige.
30	N.	1	2	2	27.	9 ½	couvert & ſombre.
31	N.	2	3	2	27.	9 ½	couvert.

Le 15, la Bouſſole, 19 degrés 50 minutes.

Décembre.

On a fait peu d'ouvrages pendant ce mois, parce que la terre étoit trop molle pour labourer, & les chemins trop mauvais pour les voitures.

Les blés, quoique ſemés avec du grain qui avoit été mouillé pendant la moiſſon, étoient néanmoins très-beaux & aſſez drus. Ils ont toujours valu au marché 27 à 29 livres le ſac: l'avoine, 10 à 11 livres; & l'orge, 14 à 15 livres.

Le baromètre a deſcendu à 26 pouces 11 lignes $\frac{3}{4}$; cependant il n'y a eu ni grande pluie ni grand vent.

Les fièvres de rechute ont toujours continué.

Il eſt tombé 1 pouce 9 lignes $\frac{2}{48}$ d'eau dans ce mois.

Idée générale des productions de la Terre, Pendant l'Année 1771.

Fromens.

Le froid & la ſéchereſſe du printemps ont tellement fatigué les fromens, que pluſieurs pieds foibles ont péri; les autres ont monté en tuyau ſans avoir beaucoup talé. Ainſi les fromens étoient clairs. Les pluies qui ſont venues enſuite leur ont été favorables; cependant la paille eſt reſté courte, & les épis médiocrement longs; les gerbes étoient en petit nombre, & avoient peu de longueur, parce que la paille n'étoit pas haute. Comme les blés étoient clairs, il y a eu peu de tas, & bien loin d'être obligé de faire des gerbiers comme en 1767; les granges étoient plus grandes qu'il ne falloit pour contenir tous les grains; mais au lieu qu'en 1767 il falloit de vingt-cinq à vingt-huit gerbes pour faire la mine, meſure de Pithiviers, qui eſt le tiers du ſetier; en 1771, quinze à ſeize gerbes fourniſſoient cette même meſure, & dans les bonnes années; il n'en faut que douze à treize. Comme d'un autre côté il y avoit peu de gerbes, on peut dire

que la récolte des fromens a été médiocre, quoique meilleure que celle de 1767. Joignons à cela que dans notre Province le grain a été de très-bonne qualité, parce que la plus grande partie de la récolte a été faite par un temps sec, & que le peu de grain qu'on a été obligé de récolter pendant l'humidité étant entassé sur du grain sec, la chaleur du tas l'a desséché: d'ailleurs on a employé ces grains pour la semence, & en général, tous les fromens de 1771 fournissent beaucoup de farine; ce qui cependant ne doit s'entendre que de notre Province; car je suis informé qu'en plusieurs endroits il y a eu beaucoup de grains germés, ou au moins serrés fort humides.

Les grains que nos fermiers ont fait faucher, contenoient beaucoup d'herbes; mais comme celle qui dominoit étoit le ponceau, dont la graine est très-fine, elle ne se trouve point dans le froment; ainsi la récolte de nos fermiers n'a pas été abondante, mais leur grain est de bonne qualité.

Seigles.

Comme les seigles font leurs principales productions en Avril, la sécheresse & le froid de cette saison leur ont été très-contraires, & la paille étoit si courte que plusieurs fermiers ont été obligés de lier leurs gerbes avec de la paille de froment; & dans les provinces de terres légères, où le seigle fait la principale récolte, elle a été des plus mauvaises.

Avoines.

Nous avons dit que les avoines qui avoient été semées de bonne heure, & qui avoient trouvé assez d'humidité dans la terre pour lever, s'étoient soutenues jusqu'aux pluies, avoient bien réussi & avoient donné de très-bon grain. Celles qu'on a semé ensuite dans la terre sèche ont fait deux levées & ont donné plus de fourrage que de grain. Ce qui étoit tardif n'a presque pas donné de grain; la portion qui avoit levé avant les pluies a donné de bon grain, mais en petite quantité. A l'égard des avoines qui ont été semées tard, elles

n'ont presque donné que du fourrage. De plus, il a levé une prodigieuse quantité de chardons; les uns ont fait échardonner, & comme dans les grandes exploitations cela occasionnoit des frais considérables, plusieurs ont essayé de faire faucher la tête des chardons qui étoit plus élevée que l'avoine; mais aussi il arrivoit qu'on coupoit les brins d'avoine les plus élevés, & les chardons ont produit de nouvelles tiges; ainsi cette opération n'a pas eu le succès qu'on en attendoit.

Orges.

Comme l'orge se sème tard, ce grain a profité des pluies qui sont survenues trop tard pour les fromens & les avoines; ainsi cette espèce de grain a réussi.

Gros Légumes.

Les pois, les vesces, les lentilles ont assez bien réussi; il en a été de même des féves de haricots dans les terres chaudes; mais dans les terres froides, elles ont mûri fort tard, plusieurs ont pourri sur le champ, & l'on a eu beaucoup de peine à faire sécher celles qui étoient les plus avancées.

Foins et Sainfoins de hauts-prés.

Les sainfoins ont été très-bas & ont donné peu d'herbe. Comme les foins de prés hauts se fauchent plus tard, l'herbe a profité des pluies qui sont venues trop tard pour les sainfoins: malgré cela, ni l'une ni l'autre récolte n'ont été abondantes.

Vins.

Il y a eu fort peu de vin d'une qualité très-médiocre; ainsi on peut dire que cette récolte a été très-mauvaise.

Fruits.

Les fraises ont duré long-temps & ont été très-bonnes. Il n'y a point eu de pêches, presque pas d'abricots, fort peu de cerises ainsi que de poires; assez abondamment de prunes & de pommes, quoique moins que l'année précédente;

médiocrement de noix, qui ont été petites, mais bonnes; les melons n'ont pas réussi.

Le gland a presque entièrement manqué. Les cyprès, les pins & les sapins ont donné peu de cônes.

Semis et Plantations.

Les arbres qu'on a plantés avant l'hiver ont très-bien repris; quelques-uns de ceux qui l'ont été au printemps ont péri à cause de la sécheresse.

Quoiqu'il y ait eu des gelées assez fortes l'hiver, elles ont peu endommagé nos arbres étrangers; elles ont seulement attaqué les figuiers, qui ayant été gelés les hivers précédens, n'avoient que du jeune bois. Ce sont les gelées du printemps qui ont fait le plus grand tort aux arbres fruitiers.

Le niveau des eaux ayant beaucoup augmenté, nous avons été obligés d'arracher des tulipiers qui dépérissoient sensiblement; heureusement que ces arbres qui étoient assez gros ont fort bien repris dans un terrein moins humide où nous les avons mis. L'élévation des eaux a fait périr plusieurs gros piaqueminiers & quelques arbustes; mais cette circonstance funeste à plusieurs arbres, a été favorable aux cyprès à feuilles d'acacia.

Chanvres.

La récolte de cette plante a été assez bonne pour la quantité & la qualité.

Safrans.

La récolte n'en a pas été abondante, & quoiqu'il ait été d'une excellente qualité, il ne s'est vendu que 21 francs la livre, à cause des troubles de la Pologne.

Abeilles.

Les essaims ont donné assez abondamment, & à l'entrée de l'hiver, les ruches paroissoient bien approvisionnées: cependant on verra dans le journal de l'année prochaine, que la plus grande partie a péri pendant l'hiver. Le miel a été

vendu preſque auſſi cher que le ſucre; je ne ſais pour quelle raiſon.

INSECTES.

Il n'y a point eu de hannetons & fort peu de chenilles; ſeulement une chenille verte qui a dévoré quelques arbres fruitiers, ſur-tout de la famille des pommiers; mais il y en avoit fort peu. La chenille du chou ayant paru tard, n'a pas fait grand dommage. Les années froides ne ſont pas favorables à la multiplication des inſectes qui endommagent les grains; & de plus, les greniers étoient preſque vides.

GIBIER.

Il y a eu aſſez de lièvres & de lapins, un peu de cailles, peu de perdrix, aſſez abondamment d'alouettes.

MALADIES DES HOMMES.

Il y a eu une prodigieuſe quantité de fièvres intermittentes très-opiniâtres, avec quelques fièvres putrides; de ſorte que les fermiers ont eu beaucoup de peine à faire la moiſſon & les ſemailles.

MALADIES DES BESTIAUX ET DES VOLAILLES.

Il n'y a point eu de maladies épidémiques ſur les beſtiaux non plus que ſur les volailles. Elles ont néanmoins été rares & chères; ce qui eſt une ſuite néceſſaire de la cherté des grains.

NIVEAU DES EAUX.

Il y a eu toujours beaucoup d'eau dans les puits; les ſources ont pouſſé avec force, & la rivière d'Eſſonne qui traverſe nos terres, ayant débordé pluſieurs fois, quelques arbres que nous avions plantés dans la vallée, & qui, comme nous l'avons dit, y ſubſiſtoient depuis dix ans, ont péri.

EAU

EAU DE PLUIE.

HIVER.

	pouces.	lignes.
Janvier... Février... Mars....	3.	$3\frac{24}{48}$.

PRINTEMPS.

Avril.... Mai..... Juin....	4.	$7\frac{12}{48}$.

ÉTÉ.

Juillet... Août.... Septembre	6.	$9\frac{12}{48}$.

AUTOMNE.

Octobre... Novembre Décembre	3.	$7\frac{4}{48}$.

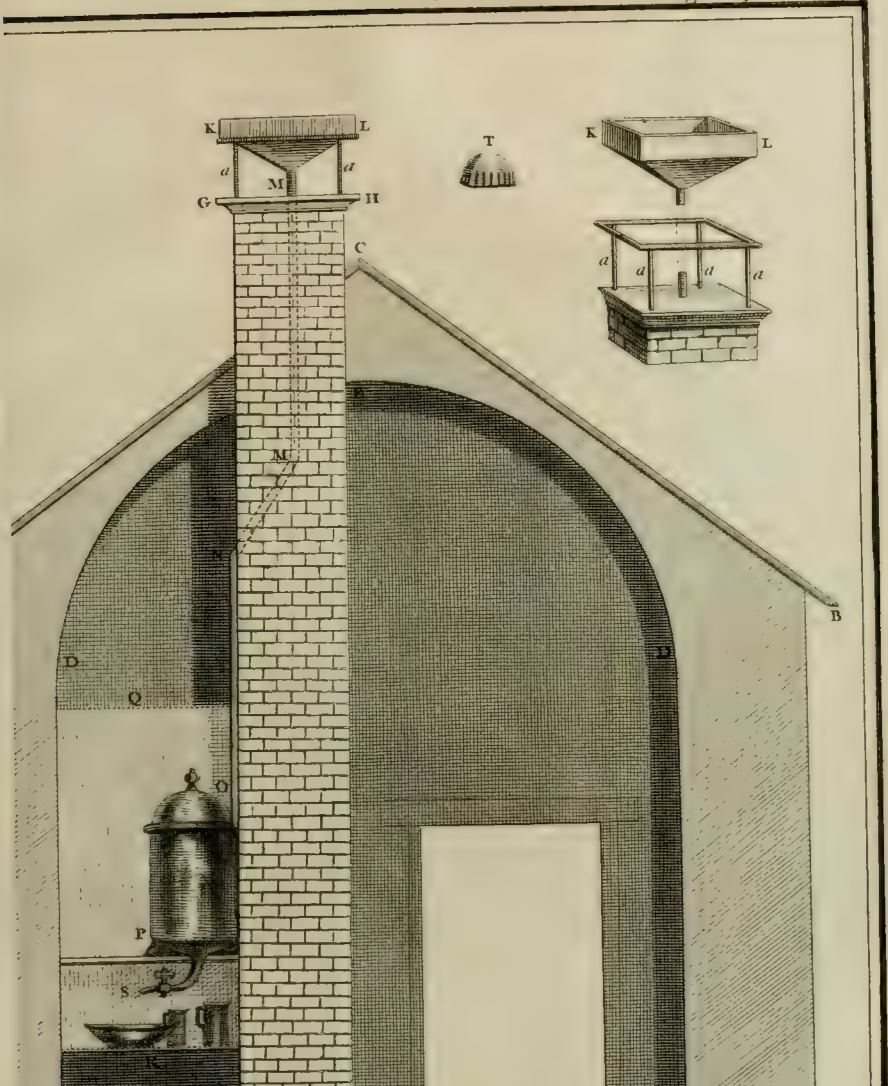
	pied	pou.	lig.
Total de la pluie tombée en 1771........	1.	6.	$3\frac{24}{48}$.

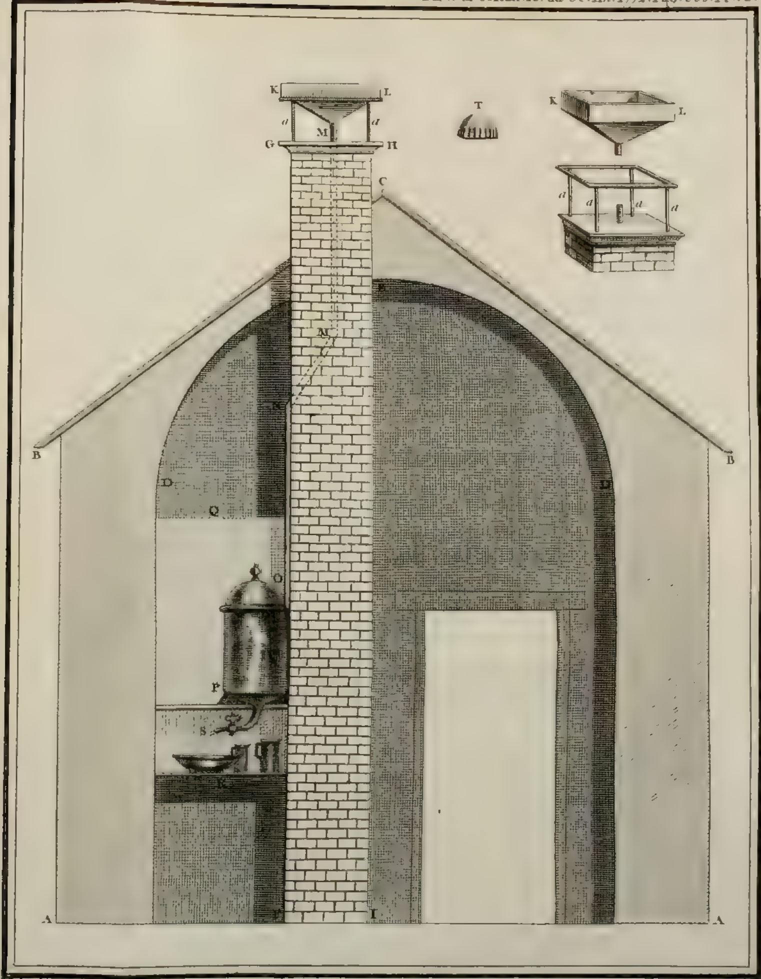
DESCRIPTION de l'établiſſement que nous avons fait pour meſurer la quantité d'eau que fournit la pluie, & dont nous avons fait uſage dans les obſervations que nous venons de rapporter.

Pour ſe former une idée de cet établiſſement, il faut concevoir un bâtiment *AB*, *AB*, voûté en *DED*, & couvert d'un toit *BCB*. On a conſtruit en dedans ſolidement & en briques, une eſpèce de tuyau de cheminée *FGIH*, adoſſé au mur qui forme le fond de cette petite chambre. Au-deſſus de ce tuyau, qui excède de quelques pieds le faîte du bâtiment, on a ſolidement établi ſur quatre pieds de fer *aa*, un baſſin de cuivre *KL*, qui eſt quarré & a deux pieds de côté, ou quatre pieds quarrés de ſuperficie; le fond de cette cuvette ſe termine en cône dont la pointe aboutit à un tuyau de cuivre *M*, qui deſcend dans l'axe du tuyau de brique juſqu'au-deſſous de la voûte. Ce tuyau s'incline d'abord au point *M*, pour ſortir du tuyau de briques au point *N*,

& descendant verticalement le long de ce tuyau, vient aboutir au vase de cuivre *O P.* Ce vase contient trente-cinq ou quarante pintes d'eau, & est exactement fermé par un couvercle de même métal. Il nous a paru nécessaire de le couvrir ainsi pour prévenir l'évaporation, quoiqu'elle doive être peu considérable parce qu'il est placé sous une voûte, & renfermé dans une armoire fermant à clef & désignée par les lignes ponctuées *Q R.* Sous le robinet *S* de cette espèce de fontaine, on met une jatte destinée à recevoir l'eau, si par hasard il s'en répandoit quand on mesure celle qui s'est amassée dans le vase *O P.* On mesure cette eau tous les cinq jours, & pour cela il y a dans l'armoire *Q R* une mesure qui tient exactement 48 pouces cubes ou une pinte; une autre, qui tient 24 pouces cubes ou une chopine, & ainsi en diminuant jusqu'à une petite qui ne contient qu'un pouce cube.

Nous comptions avoir pris toutes les précautions nécessaires pour avoir exactement la quantité d'eau que fournissoit la pluie; néanmoins dans les mois d'Octobre & de Novembre, qui ont été très-pluvieux, il nous parut qu'il ne sortoit pas suffisamment d'eau par le robinet, ce qui nous détermina à faire monter à la cuvette *K L,* pour essayer de connoître ce qui pouvoit retenir l'eau; on trouva cette cuvette remplie & qui versoit par-dessus les bords. Quoiqu'elle soit à 18 pieds d'élévation, le vent y avoit porté quelques feuilles, qui s'étant amassées en *M,* retenoient l'eau. Cet évènement nous fut désagréable, parce que la fin de Novembre ayant été fort pluvieuse, & la rivière d'Essonne ayant débordé considérablement, nous aurions desiré savoir si ces crûes subites & considérables venoient uniquement de l'eau de la pluie. Pour remédier à cet inconvénient, nous avons fait mettre sur le trou *M* du fond de la cuvette une calotte de plomb *T,* assez grande, qui est percée tout autour de sa base de plusieurs fentes, afin que s'il s'amasse des feuilles d'un côté qui ferment quelques-unes de ces ouvertures, l'eau puisse passer par les autres. Depuis que nous avons mis cette gargouille dans la cuvette, l'eau a toujours coulé librement.


K
L
a
a
M
G
H
T
K
L
a
a
a
a
C
M
N
B
D
D
Q
O
P
S
R
F
I
A



Y. le Gouaz f.

ADDITIONS au Mémoire ſur les Solutions particulières des Équations différentielles, & ſur les Inégalités ſéculaires des Planètes. (Voyez ci-deſſus, page 343)

Par M. DE LA PLACE.

ARTICLE III, page 348; avant ces mots: *comme on a dans le cas particulier où y* $=$ 0, &c. ajoutez:

On peut concevoir encore que p eſt réductible à cette forme $e^{-\frac{1}{y}} q$, e étant plus grand que l'unité; car l'équation $y = 0$, ſatisfait alors à celle-ci, $\frac{dy}{dx} = q \cdot e^{-\frac{1}{y}}$; mais $y = 0$, eſt dans ce cas une intégrale particulière, parce que $e^{\frac{1}{y}}$ eſt infiniment plus grand que $\frac{1}{y^n}$, quelque conſidérable que l'on ſuppoſe n; ce cas rentre donc dans celui où n eſt plus grand que l'unité. On prouvera de la même manière que quel que ſoit la forme de p, l'équation différentielle ſe rapportera toujours au cas de n égal ou plus grand que l'unité, ou à celui de n moindre que l'unité.

Article XV, à la fin, *page 377,* ajoutez ce qui ſuit:

Je ferai uſage d'une nouvelle méthode d'approximation à laquelle les recherches précédentes m'ont conduit, & qui eſt générale & ſur-tout fort ſimple, quel que ſoit le nombre des variables; c'eſt principalement ſous ce dernier rapport qu'elle peut avoir quelqu'avantage ſur les méthodes déjà connues, qui mènent à des calculs impraticables, lorſque le nombre des variables eſt indéfini; elle conſiſte à faire varier les conſtantes arbitraires dans les intégrales approchées, & à faire diſparoître par ce moyen les arcs de cercle, lorſque cela eſt poſſible. Cette manière de faire ainſi varier les conſtantes arbitraires, eſt, ſi je ne me trompe, abſolument nouvelle & d'une grande

fécondité dans l'analyse; je vais en donner ici une idée très-succincte, me réservant de la développer avec plus d'étendue dans le volume suivant.

Je suppose que l'on ait à intégrer l'équation différentielle, $0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y - l + \alpha y^2$; (1), α étant un coëfficient constant fort petit, & ∂t étant supposé constant; j'intègre d'abord celle-ci, $0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + y - l$; ce qui donne $y = l + p$ fin. $t + q$ cof. t; p & q étant deux constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y & de $\frac{\partial y}{\partial t}$ lorsque $t = 0$; c'est l'expression de y lorsqu'on y suppose $\alpha = 0$; je fais ensuite .... $y = l + p \cdot \text{fin.}\, t + q \cdot \text{cof.}\, t + \alpha z$; substituant cette valeur dans l'équation (1), elle donne, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, & en l'intégrant,

$$z = -\frac{[2l^2+p^2+q^2]}{2} - lqt.\text{fin.}\,t + lpt.\text{cof.}\,t + \frac{q^2-p^2}{6}.\text{cof.}\,2t + \frac{pq}{3}.\text{fin.}\,2t.$$

Il est inutile d'ajouter ici de nouvelles constantes, parce qu'elles sont déjà renfermées dans la première valeur de y; partant on aura,

$$y = l - \alpha\frac{[2l^2+p^2+q^2]}{6} + (p - \alpha lqt)\,\text{fin.}\,t + (q + \alpha lpt)\,\text{cof.}\,t + \alpha\frac{[q^2-p^2]}{6}.\text{cof.}\,2t + \frac{\alpha pq}{3}\,\text{fin.}\,2t \quad (2).$$

Que l'on fasse présentement dans l'équation (1), $t = T + t_{,}$, T étant supposé constant, elle deviendra, $0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t_{,}^2} + y - l + \alpha y^2$; d'où l'on tirera en l'intégrant, en négligeant les quantités de l'ordre α^2, & en ajoutant les constantes arbitraires de manière qu'elles coïncident avec celles de

l'équation (2), lorſqu'on ſuppoſe $\alpha = 0$,

$$y = l - \alpha \frac{[2l^2 + 'p^2 + 'q^2]}{2} + ('p - \alpha l.'qt_{,}) \text{ſin.} (T + t_{,}) + ('q - \alpha l.'pt_{,}) \text{coſ.} (T + t_{,}) + \alpha \frac{('q^2 - 'p^2)}{6} . \text{coſ.} (2T + 2t_{,}) + \alpha \frac{'p.'q}{3} . \text{ſin.} (2T + 2t_{,}); \quad (3)$$

$'p$ & $'q$ étant deux nouvelles conſtantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de y, & de $\frac{\partial y}{\partial t_{,}}$, lorſque $t_{,} = 0$. Au lieu d'intégrer deux fois l'équation (1), 1.° ſans y ſubſtituer $T + t_{,}$, au lieu de t; 2.° en ſe ſervant de cette ſubſtitution; il ſera plus ſimple de faire uſage d'abord de cette ſubſtitution, & de former ainſi l'équation (3); car il n'eſt beſoin alors que d'une ſeule intégration, l'équation (2) étant facile à conclure de l'équation (3) en y ſuppoſant $T = 0$, auquel cas $'p$ & $'q$ deviennent p & q; maintenant, ſi l'on avoit $\alpha = 0$, on auroit en comparant les équations (2) & (3), $'p = p$, & $'q = q$; donc, $'p$ & $'q$ ne diffèrent de p & de q que des quantités de l'ordre α; ſoit donc $'p = p + \delta p$, & $'q = q + \delta q$, δp & δq étant de l'ordre α; cela poſé, ſi l'on retranche l'équation (2) de l'équation (3), on aura en négligeant les quantités de l'ordre α^2, & obſervant que $t = T + t_{,}$

$$0 = [\delta p + \alpha lTq] . \text{ſin.} t + (\delta q - \alpha lTp) . \text{coſ.} t.$$

équation qui, à cauſe de t variable, & de T ſuppoſé conſtant, ſe partage dans les deux ſuivantes,

$$\delta p = -\alpha lT.q, \quad (4).$$

$$\delta q = \alpha lT.p, \quad (5).$$

d'où l'on voit que p & q ſont fonctions de αlT. Pour déterminer ces fonctions, ſoit $\alpha lT = x$, & l'on aura comme l'on ſait,

$$'p = p + \delta p = p + x . \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} . \frac{\partial\partial p}{\partial x^2} + \&c.$$

$$'q = q + \delta q = q + x . \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{x^2}{1.2} . \frac{\partial\partial q}{\partial x^2} + \&c.$$

donc $\delta p = x . \frac{\partial p}{\partial x} + \&c.$ & $\delta q = x . \frac{\partial q}{\partial x} + \&c.$

Les équations (4) & (5) deviendront ainsi en négligeant les quantités de l'ordre x^2, ou, ce qui revient au même, en comparant les termes multipliés par x; $\frac{\partial p}{\partial x} = - q$, $\frac{\partial q}{\partial x} = p$; d'où l'on tire en intégrant,

$$p = f.\text{cof.}x - h.\text{fin.}x,$$
$$q = f.\text{fin.}x + h.\text{cof.}x.$$

f & h étant deux nouvelles constantes arbitraires que je détermine au moyen des valeurs de p & de q, lorsque $x = 0$; donc on aura

$$'p = f.\text{cof.}\alpha lT - h.\text{fin.}\alpha lT,$$
$$'q = f.\text{fin.}\alpha lT + h.\text{cof.}\alpha lT.$$

l'équation (3) deviendra donc, en y substituant au lieu de $'p$ & de $'q$, ces valeurs, & en y supposant $t_{\prime} = 0$,

$$\begin{aligned} y = l - \alpha \frac{(2l^2 + f^2 + h^2)}{2} &+ f.\text{fin.}(T + \alpha lT) \\ &+ h.\text{cof.}(T + \alpha lT) \\ &+ \alpha \frac{(h^2 - f^2)}{6}.\text{cof.}(2T + 2\alpha lT) \\ &+ \alpha \frac{fh}{3}.\text{fin.}(2T + 2\alpha lT) \end{aligned}$$

c'est l'expression de y, après le temps quelconque T.

Si l'on vouloit porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^2, on feroit

$$y = l - \alpha \frac{[2l^2 + f^2 + h^2]}{2} + f.\text{fin.}(t + \alpha lt)$$
$$+ h.\text{cof.}(t + \alpha lt) + \&c. + \alpha^2 z;$$

& l'on opéreroit comme on vient de le voir, en faisant varier les nouvelles arbitraires f & k, & ainsi de suite.

L'équation que je viens d'intégrer est très-simple, aussi ne l'ai-je choisie que pour faire entendre cette nouvelle méthode; mais si l'on avoit entre les n variables, $y, y', y'' \ldots y^n$, les n équations suivantes, lesquelles sont de la même nature que celles du mouvement des Planètes,

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + q^2 . y = \alpha \begin{cases} (0) y + (0,1) . y' . \text{cof.} (q' - q) . t \\ \quad + \overline{(0,1)} . \frac{\partial y'}{\partial t} . \text{fin.} (q' - q) . t \\ \quad + (0,2) . y'' . \text{cof.} (q'' - q) . t \\ \quad + \overline{(0,2)} . \frac{\partial y''}{\partial t} . \text{fin.} (q'' - q) . t \\ \quad + \&c. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + q'^2 . y' = \alpha \begin{cases} (1) y' + (1,0) . y . \text{cof.} (q - q') . t \\ \quad + \overline{(1,0)} . \frac{\partial y}{\partial t} . \text{fin.} (q - q') . t \\ \quad + (1,2) . y'' . \text{cof.} (q'' - q') . t \\ \quad + \overline{(1,2)} . \frac{\partial y''}{\partial t} . \text{fin.} (q'' - q') . t \\ \quad + \&c. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 y''}{\partial t^2} + q''^2 . y'' = \alpha \{ (2) y'' + \&c. \}$$

&c.

(0), (1), (2), &c. (0,1), (0,2), &c. (1,0), &c. étant des coëfficiens constans quelconques; on tomberoit par les méthodes connues, dans des calculs impraticables; au lieu que la méthode précédente donne leur intégrale approchée avec une extrême facilité, en ramenant leur intégration à celle de $2n$ équations différentielles du premier ordre, de la même nature & susceptibles de la même méthode que celles de l'*article XIV;* c'est ce dont il est aisé de s'assurer par un calcul fort simple.

R E M A R Q U E.

Ayant envoyé à M. de la Grange mes recherches sur les inégalités séculaires des Planètes, lorsqu'elles furent imprimées; ce grand Géomètre me communiqua dans une lettre datée du 10 Avril 1775, qu'il me fit l'honneur de m'écrire à ce sujet, une méthode très-élégante & que les Géomètres verront avec plaisir, pour trouver directement les équations différentielles de l'excentricité & de l'aphélie; la voici telle qu'il me l'a envoyée.

« Je prends la solution du Problème des trois corps de

» M. Clairaut *(Théorie de la Lune, page 6)*, & j'obſerve que » puiſque $\frac{f^2}{Mr} = 1 - \text{ſin.}\, u\,(g - \int \Omega\, \partial u\, \text{coſ.}\, u) - \text{coſ.}\, u\,.$ » $(c + \int \Omega\, \partial u\, \text{ſin.}\, u)$; ſi l'on fait $g - \int \Omega\, \partial u\, \text{coſ.}\, u = e\, \text{ſin.}\, I$, » $c + \int \Omega\, \partial u\, \text{ſin.}\, u = e\, \text{coſ.}\, I$, on a $\frac{f^2}{Mr} = 1 - e\, \text{coſ.}\, (u - I)$; » en ſorte que e ſera l'excentricité, & I le lieu de l'aphélie, & » il eſt remarquable que les quantités e & I peuvent être » regardées comme conſtantes, pendant que les quantités r & u » varient de ∂r & ∂u; car comme

» $$\frac{f^2}{Mr} = 1 - e\, \text{ſin.}\, I\,.\, \text{ſin.}\, u - e\, \text{coſ.}\, I\,.\, \text{coſ.}\, u;$$

» il ſuffit de démontrer que la différentielle de cette équation » eſt nulle, en ne faiſant varier que les deux quantités $e\, \text{ſin.}\, I$, » $e\, \text{coſ.}\, I$; c'eſt-à-dire que $\text{ſin.}\, u . \partial . e\, \text{ſin.}\, I + \text{coſ.}\, u\,.\, \partial . e\, \text{coſ.}\, I = 0$; » mais $\partial . e . \text{ſin.}\, I = - \Omega\, \partial u\, \text{coſ.}\, u$, & $\partial . e . \text{coſ.}\, I = \Omega\, \partial u\, \text{ſin.}\, I$, » donc &c. je fais donc $x = e . \text{ſin.}\, I$, & $y = e\,.\, \text{coſ.}\, I$; » j'ai $\frac{f^2}{Mr} = 1 - x . \text{ſin.}\, u - y . \text{coſ.}\, u$, & enſuite j'ai en » différentiant, les équations

» $$\partial x = - \Omega . \text{coſ.}\, u . \partial u, \quad \partial y = \Omega . \text{ſin.}\, u . \partial u;$$

» ſi l'on ſubſtitue dans ces équations & dans les autres ſem- » blables, les valeurs de r & de u, en x, y & t, & que l'on ne » conſerve que les termes où x, y, x', y', &c. ſeront linéaires » & multipliés par des coëfficiens conſtans, on aura les équa- » tions cherchées; il faut ſeulement avoir ſoin de ne pas rejeter » dans la quantité Ω, les termes de la forme

» $$\int x . \text{ſin.}\, u . \partial u, \quad \int x . \text{coſ.}\, u . \partial u, \quad \int y . \text{ſin.}\, u . \partial u, \quad \int y . \text{coſ.}\, u . \partial u,$$

» & les autres ſemblables; car, ces termes étant transformés » en $x\,.\, \text{coſ.}\, u + \int \partial x . \text{coſ.}\, u$, &c. produiront dans les équa- » tions différentielles, des termes de la forme demandée; à » l'égard des quantités $\int \partial x . \text{coſ.}\, u$, &c. on pourra les négliger » entièrement, parce que ∂x eſt déjà très-petit de l'ordre des » maſſes des Planètes perturbatrices ».

MESSIEURS

MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire ſuivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi au mois de Février 1706.

MÉMOIRE

*Dans lequel on démontre que la racine de l'*Iris noſtras, *qui croît aux environs de Montpellier, peut être employée pour les uſages de la Médecine & pour les parfums avec le même avantage que l'Iris de Florence.*

Par M. MONTET.

LE plus grand nombre des anciens Pharmacologiſtes*, avoient une méthode très-défectueuſe pour ſécher les différentes parties des Plantes deſtinées aux uſages de la Médecine: ils vouloient qu'on les fît ſécher à l'ombre & très-doucement, ce qui étoit fort long; d'ailleurs en ſuivant cette méthode on les ſéchoit mal. Or dans les plantes mal ſéchées, qui ont ſubi certaines fermentations par l'eau ſur-

* Il en faut excepter le fameux Jacques Dubois ou Silvius, médecin, qui écrivoit il y a deux ſiècles.

abondante, que la plupart contiennent en grande quantité & qui n'a pas été emportée par l'action rapide du ſoleil, de l'air ou du feu; cette eau ſurabondante détruit, ou change en partie les principes conſtituans; de-là on doit inférer leur peu de vertu dans l'uſage journalier de la Médecine, ainſi que dans les Arts.

Les Pharmacologiſtes modernes, & ſur-tout les nouveaux Chimiſtes, ont reconnu, par les lumières que cette Science a répandues ſur les principes des corps & principalement ſur le règne végétal, que toutes les parties d'une plante, de quelque nature qu'elles ſoient, aromatiques, inodores, &c. que l'on veut conſerver dans un état ſec pour les uſages médicinaux, doivent être ſéchées très-vîte.

La racine dont j'ai à parler, & qui fait le ſujet de ce Mémoire, eſt du nombre des parties des plantes dont on ne ſauroit conſerver les vertus & développer l'odeur pour les uſages de la Médecine & des Arts, ſi on ne les fait pas ſécher le plus promptement qu'il eſt poſſible, au ſoleil le plus ardent; heureuſement dans le bas Languedoc nous jouiſſons ſupérieurement de cet avantage: au reſte on peut la ſécher auſſi dans l'étuve, dans un four, ſur un poêle, ſi on eſt privé du ſoleil; mais il faut pour le ſuccès complet de cette deſſiccation, avoir égard à différentes circonſtances que j'aurai ſoin de rapporter.

La racine dont il eſt queſtion, eſt celle de l'*Iris noſtras*, qui vient communément & en très-grande abondance, aux environs de Montpellier; (les habitans de cette ville l'appellent *Coutelle*, & les Botaniſtes, *Iris vulgaris violacea ſive purpurea ſilveſtris, J. B.*) cette plante croît dans toute ſorte de terreins; la groſſeur de ſa racine dépend beaucoup du ſol où elle croît; ſi la terre eſt légère, les racines ſont plus groſſes; ſi elle eſt forte, compacte, parſemée de cailloux, la groſſeur des racines eſt moindre; toutes ces variétés tiennent principalement à la nature du ſol, mais toutes ces circonſtances n'opèrent aucun changement remarquable ſur la partie que nous examinons; elles n'altèrent en aucune ſorte l'odeur

qu'elle a quand elle eſt bien préparée; & que j'ai reconnue, il y a plus de quinze ans, pour être abſolument identique, avec celle de l'iris de Florence & tout auſſi forte.

On ſait que l'iris de Florence a pris le nom de cette fameuſe ville, parce qu'il croît abondamment dans ſon terrein & ſur ſes murailles: on nous apporte ces racines de différentes groſſeur & figure; quand elles ſont récentes & qu'elles ont été bien ſéchées, elles ſont fort blanches, ſur-tout à la couche la plus extérieure & non intérieurement; c'eſt cet iris que l'on trouve dans le commerce, dont l'uſage eſt conſacré & dans la Médecine & pour les parfums, afin de donner l'odeur de violette, odeur qui eſt généralement recherchée.

L'iris de Florence qui eſt dans le commerce, eſt devenu fort cher, eu égard au prix où je l'ai vu, il ne valoit autrefois que 30 à 35 livres le cent peſant, poids de Marſeille; aujourd'hui il vaut le double, c'eſt-à-dire 60 livres, on pourra donner à moitié prix notre iris, qui ſuppléera à celui de Florence, comme j'oſe m'en flatter.

Si les vues que je propoſe ſont remplies, j'aurai rendu un ſervice à ma patrie & à l'État, & ſur-tout aux provinces méridionales où cette plante croît naturellement dans les terres les plus incultes, aux bords des haies & ſur les murailles, &c.

On pourroit la multiplier fort aiſément par la facilité avec laquelle prennent ſes caïeux, dont on a quelquefois bien de la peine à ſe préſerver dès qu'elle a pris racine dans une terre.

Je dis donc que je rends un ſervice à mes concitoyens, ſi toutefois je démontre que la racine de l'*iris noſtras*, qui croît naturellement aux environs de Montpellier, préparée de la manière que je vais l'expoſer, a la même odeur, ou à peu-près, & les mêmes vertus, étant bien ſéchée & rapidement, que l'iris qu'on tire de Florence.

J'ai remarqué conſtamment que cette racine dans tous les temps où on la ramaſſe, donne l'odeur de violette, pourvu qu'elle ſoit bien ſéchée. La ſaiſon la plus favorable pour la

ſécher eſt l'été; elle m'a paru toujours ſupérieure en odeur & en blancheur, dès qu'on la sèche dans cette ſaiſon au ſoleil le plus ardent.

Voici comment je m'y prends pour l'avoir bien préparée: dès que je l'ai arrachée, je coupe toutes les petites racines barbues attachées aux groſſes; enſuite je la fais bien frotter avec un linge pour ôter toute la terre; on pourroit la laver preſtement, mais il faut toujours éviter l'humidité qui eſt un obſtacle à la deſſiccation. On a un bon couteau & on ôte toute la peau extérieure, qui eſt ordinairement de couleur de chair, & la partie intérieure verte & toutes les parties noires où tenoient les petites racines; enfin il ne faut rien laiſſer à cette racine de colorant; quand elle eſt pelée ou ratiſſée ſur toutes ſes ſurfaces, elle eſt blanche; enſuite on la coupe par tranches de deux à ſix lignes d'épaiſſeur. Je mets ſur le champ cette racine coupée ſur un tamis de crin renverſé, & je l'étends de façon que chaque morceau de racine ſoit iſolé; on peut étendre ces racines ſur des nattes, planches, linges, &c. pourvu qu'elles offrent beaucoup de ſurfaces à l'air. Je les expoſe au ſoleil le plus ardent, ou au vent du Nord, ou, ſi ces moyens manquent, dans une étuve, dans un four, un poêle, pourvu toutefois que la chaleur ſoit telle qu'elle n'attaque pas la compoſition de la racine expoſée à ſon action, mais le premier moyen doit toujours être préféré. J'ai ſoin tous les jours de les retourner ſans-deſſus-deſſous, & le ſoir de mettre les racines ainſi préparées dans un endroit couvert, afin que pendant la nuit la roſée, ou l'eau qui ſe précipite de l'atmoſphère, ne les humecte pas; car elles ont la propriété de ſe ramollir à la moindre humidité, ſur-tout quand le vent eſt marin ou ſud-eſt. Elles n'ont éminemment cette propriété d'attirer l'humidité de l'air, que lorſqu'elles n'ont pas été entièrement ſéchées; après leur parfaite deſſiccation elles n'ont plus cette faculté, & on peut les garder long-temps en cet état dans une boîte ou un baril, dans un lieu bien ſec, & les introduire dans le commerce, comme nous le dirons, ſans qu'elles perdent de leur qualité.

Je ferai obſerver que les racines de l'*Iris noſtras* ſont très-difficiles à ſécher, ſur-tout ſi le temps ne favoriſe pas, parce qu'elles contiennent une eau ſi abondante & ſi tenace que le ſoleil le plus ardent du mois de Juillet, dans nos cantons, ne peut les ſécher dans un jour, quoique les racines ſoient coupées en tranches; dans cet état, elles offrent beaucoup de ſurfaces à l'air; elles perdent, par leur deſſéchement le plus rapide la moitié & plus, de leur poids d'eau, comme nous le dirons *; mais cela ne doit pas être mis en ligne de compte; celle qu'on ramaſſe dans les terreins un peu gras, perdent un peu plus par la deſſiccation. J'ai ſouvent remarqué que huit onces de cette racine fraîche, ratiſſée & coupée par tranches, & toujours ſéchée au ſoleil le plus ardent, juſqu'à l'état d'un parfait deſſéchement, pour être enſuite miſe en poudre & paſſée au tamis de ſoie fort ſerré, ſe réduiſoit conſtamment à trois onces deux gros, quelquefois un peu plus, & d'autres fois un peu moins. On voit par-là que cette racine perd le double de ſon poids & un ſixième en ſus. On reconnoît qu'elle a été bien ſéchée, & rapidement à ſa blancheur, couleur qu'elle doit toujours avoir; quand la deſſiccation ſe fait lentement, ſa blancheur eſt ternie. Bien ſéchée elle laiſſe développer ſon odeur de violette, odeur qui augmente de plus en plus dès qu'on la pulvériſe par un temps ſec; le mortier qui doit ſervir à cette pulvériſation doit être bien propre &

---

* Il eſt bon de rapporter un fait que la crédulité du peuple a accrédité: dans les courſes botaniques que je faiſois, tantôt dans un endroit, tantôt dans un autre, pour avoir de la racine d'*Iris noſtras*, de toutes les eſpèces de terreins, pour obſerver ſi elles me fourniroient quelque différence entr'elles, par rapport à la nature du ſol où ces racines croiſſoient, je trouvois des payſans qui, me voyant arracher une aſſez grande quantité de cette racine dans leur bien, venoient à moi pour m'en empêcher, diſant ingénument qu'il falloit leur en laiſſer, parce que, diſoient-ils, cela préſervoit du tonnerre leur poſſeſſion. J'avois beau leur dire que c'étoit un pauvre remède pour ſe garantir de la foudre, on ne m'écoutoit pas, & ils répondoient qu'il y avoit bien d'autres gens d'une autre qualité que la leur, qui trouveroient mauvais que l'on arrachât cette plante. Ces pauvres gens croyent ſérieuſement que c'eſt un préſervatif pour leurs maiſons & pour leurs poſſeſſions, & que le tonnerre ne tombe point dans les lieux voiſins de cette plante.

bien ſec, il faut qu'elle ſoit paſſée à un tamis de ſoie très-propre & ſans odeur, & qu'elle ſoit miſe tout de ſuite dans une bouteille bien sèche ou dans une boîte, & le tout bien bouché ou fermé. J'ai remarqué encore que cette poudre d'*Iris-noſtras*, à meſure qu'elle vieilliſſoit, comme, par exemple, au bout d'une année, acquéroit plus d'odeur que celle qui étoit récente.

Si l'*Iris noſtras*, ainſi pulvériſé, & mis dans des boîtes ou bouteilles, vient à ſe pelotonner ou à s'entaſſer, & qu'il ne ſoit pas toujours ſous une forme pulvérulente très-diviſée, c'eſt un indice que l'Iris n'étoit pas encore bien ſec lors de la pulvériſation; dans cet état, il perd de ſon odeur, & il faut, quand on s'en aperçoit, l'expoſer bien étendu ſur un papier à l'ardeur du ſoleil.

L'odeur de cette racine tient à ſa charpente, ſi je puis m'exprimer ainſi, car le ſuc que l'on en retire par les moyens connus, n'a point d'odeur. Si on fait ſécher promptement le marc qui a reſté dans le linge, après une forte expreſſion, il a l'odeur de violette.

Si les racines de l'*Iris noſtras* ſont mal ſéchées, & qu'il s'y faſſe quelque légère fermentation, tout eſt perdu, les racines ne ſont plus blanches, & leur odeur eſt en partie diſſipée; la bouſſole qui doit guider dans cette deſſiccation, eſt la grande blancheur de l'Iris pulvériſé; elle annonce ſa bonne préparation, & qu'il peut être employé aux uſages de la Médecine & dans les Arts, comme nous le dirons plus bas.

On peut garder l'*Iris noſtras* bien ſéché, coupé en tranches, dans une boîte dix ans, ſans craindre la vermoulure, pourvu néanmoins qu'il ait été ſéché rapidement, & que le lieu où l'on place cette boîte ſoit bien ſec. J'en ai depuis dix ans qui eſt parfait.

On ſait que le ſuc de l'*Iris noſtras*, tiré fraîchement de ſa racine, eſt fort viſqueux, & que c'eſt un purgatif très-fort que l'on donne dans l'hydropiſie aſcite: cette racine préparée, comme je viens de le dire, donnée en poudre intérieurement dans tous les cas où l'on donne l'iris de

Florence, a les mêmes propriétés. Je l'ai donnée très-ſouvent avec le même ſuccès, elle agit de même, miſe à la même doſe que l'iris de Florence, dans les différentes préparations pharmaceutiques pour leur donner l'odeur de violette, comme, par exemple, les tablettes, cachou, ſuc de régliſſe, &c; j'ai toujours trouvé que cette odeur étoit parfaitement identique avec celle de l'iris de Florence.

J'ai fait employer de ce même *Iris noſtras* préparé, à des marchands de poudre à poudrer, pour donner l'odeur de violette à leur amidon réduit en poudre: ils m'ont tous dit que c'étoit de bon iris de Florence, ne ſachant pas que ce fût de l'*Iris noſtras*, & que leur poudre avoit le même degré de force, en odeur, que celle qu'ils préparoient ordinairement avec l'iris de Florence pris chez l'Épicier.

Si on expoſe de cet *Iris noſtras*, bien pulvériſé & bien ſéché, à l'action de l'eſprit-de-vin rectifié, il en tire une teinture auſſi colorée & parfumée que celle que l'on retire de l'iris de Florence; mais il faut le laiſſer en digeſtion au ſoleil, ou au bain de ſable une quinzaine de jours.

De tout ce que je viens d'expoſer, après une ſuite d'obſervations long-temps réitérées, on peut conclure que la racine de l'*Iris noſtras* des environs de Montpellier, préparée comme je l'ai dit, peut ſuppléer à l'iris de Florence, avec lequel elle eſt parfaitement identique; que le commerce conſidérable que cette Ville fait de cette racine, principalement avec la France, où les parfums de cette eſpèce ſont fort à la mode, peut être fait avec plus d'avantage pour nous, & ſur-tout par nos Provinces méridionales, ſituées du côté de la mer, où *l'Iris noſtras* vient communément ſans culture, enfin que l'on peut la multiplier fort aiſément dans des terreins qui ne ſeroient propres qu'à cet uſage.

On m'objectera que tout l'iris de Florence que l'on trouve dans le commerce, eſt en gros ou petits morceaux, & de la même forme qu'ont ces racines quand on les tire de la terre. Je réponds que l'on peut ſécher, ſous la même forme, les racines de l'*Iris noſtras*, qui ne ſeront, en général (j'entends

les non-cultivées) jamais auſſi groſſes que celles de l'iris de Florence, qui en ſortant de terre, doivent ſurpaſſer les nôtres en groſſeur, puiſqu'elles perdent autant par la deſſiccation que celles de l'*Iris noſtras*, ainſi que je l'ai éprouvé ſur des racines de l'iris à fleurs blanches (qui eſt l'iris de Florence) priſes au Jardin du Roi de Montpellier. Je ferai remarquer qu'il y a plus d'inconvéniens à ſécher l'*Iris noſtras* de la même manière que celui de Florence, que de le couper en tranches; ſous la première forme, il eſt plus long à ſécher, & il faut rencontrer un temps très-chaud & point humide, ſans quoi la deſſication languit, les racines entières ſe ramolliſſent par leur propre eau qui eſt très-abondante, comme je l'ai déjà dit, & elles n'offrent pas tant de ſurfaces à l'action de l'air, du ſoleil & de la chaleur. Tout le contraire arrive aux racines qui ſont coupées en tranches, elles préſentent beaucoup de ſurfaces, & ſont ſéchées rapidement par le ſoleil, ou par le feu en beaucoup moins de temps que les racines entières, par une ſuite de cette diviſion mécanique, d'où dépend, ſelon moi, le développement de ſon odeur; odeur qui tient, comme je l'ai dit, à ſa charpente, & qui doit être produite par une réſine intimement unie à la partie ligneuſe de cette racine, ou bien par une huile eſſentielle ſolide, que le ſuc tiré de cette racine n'emporte ni ne diſſout pas. Il reſte toujours uni à la partie ſolide de la racine, & ſon odeur ſe développe avec plus d'énergie par le laps de temps, ſous la forme pulvérulente, que quand elle eſt en maſſe; phénomène qu'il me paroît que l'on ne peut attribuer qu'à cette petite quantité de réſine ou d'huile eſſentielle ſolide qui ſe trouve par cette extrême diviſion plus atténuée & dégagée de la charpente où elle tenoit, que l'eſprit-de-vin diſſout comme ſon véritable diſſolvant, de même que les corps gras; j'entends les graiſſes, &c.

Il me paroît qu'il importe peu pour le commerce, que les racines de l'*Iris noſtras* ſoient ſéchées toutes entières, ou coupées en tranches, dès que j'ai démontré que cette dernière méthode devoit être préférée pour opérer une prompte deſſiccation, d'où dépend la bonne odeur de notre iris; odeur

qui

qui eſt la partie fondamentale, ou la partie eſſentielle qui l'a fait rechercher pour ſes uſages, tant en Médecine, que dans l'Art du Parfumeur.

L'avantage que l'on peut retirer de cette découverte, comme j'oſe m'en flatter, c'eſt d'occuper (ſi l'on y trouve effectivement tout ce que je viens d'expoſer) des pauvres gens de la campagne à en ramaſſer les racines, & à les préparer comme je l'ai dit. Je ſuis perſuadé qu'en Été on pourra les faire ſécher dans un jour ſur des draps à la chaleur du Soleil, qui eſt très-ardent dans notre climat aux mois de Juillet & d'Août, pourvu toutefois que l'on choiſiſſe une bonne expoſition au midi, éloignée de l'ombrage des arbres, & qu'on obſerve de retourner les racines deux ou trois fois par jour.

Je terminerai ce Mémoire par des obſervations ſur la conſervation & le deſſéchement du blé, d'après ce que pratiquent quelques cultivateurs intelligens de nos campagnes. Ceci a beaucoup d'analogie au ſujet que je viens de traiter; on dépique * nos blés ſur toute la côte du bas Languedoc, du côté de la mer, ſur un terrein qu'on appelle *aire*. Ordinairement, on choiſit pour cette aire un endroit bien élevé, bien aëré, & éloigné autant que l'on peut des arbres. On a le ſoin de mettre ſur ce terrein une bonne couche de terre glaiſe que l'on bat bien afin que cette argile faſſe corps, & ſoit unie comme le pavé; c'eſt ſur cette aire que les gens de la campagne dépiquent leur blé avec des mules ou des chevaux; après cette opération ils font bien vanner leur blé, & le font paſſer à pluſieurs cribles; toute cette manœuvre ſe fait ſur l'aire au mois de Juillet & au commencement d'Août. Un petit nombre de cultivateurs intelligens, après avoir dépiqué leur blé, l'expoſent pendant pluſieurs jours étendu ſur l'aire à la plus grande ardeur du Soleil pour le bien ſécher, en le remuant de temps en temps; par cette manœuvre,

* Terme propre dans notre pays, qui veut dire fouler le blé par le moyen des chevaux, en les faiſant troter circulairement, les yeux couverts, ſur les gerbes que l'on a entaſſées de la même forme ſur l'aire.

l'eau ſurabondante ſe diſſipe, & on l'enferme dans les greniers pendant que le ſoleil y donne; pour lors le blé n'eſt point attaqué par les vers, & ſe conſerve des années entières. Cette deſſication faite par l'ardeur du ſoleil eſt auſſi bonne que celle de M. du Hamel, par le moyen d'une étuve, & que celle qu'on pratique dans différens pays, comme à Genève, où l'on expoſe le blé dans un four, après en avoir tiré le pain, pour deſſécher ce blé & le conſerver pendant pluſieurs années pour les temps de diſette. Ces mêmes cultivateurs de nos cantons obſervent de ne faire porter le blé de l'aire au grenier ni le matin ni le ſoir, à cauſe de la roſée, la moindre humidité étant toujours un obſtacle à ſa conſervation.

FIN.